А.В. Левичев

Однородные пространства и хронометрия Сигала

Учебное пособие к спецкурсам

Санкт-Петербург
2005

Александр Владимирович ЛЕВИЧЕВ – д.ф.-м.н., профессор, в.н.с. Института Математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Контактный e-mail: <levit@math.nsc.ru>

В пособии на примере нескольких конкретных левоинвариантных метрик на группах Ли рассмотрены такие вопросы, как вычисления кривизны, причинная структура, связь с теорией относительности (общей и специальной), геодезические, элементы хронометрической теории Сигала. По необходимости, приводятся элементы теории групп и алгебр Ли, а также квантовой механики (в ее изложении, основанном на понятии индуцированного представления основной группы симметрии). Формально, текст состоит из двенадцати лекций, прочитанных вторым из авторов в Санкт-Петербургском университете осенью 2004 года.

Пособие предназначено для студентов математического и физического факультетов, выполняющих курсовые и дипломные работы. связанные с инвариантными метриками на группах Ли. Завершающая часть (посвященная DLF-теории) выводит читателя на передний край современной (2005 год) науки, вооружая его средствами и идеями для получения новых математических результатов (с возможными приложениями в теоретической физике).

Те конструкции, которые не определены в тексте пособия, могут быть найдены в [СГ-79] (см. список литературы) или в (пятитомнике) "Математическая Энциклопедия".

•

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Л-1

Определение. Группой называется множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющей трем аксиомам: 1) ассоциативность, 2) существование единицы, 3) наличие обратного элемента (для каждого элемента группы).

Пример 1. "Основная аффинная"группа. Множество G ее элементов есть совокупность всех упорядоченных троек чисел. Нейтральный элемент ("единица"группы):

$$1 = (0, 0, 0). \tag{1}$$

Умножение в группе задается так:

$$x \cdot y = z = (x_1 + y_1 e^{x_3}, x_2 + y_2 e^{x_3}, x_3 + y_3). \tag{2}$$

Упр.1. Доказать, что получается группа G.
Некоторые этапы доказательства: $(x \cdot y) \cdot w = x \cdot (y \cdot w)$, ассоциативность умножения.
Существование обратного к x; дан x, найти v, обратный к x из $x \cdot v = v \cdot x = 1$.
Ответ:

$$v = x^{-1} = (-x_1 e^{-x_3}, -x_2 e^{-x_3}, -x_3). \tag{3}$$

Матричная модель этой же группы

$$\mathtt{X} = \begin{bmatrix} e^{x_3} & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_3} & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Упр. 2. Доказать, что $\tilde{G} = \{\mathtt{X}\}$ является группой (групповой операцией является умножение матриц).

Замечание. Отображение $f : G \to \tilde{G}$; $f(x) = \mathtt{X}$, которое упорядоченной тройке чисел из G сопоставляет матрицу (4) из $\tilde{G}$, является примером изоморфизма (одной группы на другую). Такая биекция сохраняет произведение: $f(x \cdot y) = \mathtt{X} \cdot \mathtt{Y}$, единица переходит в единицу, обратный к x переходит в обратный к $\mathtt{X}$. Нас интересуют **группы Ли**. Это значит, что множество G является дифференцируемым многообразием ("поверхностью"), а операции являются дифференцируемыми отображениями. В такой ситуации и изоморфизмом групп Ли считается лишь тот (алгебраический) изоморфизм, который дифференцируем. Подобные уточнения подразумеваются и в дальнейшем (они не всегда будут явно формулироваться).

Упр. 3. Доказать, что рассмотренные группы являются группами Ли, а указанный изоморфизм является изоморфизмом групп Ли.

Замечание. В дальнейшем, как правило, изоморфные группы обозначаются одной и той же буквой.

Правый сдвиг R_y определяется формулой: $R_y(x) = x \cdot y$.

Левый сдвиг L_x действует по правилу: $L_x(y) = x \cdot y$. Эти отображения обратимы: $(R_y)^{-1} = R_{y^{-1}}, (L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$.

Пусть дано гладкое отображение $f : G \to G$, $f(x) = z$ (G – поверхность). На примере размерности 3, напомним понятие дифференциала (= касательного отображения); оно обозначается df или f_*. Оно определяется (в точке a из G) как (линейное) отображение из (касательного в a) пространства T_a в $T_{f(a)}$, задаваемое следующей матрицей (составленной из соответствующих частных производных):

$$df = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} \end{bmatrix},$$

здесь $z_{i,m} = \partial z_i / \partial x_m$ подсчитаны при $x = a$.

Упр. 4. Найти дифференциал отображения $f = R_y$ в единице и дифференциал отображения $h = L_x$ в единице

Ответ:

$$df = dR_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; dh = dL_x = \begin{bmatrix} e^{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определение. Если всегда $x \cdot y = y \cdot x$, то такая группа G называется **коммутативной** (или **абелевой**).

Пример (двумерной матричной абелевой группы).

$$\mathtt{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Определение. Подмножество H в группе G называется **подгруппой**, если H замкнуто относительно (заданного в G) умножения.

Упр. 5. Доказать что эта (матричная) H- подгруппа в G.

Замечание. H задается уравнением $x_3 = 0$.

Л-2

Определение. Конечномерное линейное пространство L называется *алгеброй Ли*, если (дополнительно к векторной структуре) в нем зафиксирована билинейная антисимметричная операция $[,]$, удовлетворяющая *тождеству Якоби*: $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0}$ (для произвольных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ из L).

Вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ называется *коммутатором* (или *скобкой Ли*) векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пример 1. В каждой размерности можно взять $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$. Такая алгебра называется коммутативной (или абелевой).

Пример 2. (Матричная реализация *основной аффинной* алгебры Ли) Зафиксируем следующие три матрицы:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Напомним ряд Тейлора для $exp\ t$ в нуле: $e^t = 1 + t + t^2/2! + \ldots + t^n/n! + \ldots$ Такой ряд всегда сходится и для матриц t.

Упр. 1. $exp(x_1e_1) = (x_1, 0, 0), exp(x_2e_2) = (0, x_2, 0), exp(x_3e_3) = (0, 0, x_3)$. Здесь использованы обозначения из Лекции 1:

$$(x_1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ (0, 0, x_3) = \begin{bmatrix} e^{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

Упр. 2. Проверить, что $(x_1, 0, 0) \cdot (0, x_2, 0) = (0, x_2, 0) \cdot (x_1, 0, 0) = (x_1, x_2, 0)$; $(x_1, x_2, 0) \cdot (0, 0, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, x_3) \cdot (x_1, x_2, 0)$. *Основная аффинная* алгебра Ли (размерности 3) определяется как линейная оболочка матриц (-векторов) e_1, e_2, e_3, причем скобкой Ли $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ является ("обычный") коммутатор (матриц $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$): $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Упр. 3. Проверить, что для такого коммутатора (в любой размерности) выполнено тождество Якоби; что он билинеен и антисимметричен.

Определение (изоморфизма алгебр Ли $L, \tilde{L}$). Это такая линейная биекция f векторного пространства L на $\tilde{L}$, что $f([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [\mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{b})]$ при всех $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из L. Оказывается, что любая ("абстрактная") алгебра Ли изоморфна матричной алгебре Ли (допускает *матричную реализацию*). Для групп Ли – это уже не так.

Убедитесь, что

$$[e_3, e_1] = e_1,\ [e_3, e_2] = e_2. \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) называются *коммутационными соотношениями.* Они то и задают структуру (абстрактной) алгебры Ли (когда ничего не предполагается о природе ее элементов). В (2.1) подразумевается, что $[e_1, e_2] = 0$ (тривиальные коммутационные соотношения обычно не приводятся).

В размерности n таблица коммутационных соотношений такова:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k, \tag{2.2}$$

(здесь можно считать, что $i < j$ или иметь в виду, что всегда $C_{ji}^k = -C_{ij}^k$). Не забудьте, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – это векторы (некоторого) базиса в L. Индексы i, j, k принимают значения от 1 до n; когда выбраны два базисных вектора, то правая часть соотношения (2.2) есть разложение их коммутатора по векторам (этого же) базиса. Понятно, что такое разложение единственно (так определяются структурные константы C_{ij}^k; на самом-то деле это не совсем константы - ведь изменив базис в данной алгебре Ли мы получим, вообще говоря, другие коэффициенты разложения; точная формулировка такова: $\{C_{ij}^k\}$ образуют $\binom{1}{2}$ -тензор).

Каждой группе Ли G будет сопоставлена (ее) алгебра Ли $L(G)$ (см Л-3).

Определение. (локального изоморфизма групп $G, \tilde{G}$). Это такая гладкая биекция h некоторой открытой окрестности u единицы в G на открытую окрестность единицы в $\tilde{G}$, что $h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q})$ при всех $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ из u.

Имеет место следующее (фундаментальное) утверждение.

Теорема. Группы G, $\tilde{G}$ локально изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли $L(G)$, $L(\tilde{G})$ изоморфны. Для каждой алгебры Ли L существует такая группа G, что $L(G)$ изоморфна L.

Примером локального изоморфизма двух одномерных групп Ли является отображение $h(t) = e^{it}$ числовой прямой R на окружность S (в плоскости x, y), рассматриваемую как совокупность всех комплексных чисел модуля один. Групповые операции: в R – сложение в S – умножение (комплексных чисел).

Замечание. Понятно, что имеется лишь одна одномерная алгебра Ли – абелева. В размерности два, кроме абелевой алгебры, имеется (соответствующая) основная аффинная алгебра Ли. Она может быть задана таблицей $[e_2, e_1] = e_1$. Любая двумерная неабелева алгебра Ли ей изоморфна. Список алгебр Ли (данной размерности) в размерности три (и выше) – бесконечен.

Определение. Пусть дано векторное подпространство V-алгебры Ли L. V называется подалгеброй (Ли), если оно замкнуто относительно скобки Ли (той, что имеется в L): $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathbf{V}$ при всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$.

Замечание. Если под $[V, W]$ понимать совокупность всех $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$, где $\mathbf{c} \in \mathbf{V}, \mathbf{d} \in \mathbf{W}$,то предыдущее условие выглядит так: $[V, V] \subset V$.

Определение. $[L, L]$ называется *производной* (нетрудно доказать, что $[L, L]$ всегда является подалгеброй).

Определение. Подпространство V называется идеалом, если $[L, V] \subset V$ (ясно, что такое V является подалгеброй).

Иногда идеалы называются нормальными подалгебрами.

Определение. Центр C алгебры Ли: $C = \{\mathbf{a} \in \mathbf{L} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}\,\text{для любого}\,\mathbf{b} \in \mathbf{L}\}$ (это всегда идеал).

Определение. Прямая сумма W векторных пространств $L, \tilde{L}$ называется прямой суммой (алгебр Ли L и $\tilde{L}$), если коммутатор в W задается правилом $c = (\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}), \mathbf{d} = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{b}}) \Rightarrow [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}])$.

Обозначение: $W = L \oplus \tilde{L}$ (т.е. обозначение – то же, что для прямой суммы двух векторных пространств). Для каждой алгебры Ли вводится (по индукции) **верхний центральный ряд**: $L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \ldots, L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}], \ldots$ и **нижний центральный ряд**: $L_1 = [L, L], L_2 = [L, L_1], \ldots, L_{k+1} = [L, L_k], \ldots$ Их элементами являются соответствующие идеалы. Нетрудно доказать, что всегда $L_k \supset L^{(k)}$.

Определение. L называется **нильпотентной**, если найдется такое m, что $L_m = 0$; **разрешимой**, если для некоторого $m:\ L^{(m)} = 0$.

Нетрудно доказать, что любая нильпотентная алгебра Ли разрешима. Основная аффинная алгебра (в каждой размерности) разрешима, но не нильпотентна.

Пример. Таблица $[\bar{l_3}, \bar{l_2}] = [\bar{l_1}]$задает нильпотентную (трехмерную) алгебру Ли. Она называется алгеброй Ли *Гейзенберга.*

Л-3

Алгебра Ли $L(G)$ группы Ли G.

Под (определенным ранее) dL_x будем понимать его значение в единице. Тем самым, dL_x является линейным оператором из T в T_x (так как G параметризована, то dL_x является и матрицей – она составлена из соответствующих частных производных, см. Л-1).

Через $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, обозначаем ("подвижный") координатный репер на G. Ясно, что это базис векторных полей: всякое векторное поле $\bar{b}$ на G является линейной комбинацией: $\bar{b} = b^1\partial_1 + b^2\partial_2 + b^3\partial_3$ (определяемые однозначно коэффициенты b^1, b^2, b^3 являются функциями от x).

Как $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, так и другие векторные поля $\bar{b}$ – все они являются *дифференциальными операторами* (первого порядка). Результатом действия такого оператора $\bar{b}$ на (гладкую) функцию f, заданную на G, является функция h, обозначаемая $\bar{b}(f)$ (или $\bar{b}f$). Коммутатор двух таких операторов вводится как их композиция (в прямом порядке) минус композиция в обратном порядке. Проверьте, что получается дифференциальный оператор первого порядка (т.е. векторное поле).

К заданному векторному полю можно применить дифференциал (например, левого или правого сдвига). Получается векторное поле.

Определение. Векторное поле называется *левоинвариантным,* если оно инвариантно относительно всех левых сдвигов.

Замечание. Вот наглядное понятие о левоинвариантном векторном поле: надо взять отдельный вектор (удобно брать такой вектор в единице) и применить к нему всевозмоные левые сдвиги (тогда-то и получится вектор в каждой точке, т.е. векторное поле).

Аналогично вводится понятие *правоинвариантного* векторного поля. Известно, что коммутатор двух правоинвариантных векторных полей является правоинвариантным векторным полем (аналогично – для левоинвариантных).

Определение. Алгебра Ли $L(G)$ группы Ли G – это совокупность всех левоинвариантых векторных полей на G.

Получается векторное пространство (той же размерности, что размерность группы), в нем есть скобка Ли (коммутатор), выполняются все необходимые (для алгебры Ли) свойства.

Замечание. $[\partial_i, \partial_j] = 0$, что означает равенство вторых (смешанных) частных производных.

Пример. Вернемся к (трехмерной) основной аффинной алгебре Ли G. Введем левоинвариантный базис: $\bar{l_1} = e^{x_3}\partial_1$, $\bar{l_2} = e^{x_3}\partial_2$, $\bar{l_3} = e^{x_3}\partial_3$, (это вектор-столбцы матрицы dL_x) и правоинвариантный базис: $r_1 = \partial_1$, $r_2 = \partial_2$, $r_3 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ (это вектор-столбцы матрицы dR_x).

Упр. Найти коммутационные соотношения. Убедитесь, что алгебра разрешима, но не нильпотентна.

Замечание. "Правоинвариантные"коммутационные соотношения противоположны левоинвариантным по знакам. Это верно в общем случае: некоторые авторы определяют $L(G)$ как совокупность всех правоинвариантных векторных полей. Такие две алгебры (с противоположными знаками в правых частях коммутационных таблиц) называются дуальными. Кроме того, некоторые авторы вместо $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ используют $\bar{e_1}(x)$, $\bar{e_2}(x)$, $\bar{e_3}(x)$ (чтобы подчеркнуть зависимость этих векторов от x).

Упр. Доказать, что дуальные алгебры изоморфны.

Упр. Убедитесь, что поля $\bar{l_1}$, $\bar{l_2}$, $\bar{l_3}$ коммутируют с $\bar{r_1}$, $\bar{r_2}$, $\bar{r_3}$ (опять-таки, это верно в случае полей на любой группе Ли).

Замечание. Чтобы найти алгебру Ли данной группы, достаточно рассматривать локальную параметризацию этой группы (для некоторых групп глобальные параметризации невозможны).

Когда параметризация (локальная или глобальная) выбрана, то полезно представлять, что через каждую точку x проходят три (в общем случае – по числу измерений) *координатные линии.* Векторы ∂_1, ∂_2, ∂_3 являются касательными к (соответствующим) координатным линиям и образуют (т.н. *координатный*) базис касательного пространства $T_x(G)$.

Понятно, что в каждой точке имеется левоинвариантный базис (из векторов $\bar{l_1}$, $\bar{l_2}$, $\bar{l_3}$) и правоинвариантный базис (из векторов $\bar{r_1}$, $\bar{r_2}$, $\bar{r_3}$).

Действия групп

Определение. Действие F (группы Ли) на (многообразии)X – это отображение $F : G \times X \to X$ с условием $g \to F(g, *)$ есть гомоморфизм G в группу всех (дифференцируемых) преобразований X. Действие называется *эффективным,* если его ядро тривиально. Действие называется *свободным,* если при всяком x из X та подгруппа, которая переводит x в x, сводится к тривиальной. Действие называется *транзитивным,* если для любой пары x, y из X найдется хотя бы одно преобразование из группы, которое x переводит в y.

Напомним, что *ядро* (действия) $kerF = \{g \in G : \ g(x) = x, \forall x \in X\}$. *Орбитой* (точки x) называется множество $\{g(x) : \ g \in G\}$.

Пример. $X = R^2$, $X \ni x = (x_1, x_2)$.

В данном примере гомоморфизм $F(g, *)$ (из определения действия) сопоставляет матрице

$$g = \begin{bmatrix} e^t & 0 & a_1 \\ 0 & e^t & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

пребразование плоскости R^2, действующее по формуле: $x \longrightarrow (x_1e^t + a_1, x_2e^t + a_2)$.

Можно обозначить это преобразование $\hat{g}$, тогда $\hat{g}(x) = (x_1e^t + a_1, x_2e^t + a_2) = (y_1, y_2)$. Многие авторы обозначают такое преобразование той же буквой, что и исходный элемент группы G. Тогда формула такова: $g(x) = (y_1, y_2)$, (такое упрощение нередко используется и в нашем тексте).

Надеемся, что в этом примере вы сразу распознали основную аффинную группу G. Теперь ее название стало более обоснованным, ведь эта формула означает что G действует (на плоскости) *аффинными преобразованиями* – гомотетией и параллельными переносами. Это действие эффективно и транзитивно. Оно не является свободным.

Замечание. Если вместо упорядоченной пары (x_1, x_2) ввести вектор-столбец $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, то действие превращается в матричное: надо матрицу $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ умножить (слева) на матрицу g.

Пример. Пусть $X = S^2$ (стандартно вложенная в R^3), $G = O(3)$ – совокупность всех ортогональных преобразований (т.е. *изометрий, движений*) в R^3. Понятно, что G действует на S^2. Это действие не является свободным. Оно транзитивно.

Определение. Действие называется *просто транзитивным,* если для каждой пары элементов x, y найдется в точности одно преобразование из группы G, переводящее x в y.

Пример. Действие группы Ли (на себе самой) левыми сдвигами является просто транзитивным. Аналогично – для правых сдвигов.

Л-4

Пример. (*Унитарная*) группа $U(2)$, определение:

$$U(2) = \{z : z^* = z^{-1}\}.$$

Здесь подразумевается, что z - это 2×2 матрица с (вообще говоря) комплексными элементами. Проверьте, что введенное множество матриц образует (матричную) группу. Следующее свойство является следствием определения: $|det\, z| = 1$. (Но сам определитель $det\, z$ может быть комплексным числом.)

Важной подгруппой является

$$SU(2) = \{z \in U(2) : det\, z = 1\}.$$

Матрица из этой подгруппы может быть задана комплексными числами

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in SU(2), \quad a, b: \; a\bar{a} + b\bar{b} = 1.$$

Если ввести вещественные переменные x, y, u, v по формулам $a = x + iy$, $b = u + iv$, то становится понятным что *топологически* группа $SU(2)$ – это сфера S^3.

Алгебра Ли $u(2)$**.** Под матрицами Паули обычно понимаются

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Стандартный базис алгебры Ли $u(2)$ состоит из матриц $i\sigma_m$ Ясно, что $u(2)$ равна прямой сумме (одномерного) *центра* и подалгебры $su(2)$. Центр порожден матрицей $i\sigma_0$, а $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ – базис $su(2)$.

Ортогональная группа $O(3) = \{A \in M_3(R): \; A^T = A^{-1}\}$, здесь через $M_3(R)$ обозначено пространство всех 3×3 матриц с вещественными элементами.

Подгруппа $SO(3) = \{A \in O(3) : \; detA = 1\}$. Хорошо известно 2-накрытие $SU(2) \to SO(3)$. Его ядро равно $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} \subset SU(2)$. Известно, что $SO(3)$ неодносвязна; группа же $SU(2)$, будучи трехмерной сферой, односвязна. Это накрытие является гомоморфизмом групп. В **хронометрии Сигала** нередко используется следующее разложение в $U(2)$:

$$z = \sqrt{det\, z}\, u, \quad u \in SU(2).$$

Другими словами общий элемент z равен произведению элемента $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ из *центра* группы на элемент из подгруппы $SU(2)$. Его можно осуществить и вторым способом $z = -\sqrt{det\, z} \cdot (-u)$. Пара $(u, -u)$ определяет матрицу A из $SO(3)$. Получилось отображение $U(2) \to SO(3)$. Это пример *нетривиального расслоения.* $U(2)$ является *пространством расслоения, слой* - одномерная окружность, *база* – группа $SO(3)$.

Замечание 1. $U(2)$ не является прямым произведением центра и $SU(2)$ (в смысле произведения двух групп).

Замечание 2. Если матрица $\bar{a}$ (она же – и вектор, как элемент алгебры Ли) взята из $u(2)$, то $z\bar{a}$ есть соответствующее левоинвариантное векторное поле, а $\bar{a}z$ – правоинвариантное; здесь z "пробегает"всю $U(2)$.

Метрический тензор: на поверхностях и на группах.

Когда он задан, то при выборе точки поверхности G и двух векторов в этой точке (что всегда означает: векторы a, b лежат в касательном к G пространстве в этой точке) определено число. Это число называется *скалярным произведением* и обозначается $\langle a, b \rangle$ (или (a, b)). Конечно, должны выполняться общие свойства скалярного произведения коммутативность и линейность. Нас, в основном, будет интересовать *лоренцево* скалярное произведение (оно не является положительно определенным).

Метрический тензор зависит (вообще говоря) от точки на поверхности. Если на (части) поверхности введены координаты, то коэффициенты g_{ij} метрического тензора являются числовыми функциями этих координат. Вот какова формула в размерности два:

$$\langle a, b \rangle = g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2.$$

В некоторых текстах используется (иногда - по умолчанию) *правило суммирования Эйнштейна*: под $g_{ij}a^ib^j$ понимается $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}a^ib^j$, т.е. знак суммы опускается.

Замечание. Правильнее вводить верхнюю индексацию компонент векторов (и векторных полей), так как это тензор типа $\binom{1}{0}$; метрический же тензор – типа $\binom{0}{2}$ (дважды *ковариантный*). Его можно переделать в дважды *контравариантный* (это переход к обратной матрице, переход в каждой точке): $\left[g^{mk}\right] = [g_{ij}]^{-1}$.

Если метрика задана "на фоне"системы координат, то число $g_{ij} = g_{ji}$равно $\langle \partial_i, \partial_j \rangle$ (т.е., скалярному произведению векторов координатного репера в этой точке). Иногда метрика задается по отношению к подвижному реперу $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$; тогда $g_{ij} = \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle$.

Лоренцева сигнатура - это когда одно из собственных чисел матрицы отрицательно, а все остальные - положительны (иногда - наоборот).

Определение. Метрика на группе Ли M называется **левоинвариантной,** если всегда $\left\langle dL_x\bar{a}, dL_x\bar{b} \right\rangle = \left\langle \bar{a}, \bar{b} \right\rangle$, здесь $\bar{a}, \bar{b}$ – векторы в $\mathbf{1}$, x – произвольная точка в M. Аналогично – правоинвариантной. Другими словами, выбрана *форма* (она задает скалярное произведение лишь в одной точке, удобно взять в качестве этой точки единицу группы). Затем с помощью сдвигов (левых или правых) задается метрика на всей группе.

Пример. На основной аффинной группе M размерности два введем левоинвариантную *риманову* (т.е., положительно определенную) метрику. Используем ранее введенные координаты, но x_1, x_2 обозначаем через x, y (чтобы избавиться от излишней индексации). Форму в единице задаем единичной матрицей.

Получается, что левоинвариантные векторы l_1, l_2 (см. соответствующую лекцию) образуют *ортонормированный репер* (или подвижный базис). Так как

$$\partial_x = \partial_1 = e^{-y}l_1, \quad \partial_y = \partial_2 = l_2,$$

то попарные скалярные произведения векторов координатного базиса таковы

$$\langle \partial_1, \partial_1 \rangle = e^{-2y},\ \langle \partial_2, \partial_2 \rangle = 1,\ \langle \partial_1, \partial_2 \rangle = 0;$$

тем самым

$$ds^2 = e^{-2y}dx^2 + dy^2, \tag{4.1}$$

(сравните с общим выражением в координатах $x_1, x_2: \quad ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx_idx_j$).

Строго математический смысл состоит в том, что dx, dy являются базисными *одноформами* (точнее, полями одно-форм: ведь они заданы в каждой точке).

Л-5

Такие поля обычно рассматриваются в курсе математического анализа (дифференциал функции $y = f(x)$): выражение $dy = f'(x)dx$ является разложением одно-формы dy по (базисному полю) dx, коэффициент в этом разложении равен $f'(x)$, он зависит от точки, вообще говоря. Такие разложения имеют место и в n-мерном случае (например, $dz = 2ydx + 2xdy$ для функции $z(x, y) = 2xy$.) Они аналогичны уже рассмотренным нами разложениям векторных полей по базисным векторным полям. (Поточечно) определено значение формы степени 1 на векторном поле. Например,

$$dx(\partial_1) = 1,\ dx(\partial_2) = 0,\ dy(\partial_1) = 0,\ dy(\partial_2) = 1 \tag{5.1}$$

и требование линейности полностью задают dx, dy как линейные функционалы (действующие на векторных полях). Условие (5.1) называется условием *дуальности.* Вот его $n-$мерный вариант:

$$dx_m(\partial_k) = \delta_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = k \\ 0, & \text{если} \quad m \neq k, \end{cases} \tag{5.2}$$

(базис $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ко-касательного пространства T_x^* дуален базису $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ касательного пространства T_x).

Формы степени один можно перемножать (получая формы степени два). Такая форма нам уже встретилась: в равенстве (4.1) $(dx)dx$ обозначена как dx^2 а коэффициент при $dxdy$ равен нулю. Вот более современный вариант обозначений: не dx_1dx_2, а $dx_1 \otimes dx_2$, **тензорное произведение** двух форм.

Если скалярное произведение положительно определено, то **длина кривой** (заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$) подсчитывается так

$$\int\limits_a^b \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle}\, dt, \quad \dot{x} = \{\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n}\} = \frac{dx}{dt}, \tag{5.3}$$

здесь a, b - начальное и конечное значения параметра t. Можно даже вводить (5.3) в качестве **определения.**

Формулой (4.1) была введена (левоинвариантная) риманова метрика на основной аффинной группе G. В римановом пространстве геодезические могут быть введены как локально-кратчайшие кривые (например, на сфере - это окружности большого радиуса). Можно доказать, что геодезические являются решениями следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^1 \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \\ \qquad \ldots \\ \ddot{x}_n + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^n \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

здесь коэффициенты связности определяются метрикой по формулам

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^n \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right). \tag{5.5}$$

Из этих формул следует свойство $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Если скалярное произведение не является положительно определенным, то (5.4) - это **определение** геодезических.

Вернемся к примеру (4.1).

Упражнение. Найти коэффициенты связности.

(Ответ: $\Gamma^1_{12} = -1, \Gamma^2_{11} = e^{-2y}$, а остальные равны нулю)

Составив систему, (5.4), введя $z = e^y$, получим интеграл

$$z^2 + (x-a)^2 = b \tag{5.6}$$

(с произвольным параметром a и положительным параметром b).

Это уравнение задает верхнюю полуокружность (так как $z > 0$) с центром на (горизонтальной) оси. Получилась модель двумерной плоскости Лобачевского: ее точки есть точки (x, z) с положительным z, ее прямые - полуокружности и вертикальные лучи (с началом на оси x, это особые решения системы). На такой модели легко понять независимость (знаменитого!) пятого постулата геометрии Евклида.

Приведем еще несколько важных понятий определяемых метрикой Пусть даны векторные поля $a = a^m \partial_m$, $y = y^m \partial_m$.

Определение. Ковариантная производная (y по a) - это векторное поле $D_a y$, $i-$компонента которого равна

$$(D_a y)^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_m} a^m + \Gamma^i_{jm} y^j a^m.$$

Определение. *Оператором кривизны* называется (трилинейный) оператор, действующий на векторных полях x, y, z по формуле

$$R_{xy}(z) = D_x(D_y z) - D_y(D_x z) - D_{[x,y]} z,$$

(здесь $[x, y]$ – коммутатор векторных полей).

Компоненты R^i_{jkm} (по отношению к базису векторных полей $e_1, e_2, \ldots, e_m$) определяются из равенств $R_{e_k e_m}(e_j) = R^i_{jkm} e_i$.

Совокупность этих компонент задает тензор типа $\binom{1}{3}$, называемый **тензором кривизны** (или тензором Римана).

Замечание 1. Понятно, что можно выразить эти компоненты через коэффициенты связности. Из получающейся формулы (приводить здесь которую нет необходимости), следует, что если все коэффициенты связности равны нулю (как функции), то и все компоненты тензора кривизны равны нулю (в таком случае говорят, что пространство *плоское.*)

Замечание 2. В (например, ортонормированном) базисе евклидова (или псевдоевклидова) пространства все коэффициенты связности равны нулю (что сразу же следует из формул (5.5)), такие пространства - плоские. Отметим при этом, что в криволинейных координатах (этого же пространства!) часть Γ^i_{jk} отлична от нуля (дело в том, что совокупность Γ^i_{jk} не задает тензор, это так называемый объект связности - с более сложным, нежели тензорный, законом пересчета компонент при переходе от одной системы координат к другой). Компонентны же любого тензора (в том числе и тензора кривизны) остаются нулями (если это были все нули в некоторой исходной системе координат). Поэтому выражение *нулевой тензор* корректно определено.

Определение. *Тензором Риччи* называется *свертка* тензора кривизны (по верхнему и второму нижнему индексам): $R_{jm} = R^i_{jim}$.

У (дважды ковариантного) тензора Риччи можно поднять один индекс (пусть - первый, но это неважно, так как тензор Риччи симметричен): $R^m_k = g^{mi} R_{ik}$.

Получается тензор типа $\binom{1}{1}$ (также называемый тензором Риччи, иногда - *оператором Риччи*; понятно, что тензор кривизны тоже бывает разных типов - у исходного тензора можно верхние индексы опускать, а нижние поднимать).

Определение. *Скалярной кривизной* S (пространства с метрикой) называется функция (точки), равная R^m_m, т.е. это свертка (в данном случае - просто след) оператора Риччи.

Л-6

Напомним цепочку, приведшую нас от метрики g к скалярной кривизне S :

$$g \longrightarrow \Gamma^i_{jk} \longrightarrow R \longrightarrow Ric \longrightarrow S.$$

На первых двух этапах помимо алгебраических операций применялось дифференцирование, два последних были "чисто алгебраическими".

Под **уравнениями Эйнштейна** *общей теории относительности* (ОТО) понимаются равенства

$$Ric - gS/2 = T.$$

В правой части T – это сумма тензора **энергии-натяжения** вещества и тензора энергии-натяжения **электромагнитного поля**. Эти уравнения (если правая часть задана) являются системой дифференциальных уравнений в частных производных (второго порядка) для отыскания метрики g. Тензор $Ric - gS/2$ нередко называют тензором Эйнштейна.

В современной (2005 год) физике считается, что для (правдоподобной, "реалистической") правой части должны выполняться **доминантные энергетические условия** [Kr-80, p.71]. Эти условия состоят в том, что *плотность энергии* (подсчитываемая произвольным *наблюдателем*) должна быть *неотрицательна*, а подсчитываемый наблюдателем вектор $\mathbf{q}$ *потока энергии* должен быть непространственноподобным.

Пояснения. Имеется в виду *мгновенный наблюдатель,* т.е., единичный времениподобный вектор $\mathbf{v}$. Плотностью энергии называется значение $T(\mathbf{v},\mathbf{v})$ тензора T на этом векторе (если же сигнатура метрики выбрана -,+,+,+, то $-T(\mathbf{v},\mathbf{v})$ называется плотностью энергии). Вектор $\mathbf{q}$ равен образу вектора $\mathbf{v}$ под действием оператора T. Лоренцева метрика (даже в одном событии) задает *световой конус* (в касательном пространстве), состоящий из *световых* (иногда говорят: *изотропных*) векторов. *Времениподобные* векторы направлены "внутрь"этого конуса ("вверх"или "вниз"), а *пространственноподобные* - "вбок".

Дальнейшие Ли-алгебраические понятия и методы.

Напомним, что каждый элемент **a** алгебры Ли по формуле $ad_a(b) = [a,b]$ задает линейный оператор ad_a ("ад", от англ. adjoint).

Определение. (Квадратичная) **форма Киллинга** алгебры Ли – это

$$B(x,x) = Tr(ad_x \circ ad_x).$$

По квадратичной форме определяется соответствующая симметричная билинейная форма. Она может быть задана как $Tr(ad_x \circ ad_y)$, след композиции.

Пример. Алгебра Ли sl(2,R) (она изоморфна su(1,1)).

$[e_1,e_2] = -e_3, [e_2,e_3] = e_1, [e_3,e_1] = e_2.$

$$ad_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, ad_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ad_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ad_x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$B(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2.$

Замечание. Были использованы следующие обозначения и соглашения

$ad_i = ad_{e_i}$, $ad_x = x^i ad_i = x^1 ad_1 + x^2 ad_2 + x^3 ad_3$.

Получилась (невырожденная, диагональная) матрица $g = [g_{ij}] = diag\{2,2,-2\}$.

Напомним что (линейный) оператор U называется *кососимметричным* (по отношению к форме $\langle\cdot,\cdot\rangle$), если $\langle a, Ub\rangle + \langle Ua, b\rangle = 0$, $\forall a, \forall b$.

Опр. Форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли называется **инвариантной,** если

$$\langle a,[b,c]\rangle + \langle [b,a],c\rangle = 0$$

каковы бы ни были векторы a,b,c(другими словами, все операторы $U = ad_b$ кососимметричны).

Замечание. Если на группе Ли вводится левоинвариантная метрика g, исходя из инвариантной формы на алгебре Ли, то g оказывается и правоинвариантной (т.е., такая g – *би-инвариантна*). Значение в единице оператора кривизны подсчитывается *алгебраически* ([Mi-76, c.105]):

$$R_{xy} = (1/4)ad_{[x,y]}.$$

Теорема. Форма Киллинга инвариантна.

Еще несколько **определений**: алгебра Ли *проста*, если она неабелева и не содержит нетривиальных идеалов; алгебра Ли *полупроста*, если она является прямой суммой простых алгебр; алгебра Ли *компактна*, если ее форма Киллинга знакоопределена.

Примеры *в малых размерностях.*

$Dim = 1$: абелева; $dim = 2$: абелева и $[e_2, e_1] = e_1$; ясно, что e_1 порождает идеал; $dim = 3$: есть две простые алгебры Ли – $su(1,1)$ (она же $sl(2,R)$), некомпактна; $su(2)$ (она же $so(3)$) – компактна; $dim = 4$: простых алгебр нет (форма Киллинга всегда вырождена).

Теорема. Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.

Замечание. Общая *структурная теория* (и классификация) алгебр Ли весьма сложна (кроме того, не для всех классов алгебр Ли она завершена). Приведем еще один элемент этой теории.

Упражнение. Пусть L, V – алгебры Ли (одинаковой размерности). Если найдется такой вектор a в L и такое собственное число h оператора ad_a, что h не является собственным числом ни для какого оператора ad_v в V, то L, V не изоморфны.

Это соображение может быть применено в том случае, когда (более простой) метод сравнения центральных рядов "не срабатывает".

Пример. Основная аффинная алгебра Ли L (размерности 3) не изоморфна алгебре Ли V группы движений евклидовой плоскости. V задается соотношениями $[e_1, e_3] = e_2$, $[e_3, e_2] = e_1$ (соответствующие векторные поля, генерирующие параллельные переносы и евклидовы повороты, равны

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_y - y\partial_x.$$

Мир Минковского как аффинное пространство-время.

Напомним, что под *миром Минковского* можно понимать четырехмерное векторное пространство M со скалярным произведением $\langle ., . \rangle$ лоренцевой сигнатуры (например, -,+,+,+). Тем самым, в некотором базисе (называемом *ортонормированным*) значение такого *(лоренцева)* скалярного произведения на векторах $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ равно

$$\langle v, w \rangle = -v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Замечание. Правильнее считать, что M является *аффинным*, а не векторным пространством. Это очень близкие понятия: в аффинном нет выделенных элементов (что более естественно с точки зрения физической интерпретации: все события равноправны). Вот строгое

Определение. Пусть дано векторное пространство V. Множество W называется аффинным пространством (исходное V называется линейным пространством, *ассоциированным с* W), если (абелева группа) V действует на W свободно и транзитивно (см. Л-3).

Мы уже знаем, что совокупность событий представима поверхностью (четырехмерной), а векторы (на поверхности) принадлежат касательным пространствам в соответствующих точках ("событиях"). Такое представление следует иметь в виду уже в случае (плоского, т.е. с равным нулю тензором кривизны) аффинного мира

Минковского. Даже в этом простейшем случае правильнее не отождествлять касательные пространства (состоящие из векторов) с самим пространством-временем (состоящим из точек, "событий").

Элементы хронометрической теории И. Сигала.

Ирвинг Сигал (США, 1918-1998) был одним из крупнейших математиков двадцатого столетия (см.[AMS-99] и [JFA-02]). После Второй Мировой войны он провел два года в Принстоне, где был в первый раз (этих наград у него три) награжден премией Гуггенхайма. Среди прочих отличий - избрание в Национальную Академию (США) в 1973 году и награждение Премией Гумбольдта в 1981. В Чикагском университете (1948-1960) под его руководством защитилось пятнадцать человек (речь идет о PhD, в США нет двухступенчатой системы диссертаций), а в Эм-Ай-Ти (это знаменитая Массачусеттская Техноложка), начиная с 1960 года, защитили диссертации двадцать пять его студентов. Из [AMS-99, сс.658-659]: "Сигал считал, что вселенная адекватно моделируется универсальной накрывающей конформной компактификации D мира Минковского M. Его следование этой идее было страстным и исключительно плодотворным (более 120 статей по хронометрии, многие из них были опубликованы ведущими математическими, физическими и астрономическими журналами; примеч. авторов)... Почему же эта его деятельность до сих пор недостаточно замечена? Отчасти - из-за бескомпромиссности (и даже "боевитости") научных дискуссий Сигала. Но велика и "заслуга"специалистов в космологии и теории частиц: они упорно стараются удержать свои "позиции"... Значимость хронометрической деятельности Сигала смогут оценить лишь будущие поколения."

Эрмитова модель мира Минковского и отображение Кэли.

В физике хорошо известны матрицы Паули $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, см. лекцию 4. С их помощью (векторный) мир Минковского M представим в виде совокупности всех два на два эрмитовых матриц $h = x^0\sigma_0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3$; (тогда ih - косоэрмитова). Совокупность всех косоэрмитовых матриц является (введенной в лекции 4) алгеброй Ли $u(2)$. Экспоненты этих матриц порождают группу $U(2)$. Можно использовать и другие отображения для перехода от матричной алгебры Ли к соответствующей группе Ли:

Определение. *Отображение Кэли* действует по формуле

$$\mathbf{c}(h) = (1 + ih/2)(1 - ih/2)^{-1}.$$

Упражнение. Доказать, что определитель матрицы $1 - ih/2$ не равен нулю (тем самым, отображение Кэли определено на всем мире Минковского M).

Известно что образ $\mathbf{c}(M)$ является открытым плотным подмножеством U(2).

Л-7

Мир Минковского M вложен в $D = U(2)$ (см. предыдущую лекцию). На группе Ли D можно так ввести биинвариантную метрику, что отображение Кэли будет конформно. Именно такой выбор сделан в работах Сигала с соавторами. Можно сказать, что отображение Кэли переносит из M в D конформную структуру.

Напомним что, отображение f одного (риманового или псевдориманового) пространства в другое называется **конформным,** если $\langle f_* a, f_* b\rangle = h\,\langle a, b\rangle$.

Здесь (всюду положительная) функция h может зависеть лишь от точки x (но не от выбора векторов в данной точке). Если $h(x) = const$, то это *гомотетия (дилатация);* если $h(x)$ равна единице (во всех точках), то такое f называется *изометрией* (если речь идет о преобразовании одного пространства, то можно использовать термин *движение*).

С точки зрения *причинности,* необходимо перейти от (компактного) мира D к его универсальной накрывающей $\tilde{D}$ (с топологией цилиндра $R^1 \times S^3$ над сферой $S^3 = SU(2)$). Дело в том, что в компактном пространстве-времени всегда имеется т.н. *машина времени* (т.е., направленная в будущее кривая, возвращающаяся в свое начальное событие).

Совокупность всех направленных в будущее времениподобных кривых (исходяших из единицы группы $\tilde{D}$) образует полугруппу (т.е., множество замкнутое относительно умножения). Применяя левый (или правый – ведь метрика биинвариантна!) сдвиг получаем множество J_x^+ – причинное будущее события x

Причинная структура мира $\tilde{D}$– это семейство $\{J_x^+ : x \in \tilde{D}\}$ (в специальной теории относительности причинная структура мира M вводится как семейство причинных конусов $\{K_x^+\}$). Можно догадаться, что отображение Кэли переводит одну причинную структуру в другую: $\mathbf{c}(K_x^+) = \mathbf{J}^+_{\mathbf{c}(x)}$ при всех x из M.

Важна следующая

Теорема. Пусть q - преобразование мира $\tilde{D}$. Если $q(J_x^+) = J^+_{q(x)}$ при всех x из $\tilde{D}$, то преобразование q конформно. Любое конформное преобразование мира $\tilde{D}$ сохраняет его причинную структуру.

Понятно, что совокупность всех конформных преобразований мира $\tilde{D}$ образует группу. Эту группу Ли будем обозначать G. Известно, что $L(G) = su(2,2)$. Эти (и другие) детали будут приведены ниже. Интересно, что в мире Минковского не все (локальные) конформные преобразования определены глобально. Замечательным свойством мира D является глобальная определенность всех конформных преобразований. Иногда говорят так: конформная группа действует в D глобально. В M она действует с сингулярностями.

При классификации *частиц и взаимодействий* мира $\tilde{D}$ часть математических конструкций можно осуществлять в (компактном) пространстве-времени $U(2) = D$. Затем эти конструкции *поднимаются* (это строгий математический термин) на $\tilde{D}$. Примером является конформное действие. Введем его на D.

Определение. Группой $G = SU(2,2)$ называется совокупность всех таких четыре на четыре матриц g (с блочной структурой)

$$g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

что блоки A, B, C, D являются два на два матрицами с (вообще говоря) комплексными элементами, при этом $\det g = 1$, $A^*A - C^*C = 1$, $B^*B - D^*D = -1$, $A^*B = C^*D$.

Вот действие такого g на элемент z мира $U(2)$:

$$gz = (Az + B)(Cz + D)^{-1}. \tag{7.2}$$

Можно доказать (используя условия (7.1) и принадлежность матрицы z унитарной группе), что при любых g и z формула (7.2) задает элемент из $D = U(2)$. Кроме того, все преобразования (7.2) являются конформными (по отношению к вышеупомянутой биинвариантной метрике на D).

Еще одной важной (вещественной) группой Ли является $SL(2, C)$ – совокупность всех два на два (комплексных) матриц с единичным определителем. Она является универсальной накрывающей группы Лоренца (точнее, ее компоненты единицы). Это (двулистное) накрытие не приводится, так как в контексте нашего изложения можно считать, что $SL(2, C)$ и есть *группа Лоренца* Λ_0. Она шестимерна. Если допустить положительный множитель, то получается группа Λ размерности 7 (т.н. *расширенная группа Лоренца*) с общим элементом $S = e^{t/2}L$ (здесь $t \in R$, $L \in SL(2, C)$). Такой множитель соответствует гомотетии.

Зафиксируем следующее действие группы Λ на (эрмитовом) мире Минковского M :

$$x \to e^t L x L^*. \tag{7.3}$$

Расширенной группой Пуанкаре P называется полупрямое произведение Λ и векторной группы M. Если (S, f) и (T, h) – элементы P, то их произведение равно $(ST, S(h) + f)$. Здесь $S(h)$ задается формулой (7.3). В терминах этих обозначений введем и действие группы P на M :

$$x \to SxS^* + f. \tag{7.4}$$

Стандартной группой современной (2005 год) теоретической физики является (десятимерная) группа Пуанкаре P_0 (она является подгруппой группы P, получающейся при наличии лишь единичного множителя). В рамках хронометрии, P изоморфна совокупности всех преобразований (7.2), которые переводят элемент минус единица в себя (т.н. *стационарная подгруппа*).

Значение следующего утверждения состоит, в частности, в том, что рассмотрение $D = U(2)$ (вместо начального векторного M) не приводит к потере исходной "Пуанкаре-информации".

Теорема. Существует единственный изоморфизм b из P в $G = SU(2, 2)$ с условием

$$b(g)\mathbf{c}(h) = \mathbf{c}(g(h)), \tag{7.5}$$

здесь h - из M, а $\mathbf{c}$ - это отображение Кэли.

Пояснение. В равенстве (7.5) $g(h)$ задается формулой (7.4), а слева имеется в виду дробно-линейное действие (7.2).

Л-8

Зафиксируем базис $\mathbf{L_{ij}}$ (всегда $\mathbf{L_{ji}} = -\mathbf{L_{ij}}$) в алгебре Ли $su(2,2)$. Таблица коммутационных соотношений такова:

$$[\mathbf{L_{im}}, \mathbf{L_{mk}},] = -\mathbf{e_m}\mathbf{L_{ik}}, \tag{8.1}$$

здесь индексы i, m, j, k принимают целые значения от -1 до 4, а $e_{-1} = e_0 = 1$, $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = -1$. Ясно, что размерность алгебры равна 15. Так как $G = SU(2,2)$ – матричная, то и $\{\mathbf{L_{ij}}\}$ являются матрицами (они приводятся в нескольких текстах).

Так как задано действие группы G на D, то каждый вектор $\mathbf{L_{ij}}$ порождает векторное поле. Оно обозначается L_{ij}, нежирный шрифт. Чтобы найти его значение на функции f в z, надо продифференцировать $f(g^{-1}z)$ по t, при $t = 0$. Здесь $g = exp(t\mathbf{L_{ij}})$– экспонента от матрицы. Если составить таблицу коммутационных соотношений для этих векторных полей, то правые части получаются противоположными по сравнению с (8.1):

$$[L_{im}, L_{mk},] = e_m L_{ik}, \tag{8.2}$$

Заметим, что $U(2)$ не является прямым произведением центральной подгруппы и $SU(2)$. В этом смысле двулистная накрывающая (группа $S^1 \times SU(2)$) устроена проще. Фиксируется накрытие, переводящее пару (e^{it}, V) в матрицу $e^{it}V$, здесь V - из $SU(2)$. В работах Сигала $S^1 \times SU(2)$ параметризуется (избыточными) координатами $u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 : \ u_{-1}^2 + u_0^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$.

Действие группы G на $U(2)$ можно поднять до действия на $S^1 \times SU(2) = D^{(2)}$. В частности, в одной из таблиц все векторные поля L_{ij} на $D^{(2)}$ найдены как линейные комбинации *левоинвариантных* векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3; эти базисные поля выбраны следующим образом:

$$X_0 = L_{-10},\ X_1 = L_{14} - L_{23},\ X_2 = L_{24} - L_{31},\ X_3 = L_{34} - L_{12}. \tag{8.3}$$

Так как мир Минковского M вложен и в $D^{(2)}$, то генераторы T_0, T_1, T_2, T_3 параллельных переносов могут быть выражены через X_0, X_1, X_2, X_3 и, конечно же, через L_{ij} :

$$T_0 = \frac{1}{2}(L_{-10} + L_{04}),\ T_1 = \frac{1}{2}(L_{-11} + L_{14}),\ T_2 = \frac{1}{2}(L_{-12} + L_{24}),\ T_3 = \frac{1}{2}(L_{-13} + L_{34}).$$

Элементы теории представлений.

Определение. Линейное (конечномерное) *представление* группы G - это ее гомоморфизм U в группу $GL_n(R)$ или $GL_n(C)$. Представление называется *точным,* если U- инъекция.

Тем самым, если представление точное, то исходная группа реализуется как некоторая совокупность линейных операторов (обозначаемых $U_g : g \in G$), действующих в фиксированном векторном пространстве L (называемом *пространством представления*). Пространство L может не быть конечномерным (для представлений, не являющихся конечномерными).

Определение. Представления U, V называются *эквивалентными,* если существует такой изоморфизм Q пространств этих представлений, что

$$V_g = QU_gQ^{-1}, \forall g \in G. \tag{8.4}$$

Определение. Если (замкнутое) подпространство L_1 содержится в L и $U_g(L_1) \subset L_1$ при всех g из G, то L_1- называется *инвариантным подпространством*, а сужение U_1 представления U с L до L_1 называется *подпредставлением.*

Определение. Если такое L_1 существует, то исходное L называется *приводимым.* Иначе - *неприводимым.*

Определение. Если такое L_1 существует, то в фактор-пространстве L/L_1 можно задать *фактор-представление.* Оно действует по формуле

$$f_g(a + L_1) = U_g(a) + L_1. \tag{8.5}$$

Напомним, что фактор-пространство L/L_1 это $\{a + L_1 : a \in L\}$.

Определение. Прямой суммой $U = U_1 \oplus U_2$ представлений U_1 и U_2 называется представление U действующее в $L_1 \oplus L_2$ по формуле

$$U_g(l_1, l_2) = (U_{1g}(l_1), U_{2g}(l_2)). \tag{8.6}$$

Упражнение. В таком случае, U/U_1 эквивалентно U_2.

Определение. Представление называется *вполне приводимым,* если для любого инвариантного подпространства найдется инвариантное дополнение.

Определение. Если в (комплексном) пространстве представления U имеется (эрмитово) скалярное произведение, относительно которого все операторы U_g унитарны, то представление называется **унитарным.**

Пример. $G = R$, $\dim L = 2$,

$$U_g = \begin{bmatrix} e^{ikg} & \lambda(e^{ikg} - e^{i\tilde{k}g}) \\ 0 & e^{i\tilde{k}g} \end{bmatrix}.$$

Здесь $k, \tilde{k}$ – вещественные постоянные, а постоянная λ может быть и комплексным числом. Ясно, что подпространство $\{x : x_2 = 0\}$ инвариантно. Подпредставление U_1 действует по формуле: $U_{1g}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikg}x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Фактор-представление таково:$f_g\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ e^{i\tilde{k}g}x_2 \end{bmatrix}$.

Ограничимся случаем $\lambda = 0$, наделяем наше L эрмитовым скалярным произведением $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$. Ясно, что наше представление – унитарно.

Введем $U_2 : U_{2g}\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\tilde{k}g}x_2 \end{bmatrix}$. Делаем вывод, что $f \cong U_2$, а $U = U_1 \oplus U_2$.

Л-9

Понятие *параллелизации* расслоения над пространством-временем является важным элементом хронометрического подхода. Напомним в связи с этим несколько положений квантовой механики (в ее современном изложении).

Элементы квантовой механики

Каждому объекту сопоставляется его *состояние* (часто называемое *волновой функцией,* но этот последний термин целесообразнее употреблять в более специализированной ситуации, а именно - ПОСЛЕ параллелизации). Если в качестве объекта рассматривается *элементарная частица* (см. следующую лекцию), живущая в некотором мире W, то совокупность ее возможных состояний является вполне определенным подпространством множества сечений (бесконечно дифференцируемых, суммируемых с квадратом и т.д. - в данном случае нет необходимости уточнять эти детали) некоторого векторного расслоения с базой W. На этой стадии состояния еще не принимают числовых (для *скалярной* частицы) или векторных (для частиц ненулевого *спина*) значений. Необходим переход от "абстрактных"сечений к *параллелизованным сечениям* (т.е., к волновым функциям). Затем вводится структура *гильбертова пространства. Наблюдаемые* детализируются как действующие в этом пространстве операторы и т.д. (см. простейший пример, приводимый в лекции 10). Процедура параллелизации во многом определяется выбором параллелизующей (четырехмерной) подгруппы N в группе G. Здесь $G-$ это основная группа симметрии мира W. Начиная с этого этапа, N как бы заменяет исходный мир событий (типичная ситуация состоит в том, что группа N является конечнолистным накрытием мира W; см. $dim = 1$ пример уже в этой лекции, роль N будет играть максимальная компактная подгруппа K).

Во второй половине двадцатого столетия основополагающим способом моделирования элементарных частиц и их взаимодействий (в рамках теоретической физики) стал метод *индуцирования.* Процитируем И. Сигала ([Se-86, с.133], пер. авт.): "Главным философским итогом этой деятельности является, возможно, вывод о том, что индуцированные представления не просто важны сами по себе; дело в том, что они определяют и действия (соответствующих групп, примеч. авт.) в однородных векторных расслоениях. Тем самым, возникает пространственно-временная маркировка состояний в пространстве представления, что совершенно небходимо при рассмотрении локальных нелинейных взаимодействий и, соответственно, для построений связанных с причинностью. Хотя неприязнь и сопротивление группенпесту ("Gruppenpest", т.е., подходу, базирующемуся на теории групп, примеч. авт.) со стороны практической физики продолжались несколько десятилетий, но недавно она сдалась (it has surrendered)..."

Отметим также, что весьма эффективным является Ли-алгебраическое (а не Ли-групповое) рассмотрение. Такая эффективность имеет место в случае представлений произвольных групп Ли.

В рамках стандартной теоретической физики $G-$ это (десятимерная) группа Пуанкаре, а в качестве параллелизующей подгруппы практически всегда (зачастую - "по умолчанию") выбиралась векторная группа мира Минковского M. Проблемы выбора параллелизации не возникало еще и потому, что рассмотрение начиналось с волновых функций (т.е., с параллелизованных сечений, см. выше). Индуцирование проводилось по подгруппе Лоренца (такой подход был заявлен знаменитой статьей Ю. Вигнера [Wi-39]).

Важность параллелизации отмечается, например, в [PaSe-82a]. На сс. 98-116 этой статьи сформулирован и доказан ряд как общих, так и хронометрических теорем. В дальнейших работах группы Сигала использовалась лишь одна из параллелизаций, основанных на мире D ("left curved parallelization"). Иногда она сравнивалась с плоской параллелизацией (определяемой векторной группой мира M).

Индуцированное расслоение: на пространстве его сечений задается **индуцированное представление.**

Пусть задана замкнутая подгруппа H группы G. Тогда определено фактор-пространство $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ (конечно, $gH = \{gh : h \in H\}$).

Должно быть задано (иначе конструкция еще не может быть реализована), линейное представление R подгруппы H в конечномерном векторном пространстве F. Вектор $R_h(f)$ обозначаем просто hf. Это т.н. индуцирующее ("затравочное"или "спиновое") представление. Будет построено **индуцированное** представление группы G, это т.н. индуцирование по Макки.

В прямом произведении $G \times F$ введем следующее отношение эквивалентности $\sim$: $(g, f) \sim (gh^{-1}, hf), \quad h \in H.$

Множество $E = (G \times F)/ \sim$, иначе обозначаемое $G \times_H F$, будет пространством *ассоциированного* расслоения с базой X. (Между прочим, $G \to G/H$ является примером *главного расслоения* - оно, как правило, не является векторным). Проекция π индуцированного расслоения задается условием коммутативности следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G \times F & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ E & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

Проекции α, π_1 и π_2 являются каноническими. Всегда слоем этого расслоения является пространство, изоморфное исходному F (поэтому говорят, что E является расслоением с *типовым слоем* F).

Введем в пространстве E (левое) действие группы G :

$$\begin{array}{ccc} (g, f) & \xrightarrow{g_1} & (g_1 g, f) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \pi_1(g, f) & \xrightarrow{g_1} & \pi_1(g_1 g, f). \end{array}$$

Действие однозначно задается условием коммутативности этой диаграммы. И, наконец, вот каково значение в x (т.е. точка в слое над x) преобразованного сечения $U_g(s)$: $(U_g s)(x) = gs(g^{-1}x)$ (здесь s - исходное сечение; другими словами g^{-1} действует на аргумент, а g действует "снаружи", на "зависимую переменную", - по только что введенной формуле). Внутреннее же действие - каноническое действие на фактор-пространстве.

Замечание. В работе [PaSe-82a] осуществлен переход к т.н. "параллелизованным"сечениям. Такие сечения принимают значения в пространстве

F затравочного представления. Не вдаваясь в другие детали, приведем формулу "параллелизованного действия"(т.е. индуцированного действия на параллелизованных сечениях): $(U_g s)(k) = R_{g*}s(\varphi(g^{-1})k),\ k \in N$.

Для параллелизаций из определенного класса, элемент g^* таков: $g^* = x_0 k^{-1} g(\varphi(g^{-1})k)x_0^{-1}$, здесь x_0 - фиксированный элемент из N, а через φ обозначено некоторое действие группы G на параллелизующей подгруппе N. Другими словами, g^* есть произведение пяти элементов в G. Необходимо иметь в виду, что могут выбираться разные параллелизующие группы (они должны быть подгруппами G). Такой элемент g^* всегда попадает в H.

Пример. Рассмотрим

$$G = SU(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : D = \bar{A},\, C = \bar{B},\, AD - BC = 1 \right\}.$$

Известно, что G изоморфна группе $SL(2,R)$. Максимальная компактная подгруппа K в $G : K = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} :\mid z \mid = 1 \right\}$.

Зафиксируем накрытие $z \longrightarrow q = z^2$. На окружности $S^1 = \{q\}$ введем (дробно-линейное) действие группы $G : q \xrightarrow{g} (Aq+B)(Cq+D)^{-1}$. Обозначим через H стационарную подгруппу точки -1 из S^1: $H = \{g \in G : g(-1) = -1\}$. H может быть определена и как множество всех тех элементнов g из группы G, результат сопряжения которых матрицей $\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ является верхне-треугольной матрицей: $H = \{g \in G :\ \ \Omega^{-1} g \Omega \ \text{ верхне-треугольна}\}$.

Упр. Элемент $g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ группы G принадлежит $H \Leftrightarrow ImA = ImB$ (равенство мнимых частей двух комплексных чисел).

Упр. Множество H равно обьединению H_0 и $-H_0$; т.е.$-H_0$ получается из H_0 умножением на -1; здесь H_0 содержит $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Замечание. H_0 является компонентной единицы (группы H.)

Упр.

$$H_0 = \left\{ (t,p) = \begin{bmatrix} 1 + it/4 & it/4 \\ -it/4 & 1 - it/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch & -sh \\ -sh & ch \end{bmatrix}, \quad -\infty < t, p < \infty \right\},$$

здесь $ch = cosh\frac{p}{2}$, $sh = sinh\frac{p}{2}$.

Упр. Если рассматривать G как поверхность в четырехмерном пространстве $\mathbf{R^4}$, то $G : x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 1$.

Пояснение.Точка из $\mathbf{R^4}$ есть (x,y,u,v); зафиксируем следующую взаимосвязь таких четырех вещественных чисел с комплексными (введенными выше) числами: A, B, C, B : $A = x + iy$, $B = u + iv$. Тогда H есть гиперболический цилиндр.

В реальной физической ситуации (когда размерность мира $\mathbf{D}$ равна 4), Сигалом и Панайтцем была введена левая D-параллелизация и правая D -параллелизация. В нашем случае размерность "мира событий"$\mathbf{D}$ равна 1 (имеется лишь "время"), поэтому есть лишь одна $D-$параллелизация (нет различия меду "левой"и "правой"параллелизациями, так как "параллелизующая"группа коммутативна).

Упр. Разложение $g = kh$ в группе G однозначно (здесь $k \in K$, $h \in H_0$).

Замечание. Получается, что G является прямым произведением K и H_0 (но это лишь топологически: с точки зрения групповой операции G *не является прямым произведением* своих подгрупп K, H_0).

Воспроизведем конструкцию индуцированного представления с базой G/H_0. Общий элемент базы обозначаем k. Не будем пока конкретизировать затравочное представление R, а ограничимся отысканием элемента g^*.

Л-10

$$\begin{array}{ccc} G\times F & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \pi_1\downarrow & & \pi_2\downarrow \\ E & \xrightarrow{\Pi} & G/H_0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (g,\tilde f) & \xrightarrow{\alpha} & g=kh \\ \pi_1\downarrow & & \pi_2\downarrow \\ (k,f) & \xrightarrow{\Pi} & k \end{array}$$

Тем самым, в нашем индуцированном расслоении выбрана *тривиализация.* Отметим, что $f = q\tilde f$, так как $[(g,\tilde f)] = \{(gq^{-1}, q\tilde f) : q \in H_0\}$.

Другими словами, пара (k, f) выбрана представителем класса $[(g,\tilde f)]$.

А вот как конкретизируется действие в пространстве E индуцированного расслоения:

$$\begin{array}{ccc} (g,\tilde f) & \xrightarrow{g_1} & (g_1 g,\tilde f) \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ (k,f) & \xrightarrow{g_1} & (k_{g_1 g}, v) \end{array}$$

Пояснения. Через k_g, h_g обозначены соответствующие компоненты (они определяются однозначно) в разложении $g = kh$. Кроме того,

$$v = h_{g_1 g}\tilde f = h_{g_1 g}(h_g^{-1} f).$$

Формула индуцированного представления (для параллелизованных сечений) такова:

$$U_g(s)(k) = R_{g^*}S(g^{-1}k).$$

Здесь R - индуцирующее (конечномерное) представление в F, элемент $g*$ подгруппы H_0 определяется по g и k. В нашем примере применима формула из [PaSe-82a]:

$$g^* = x_0 k^{-1} g(g^{-1}k) x_0^{-1} = x_0 k^{-1} g\tilde{k} x_0^{-1}.$$

Здесь в круглых скобках подразумевается вышеупомянутое $G-$действие на группе K. Оно является подъемом дробно-линейного $G-$действия на G/H, а K является двулистной накрывающей пространства G/H. В работах группы Сигала элемент x_0 был выбран таким:

$$x_0 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Если через $\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \bar{w} \end{bmatrix}$ обозначить $g^{-1}k$, через $\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}$ обозначить k и взять $g = \begin{bmatrix} ch & -sh \\ -sh & ch \end{bmatrix}$, то $g^* = \begin{bmatrix} w\bar{z}ch & -\bar{w}\bar{z}sh \\ -wzsh & \bar{w}zch \end{bmatrix}$.

Скалярное расслоение над $\dim = 1$ **миром и построение гильбертова пространства.**

Формальные обозначения генераторов группы $G = SU(1,1)$ оставляем теми же (см. Лекцию 8), но теперь индексы i, k, m принимают лишь три значения: $-1, 0, 4$. В частности, L_{-10} генерирует время, $S = -L_{-14}$ порождает масштабные преобразования ("скейлинг").

Если выбран вектор $\mathbf{L}$, то $g(t) = \exp(t\mathbf{L})$ - это элемент соответствующей однопараметрической подгруппы. Если выбрано представление группы G, то определена и однопараметрическая подгруппа операторов в пространстве этого представления. Оставим обозначение $g(t)$ для такого оператора. Его производная по t, при $t = 0$, является представлением исходного вектора $\mathbf{L}$. Другими словами, каждый вектор из алгебры Ли представлен линейным оператором в пространстве представления (которое наделяется структурой гильбертова пространства, см. ниже).

В работе [OrSe-89] (полный список работ Сигала, приведен в [JFA-02]) через θ обозначена координата на окружности S^1 (см. лекцию 9). Именно, $z = e^{i\theta}$, а через b_n обозначается функция $e^{in\theta}$. Если n принимает все целые значения, то получается базис пространства всех C^∞ - функций на S^1; если же n принимает все полуцелые значения, то получается базис пространства всех C^∞ -функций на максимальной компактной подгруппе K, двулистной накрывающей для S^1.

Индуцирующее представление таково: $R_h = e^{pw}$; здесь h принадлежит стационарной подгруппе точки $-1, w$ - фиксированное вещественное число. Таким образом, R_h есть оператор умножения (на число e^{pw}) в одномерном комплексном пространстве F индуцирующего представления. Получающееся индуцированное представление группы $G = SU(1,1)$ называется *скалярным* представлением *веса w*.

Теорема (см. $[OrSe - 89]$). Пусть $w = 1/2$, а базой расслоения является K. Получающееся представление является прямой суммой R^+ и R^-, порождаемых векторами b_n с положительными (соответственно: отрицательными) полуцелыми n. Представления R^+, R^- неприводимы.

Доказательство. Оно использует так называемый $K-$конечный базис, позволяющий вести Ли-алгебраическое (вместо Ли-группового) рассмотрение. Генератор времени T (в литературе его нередко называют *гамильтонианом*), т.е. образ вектора $\mathbf{L_{-10}}$, есть $-i\partial_\theta$. Ясно, что $Tb_n = nb_n$. Дилатация представлена оператором $S = \sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$.

Получается что $Sb_n = \frac{1}{4}(2n+1)b_{n+1} - \frac{1}{4}(2n-1)b_{n-1}$.

Так как эти два оператора порождают алгебру Ли $L = su(1,1)$, то достаточно проверить инвариантность пространств R^+, R^- относительно этих двух операторов (и отсутствие меньших инвариантных подпрстранств). Оба утверждения следуют из приведенного закона действия операторов T и S. Отметим, что спектр гамильтониана ограничен (с одной стороны) на каждом из этих подпространств (такое свойство называется *стабильностью* представления). Вот как можно ввести унитарную структуру в каждом из (двух) неприводимых подпространств: потребуем, чтобы базис $\{b_n\}$ был ортонормированным. Этим условием мы ввели эрмитовы скалярные произведения. Операторы T и S - косоэрмитовы. Этими данными (над универсальной накрывающей) определяется гильбертово пространство $L_2(-\infty, \infty)$. Это т.н. гильбертово пространство *свободной* (в данном случае - скалярной) *частицы.* Далее применяется аппарат стандартной квантовой механики (с соответствующей физической интерпретацией, которая, конечно, была бы более уместна в $\dim = 4$, а не в нашей $\dim = 1$ ситуации).

Л-11

Элементы $DLF-$теории.

Под $DLF-$теорией понимается конструкция, рассматривающая вместо мира Минковского M сразу тройку миров. Эта теория (с наименее разработанной $LF-$частью) является развитием хронометрии Сигала, основанной на (введенном выше) пространстве-времени D. Миры L и F будут введены ниже.

Следующий результат хорошо известен [Mi-76]:

Теорема 1. Метрика на группе Ли биинвариантна тогда и только тогда, когда (соответствующая) форма в алгебре Ли инвариантна.

Замечание 1. Инвариантная невырожденная форма в простой алгебре Ли пропорциональна форме Киллинга.

Теорема 2. В размерности 4 существуют ровно три некоммутативные алгебры Ли, допускающие невырожденную инвариантную форму лоренцевой сигнатуры: $d = u(2), f = u(1,1), l = osc$.

Определение. Алгебра Ли называется **редуктивной**, если она является прямой суммой простой и абелевой алгебр Ли.

Замечание 2. Первые два случая теоремы 2 хорошо известны (не существует других четырехмерных редуктивных алгебр Ли). Несколько неожиданно было найти в этом списке разрешимую алгебру, т.н. *осцилляторную.* Формально, она определена следующими коммутационными соотношениями: $[l_2, l_3] = l_1, [l_2, l_4] = l_3, [l_4, l_3] = l_2$.

Замечание 3. Одним из ключевых положений как хронометрии, так и $DLF-$теории, является отсутствие выделенной метрики (зафиксирована лишь конформная структура).

Мир D (в его компактном варианте) был уже введен как группа $U(2)$ с биинвариантной метрикой (эта метрика определяет конформный класс). Миры L, F могут быть рассмотрены по-отдельности. Важно, однако, их *единство с* D, которое математически реализуется следующим образом: L и F являются открытыми подмножествами в D (как и ранее рассмотренный M). В этом смысле, все четыре мира задают (локально) одну и ту же систему световых конусов. Ключевой этап доказательства состоит в реализации соответствующей алгебры Ли как некоторой подалгебры конформной алгебры (см. лекцию 8, где приведена такая реализация абелевой алгебры, соответствующей миру M).

Мир F определяется ортонормированным репером H_0, H_1, H_2, H_3 на $U(2)$. Здесь $H_0 = L_{-10} - L_{12}, H_1 = L_{10} - L_{-12}, H_2 = L_{02} - L_{11}, H_3 = L_{34}$. Нетрудно проверить что эти четыре векторных поля задают $u(1,1)-$подалгебру в $su(2,2)$.

Чтобы задать пространство-время L, приведем следующую реализацию осцилляторной алгебры Ли:

$$\begin{aligned} &l_1 = L_{-10} + L_{04} + L_{-11} + L_{14}, \quad &2l_2 = L_{-12} + L_{24} + 2L_{03} + 2L_{31}, \\ &2l_3 = L_{-13} + L_{34} + 2L_{02} + 2L_{12}, \quad &8l_4 = 3L_{04} + 5L_{14} - 5L_{-10} - 3L_{-11}. \end{aligned}$$

Задаем инвариантную форму матрицей

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратите внимание на другую (по сравнению с тремя предыдущими случаями) индексацию базисных векторов.

В работе [Le-03] доказано, что в нейтральном элементе группы D (который соответствует началу координат мира Минковского) световой конус является общим для всех четырех миров. Действие (дробно-линейное) является одним и тем же (ведь генераторы всех четырех групп являются линейными комбинациями L_{ij} с постоянными коэффициентами). Вот почему и поле конусов над некоторой открытой областью в $U(2)$ одно и то же (ведь полная система конусов инвариантна относительно дробно- линейного действия конформной группы на D).

Одному из авторов (А.Л.) нередко задавались вопросы типа: "Какой же из этих миров самый "правильный"?Если они в значительной степени равноправны, то как осуществляется "переход"от одного к другому?В каком же мире мы живем?"

Эти темы обсуждаются в последнем разделе (лекция 12; см. также лекцию 9), а данную лекцию завершают

Вычисления кривизны биинвариантных метрик.

В литературе по-разному выбираются сигнатура метрики и тензор кривизны псевдоримановых пространств. Эти различия могут приводить к противоположным по знаку (тем или иным) показателям кривизны.

По кривизне будем использовать соглашения $[Mi-76]$ (они были приведены в лекциях 5, 6). Сигнатуру метрики оставляем ту же, что в работах Сигала: $+,-,-,-$.

Для интересующего нас случая двусторонне-инвариантных метрик на группах Ли преобразование кривизны совпадает с $(1/4)ad_{[x,y]}$; здесь x, y - элементы алгебры Ли (в зависимости от контекста под x, y могут также пониматься левоинвариантные векторные поля на соответствующей группе). Пусть x_0, x_1, x_2, x_3 – ортонормированный базис в алгебре Ли. Тогда компонента R°_{kij} тензора кривизны равна

$$(1/4)\left([x_i, x_j], [x_0, x_k]\right),$$

здесь $(.,.)$ - скалярное произведение. Если же отыскиваются компоненты тензора кривизны с верхними индексами 1, 2, 3, то добавляется знак минус. Напомним, что тензор Риччи является сверткой тензора кривизны (по верхнему и второму нижнему индексам).

Эти формулы применим сначала к (хорошо изученному И. Сигалом) случаю алгебры Ли $u(2)$. При этом надо использовать таблицу коммутационных соотношений:

$$[x_1, x_3] = 2x_2,\ [x_2, x_1] = 2x_3,\ [x_3, x_2] = 2x_1.$$

Получаем диагональность (дважды ковариантного) тензора Риччи:

$$Ric = diag\{0, -2, -2, -2\},$$

Откуда следует значение $S = 6$ для скалярной кривизны. Тензор Эйнштейна $T = diag\{-3, 1, 1, 1\}$.

Мир F соответствует следующей таблице коммутационных соотношений

$$[H_0, H_1] = 2H_2,\ [H_2, H_1] = 2H_3,\ [H_2, H_0] = 2H_1.$$

Тензор Риччи равен $diag\{-2, 2, 2, 0\}$, скалярная кривизна отрицательна: -6, тензор $T = diag\{1, -1, -1, -3\}$. Подсчет кривизны мира L приводит к следующим результатам. В (выбранном ранее) базисе левоинвариантных векторных полей тензор Риччи (и тензор Эйнштейна) равен $diag\{0, 0, 0, -1/2\}$, скалярная кривизна равна нулю. При этом используется другая, нежели в двух предыдущих случаях, индексация.

Замечание. В работе [Le-05] рассматривалось однопараметрическое семейство биинвариантных метрик на D. Положительный параметр R был введен И. Сигалом и интерпретирован как радиус (сферического) 3-пространства. *Релятивистский предел* в хронометрии осуществляется устремлением R к бесконечности и приводит к стандартной модели (современной теоретической физики). В той же работе [Le-05] для биинвариантых метрик на F был использован положительный параметр a (предположительно, он связан с постоянной Планка). Оба параметра фигурируют ниже (см. лекцию 12). Алгебраические значения (характеризующие кривизну), подсчитываемые без предположения $R = 1$ (или $a = 1$) могут быть найдены или тем же методом, или учетом общих свойств преобразований масштаба ([Kr-80, с. 55]).

Л-12

Как отмечалось в лекции 9, понятие *параллелизации* векторного расслоения над данным миром является важным этапом хронометрического подхода. На сс. 98-116 статьи [PaSe-82a] сформулирован и доказан ряд как общих, так и хронометрических теорем. В дальнейших работах группы Сигала использовалась лишь одна из параллелизаций, основанных на мире D ("left curved parallelization"). Иногда она сравнивалась с плоской параллелизацией (определяемой векторной группой мира M).

Понятно, что $DLF-$подход приводит к выводу о небходимости рассмотрения еще двух классов параллелизаций: тех, которые определяются группами L и F. Поэтому $DLF-$теория является $LF-$развитием хронометрии Сигала. Уместной представляется такая терминология: $D-, L-$ и $F-$*интерпретации* (единого) мира событий. На таком языке, $M-$интерпретация - это специальная теория относительности.

В целом, для миров L и F необходимо сформулировать и доказать аналоги утверждений, имеющихся для случая D. Возможно, что получатся и качественно новые результаты. Например, в [Se-88] И. Сигал выдвинул гипотезу о том, что кварки являются тахионными (т.е., нарушающими условие положительности энергии) $G-$инвариантными подпространствами. Отсюда трудность (или даже невозможность) экспериментального наблюдения кварков. Но при использовании тахионных составляющих в локальных тензорных произведениях могут появиться положительно-энергетические компоненты. Представляется, что использование $F-$параллелизации будет особенно эффективно в исследовании этого круга вопросов (см. ниже ту часть формулируемой теоремы, которая посвящена F).

Наличие у мира событий всех трех типов свойств ($D-, L-$ и $F-$) представляет интересную перспективу видоизменения *хронометрической космологии* (см. обзор [DS-01]). Даже в этой простейшей модели удается объединить не только $D-$свойства, характерные для статической вселенной Эйнштейна, но и таковые *плазменной вселенной* ($L-$свойства) и вселенной с постоянным "рождением"нового вещества ($F-$свойства). Объединение их в одной модели помогло бы научному сообществу излечиться от "иррациональной веры в теорию Большого Взрыва"(выражение из [DA-04]).

Еще одним перспективным направлением в DLFподходе представляется применение *контракций* (называемых также *деформациями*) в алгебрах Ли. В рамках мира D такой метод был использован Ш. Стернбергом в [St-75]. Несомненно, что это исследование должно быть продолжено (с рассмотрением в конформной алгебре Ли, подалгебрами которой являются четырехмерные алгебры d, l, f). Заметим, что (являющийся общепринятым в теоретической физике) метод деформаций был впервые сформулирован и использован (в [Se-51]) И. Сигалом.

Подитожим (в одном утверждении) основные свойства всех трех миров. Под *энергетическими условиями* понимаются доминантные энергетические условия (они введены в лекции 6). Остальные используемые общерелятивистские термины имеются в [Kr-80] (и во многих других текстах посвященных общей теории относительности).

Теорема.

1) Мир D является *идеальной жидкостью,* определяемой центральным векторным

полем X_0. Скалярная кривизна равна $6/R^2$. Давление и плотность энергии равны $1/R^2$ Вектор q потока энергии времениподобен. Выполняются энергетические условия.

2) F является *тахионной жидкостью,* определяемой центральным векторным полем H_3. Скалярная кривизна равна $-6/a^2$. Давление и плотность энергии равны $-1/a^2$. Вектор q потока энергии не всегда времениподобен. Энергетические условия нарушаются.

3) Мир L является *изотропным электромагнитным полем* с ковариантно постоянным световым (центральным) вектором l_1. Вектор q потока энергии светоподобен. Скалярная кривизна равна нулю. Выполняются энергетические условия.

Доказательство. Будем использовать результаты вычислений кривизны, приведенные ранее. Алгебраические значения величин, подсчитываемых без предположения $R = 1$ (или $a = 1$, в случае F) могут быть найдены или тем же методом, или учетом общих свойств преобразований масштаба ([Kr-80, с. 55]). Векторные поля, задающие идеальную (соответственно, тахионную) жидкость и светоподобное ковариантно-постоянное векторное поле (в случае L) уже предъявлены в формулировке теоремы. Каждое из этих трех векторных полей порождено центральным элементом соответствующей алгебры Ли.

1) В случае D плотность энергии $-T(v, v)$ равна $g(v, v) + 2(v_0)^2$, откуда следует ее положительность для всех времениподобных векторов. Вектор потока энергии $q = -v - 2v_0X_0$ времениподобен.

2) Для F, плотность энергии равна $2(v_3)^2 - g(v, v)$, откуда следует возможность ее отрицательности для времениподобного v (если компонента v_3 не слишком велика). Если компонента v_3 достаточно велика, то вектор потока энергии $q = v + 2v_3X_3$ пространственноподобен.

3) В случае L, вектор потока энергии $q = (-1/2)v_4l_1$, светоподобен. Плотность энергии равна $(1/2)(v_4)^2$. Напомним, что в этом случае используется индексация не от 0 до 3, а от 1 до 4.

•

ЛИТЕРАТУРА

[AMS-99] Baez J.C., and co-authors. "Irving Ezra Segal (1918-1998)", Notices of the Amer. Math. Soc. **46**(1999), 659-668

[Da-04] Daigneault A. Standard Cosmology and Other Possible Universes, to appear in: "Physics Before And After Einstein. A Historical Perspective", ed. MMCapria, Italy, ISBN: 1 58603 462 6.

[DS-01] Daigneault A. and Sangalli A. Einstein's static universe: An idea whose time has come back? Notices of the Amer. Math. Soc. **48**(2001), 9-16

[JFA-02] Journal of Functional Analysis, **190**(2002), the issue devoted to the memory of Irving Segal.

[Kr-80] Kramer D., H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt. "Exact Solutions of Einstein's Field Equations. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980. Имеется перевод на русский язык: Крамер, Д., Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум (под ред. Э. Шмутцера). "Точные решения уравнений Эйнштейна."Пер. с англ. М.: Энергоиздат 1982. 416 с.

[Le-05] Левичев А. В. DLF-теория как развитие хронометрии Сигала. I: Пространство-время Минковского и миры D, L, F. Сибирский математический журнал (направлена в печать)

[Mi-76] Milnor J., Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Advances in math., **21**(1976), no.3, 293-329

[OrSe-89] Orsted B. and I. Segal, A pilot model in two dimensions for conformally invariant particle theory, J. Funct. Anal. **83**(1989), 150-184

[PaSe-82a] Paneitz, Stephen M., Irving E. Segal, "Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle", Journal of Functional Analysis **47**(1982), 78-142

[Se-51] Segal, Irving E., A class of operator algebras which are determined by groups, Duke Math. J. **18**(1951), 221-265.

[Se-86] Segal, Irving E., The physics of extreme distances and the Universal cosmos, in "Quantum Theory and the Structure of Time and Space"(L.Castell and C.F.von Weizsacker, Eds.), Vol.6, pp.120-137, Carl Hanser Verlag, Munich, 1986.

[СГ] Дубровин Б.А. и др. Современная геометрия /Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. М.: Наука, 1979, 760 с. (есть более поздние издания)

[St-75] Sternberg, S. Chronogeometry and Symplectic Geometry, *in* Colloques Internationaux C.N.R.S., N.237 - Geometrie symplectique et physique mathematique, 45-57

[Wi-39] Wigner E.P., On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. of Math.(2), **40**(1939), 149-204

Благодарности

Андрей Солынин предоставил свой конспект лекций. Мы благодарны ему и другим слушателям спецкурса, прочитанного осенью 2004 года в стенах ПО МИ им. В.А.Стеклова РАН (на Фонтанке). Особая признательность – Надежде Соловьевой за подготовку TEX-текста.