AKIHIRO KANAMORI

*L'ipotesi del continuo**

Quanti punti ci sono sulla retta? Questa sembrerebbe una domanda fondamentale – primordiale, anzi. Tuttavia, per formularla come domanda *matematica*, si è dovuto dare un senso matematico a certi concetti soggiacenti e costruire un modo di pensiero matematico che rendesse per lo meno possibile – se non istruttiva – una risposta.

Innanzitutto, è necessario descrivere precisamente in che modo i numeri reali rappresentino punti del continuo lineare. Dovremo poi sviluppare un concetto coerente di cardinalità e di numero cardinale per collezioni matematiche infinite. Infine, i numeri reali andranno enumerati in modo da rispettare questo concetto di cardinalità. Georg Cantor compì tutti questi passi nel contesto di quei progressi fondamentali che hanno condotto alla moderna teoria degli insiemi. La sua «ipotesi del continuo» proponeva una soluzione specifica e strutturata sulla grandezza del continuo in termini dei suoi numeri transfiniti, una soluzione che sarebbe diventata fondamentale quando gli approcci insiemistici al continuo acquisirono un ruolo di primaria importanza nella ricerca matematica. Il «problema del continuo» – stabilire cioè se l'ipotesi del continuo valga o meno – sarebbe diventato il più rilevante problema della teoria degli insiemi. Di più: lo sviluppo della teoria degli insiemi come campo di ricerca matematica, anche per quanto riguarda la questione del suo contenuto, sarebbe stato guidato dal problema del continuo. In tutti i momenti critici in cui tale teoria si è trovata a una svolta, è emerso il problema di quali insiemi, specialmente insiemi di numeri reali, debbano essere considerati, e quali mezzi debbano essere usati per enumerare i numeri reali.

Mezzo secolo dopo che Cantor aveva formulato l'ipotesi del continuo, quando era ormai emerso un quadro assiomatico per la teoria degli insiemi e un'immagine schematica del loro universo, Kurt Gödel ne stabilì la coerenza relativa; dopo un altro quarto di secolo, Paul Cohen ne dimostrò

* Il presente saggio riprende l'articolo *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 2 (1996), pp. 1-71, e appare qui con il permesso del «Bulletin». Il lettore è rinviato a questo lavoro per ulteriori dettagli in direzioni secondarie rispetto ai principali temi del saggio.

l'indipendenza. Si trattò di risultati di fondamentale importanza, anche per i nuovi metodi che vennero introdotti nella teoria degli insiemi. Con una cornucopia di nuovi risultati e nuovi modelli, la ricchezza di nuove possibilità per gli insiemi di numeri reali e la loro enumerabilità portò – per ironia della sorte, in un certo senso – a far sì che il problema del continuo si trovasse a navigare in acque meno sicure. In molti ambienti si iniziò a ritenere che l'ipotesi del continuo facesse tornare le cose troppo bene. Così come la nascita delle geometrie non euclidee aveva fatto diventatare quella euclidea una geometria fra le tante, l'ipotesi del continuo fu vista come una tra molte ipotesi da investigare come parte dello sviluppo metodologico ed esplicativo della matematica.

Nell'ultimo mezzo secolo, la teoria degli insiemi è diventata un settore autonomo di raffinata ricerca matematica, che ha avuto enorme successo non solo nello sviluppare la sua eredità storica, ma anche nell'analizzare le proposizioni matematiche e valutare la loro forza di coerenza. Fondamentali sono state alcune nuove forti ipotesi sugli insiemi, sia sugli insiemi di numeri reali, sia sul più ampio universo insiemistico. Ma malgrado la fluidità della situazione, l'ipotesi del continuo ha continuato a essere una forza viva: dapprima stimolando e subendo trasformazioni dallo sviluppo della moderna teoria degli insiemi; e ora servendo da schema per accostare questioni di larghezza, relative a insiemi di numeri reali, e di lunghezza, relative a forti ipotesi sulla grandezza del transfinito.

Descriveremo l'impatto che il problema del continuo, nei suoi vari aspetti, ha avuto sulla matematica moderna e di come esso ne abbia stimolato una grande parte. Nel § 1 daremo alcuni dettagli sul pionieristico lavoro di Cantor che condusse all'oggettivazione matematica dell'infinito in atto e all'articolazione di un problema fondamentale. Nel § 2 discuteremo della matematizzazione dell'eredità di Cantor, sia negli aspetti che riguardano lo sviluppo degli insiemi definibili di numeri reali, sia in quelli legati all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo completata poi da von Neumann. Nel § 3 affronteremo l'introduzione della logica del primo ordine e la dimostrazione della coerenza relativa dell'ipotesi del continuo dovuta a Gödel. Infine, nel § 4 discuteremo i risultati di Cohen sull'indipendenza dell'ipotesi del continuo e le variegate posizioni e questioni che intorno a essa si sono intessute nel moderno panorama della teoria degli insiemi.

1. *Cantor.*

1.1. Numeri reali e numerabilità.

La teoria degli insiemi mosse i primi passi nel contesto della grande trasformazione della matematica del XIX secolo, trasformazione che iniziò con l'analisi. Dalla creazione del calcolo infinitesimale da parte di Newton e Leibniz, il concetto di funzione fu esteso costantemente: dalla funzione come espressione analitica si arrivò a includere corrispondenze arbitrarie. La prima grande espansione fu ispirata dalle esplorazioni di Eulero nel Settecento e causò l'introduzione di metodi basati sulle serie infinite e l'analisi di fenomeni fisici come le corde vibranti. Nell'Ottocento l'imbarazzo causato dall'uso indiscriminato delle serie di funzioni portò prima Cauchy, e poi Weierstrass, a esprimere chiaramente le nozioni di convergenza e di continuità. Rimpiazzati gli infinitesimi con il concetto di limite formulato nel linguaggio $\varepsilon - \delta$, nella matematica si tornò a un livello di rigore che era stato abbandonato da più di due millenni. Il significato delle nuove funzioni assegnate in termini di serie infinite poteva ormai essere sviluppato solo attraverso procedure deduttive accuratamente specificate; la dimostrazione riemergeva come estensione del calcolo algebrico, divenendo basilare per la matematica in generale, promuovendo nuove astrazioni e generalizzazioni.

Lavorando nell'ambito di questa tradizione, Georg Cantor (1845-1918) nel 1870 stabilì un teorema di importanza fondamentale sull'unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica: se una tale serie converge a zero ovunque, allora tutti i suoi coefficienti sono zero. Per generalizzare i propri risultati, Cantor cominciò ad ammettere punti in cui la convergenza non valeva, arrivando alla seguente formulazione: per ogni collezione P di numeri reali, sia P' la collezione dei punti di accumulazione di P, e $P^{(n)}$ il risultato di n iterazioni di questa operazione. *Se una serie trigonometrica converge a zero ovunque, tranne che su un insieme P tale che* $P^{(n)}$ *sia vuoto per qualche n, allora tutti i suoi coefficienti sono nulli.*

Cantor [1872] fornì quindi la formulazione dei numeri reali in termini di successioni fondamentali (o «di Cauchy») di numeri razionali, ed è significativo che lo fece con l'obiettivo specifico di chiarire la propria dimostrazione. I nuovi risultati dell'analisi dovevano essere giustificati da una dimostrazione, la quale a sua volta doveva basarsi su principî assunti in precedenza: questo regresso portò, nei primi anni Settanta dell'Ottocento, all comparsa di parecchie formulazioni indipendenti dei numeri reali in termini dei numeri razionali. A prima vista è sorprendente che i numeri reali siano stati sviluppati così tardi, ma questo può essere visto in connessione con lo sviluppo del concetto di funzione che spostò l'enfasi, dal continuo preso come un tutto, alla sua costruzione estensionale come collezione di oggetti. Tradizionalmente, in matematica gli oggetti nuovi sono sempre stati introdotti solo con riluttanza, ma – per riuscire a esprimere chiaramente le dimostrazioni – si era ormai reso necessario un approccio al continuo che fosse più aritmetico che geometrico.

L'altra ben nota formulazione dei numeri reali è quella dovuta a Richard Dedekind [1872], basata sulla nozione di «sezione». Cantor e Dedekind intrattennero una fruttuosa corrispondenza, specialmente negli anni Settanta dell'Ottocento, proprio durante il periodo in cui Cantor produsse molti dei suoi risultati e delle sue speculazioni. Le varie formulazioni dei numeri reali fornirono tre importanti prerequisiti per la teoria degli insiemi: il fatto di considerare collezioni infinite, di costruirle come oggetti unitari, e di contemplare possibilità arbitrariamente differenti. In effetti, Dedekind aveva già compiuto questi passi nella propria creazione degli ideali, collezioni infinite di numeri algebrici[1], e c'è un'evidente analogia tra ideali e sezioni nella creazione di nuovi numeri da numeri già esistenti. I numeri algebrici sarebbero presto stati l'oggetto di un grande passo avanti da parte di Cantor. Anche se, sia Cantor, sia Dedekind, eseguirono una riduzione aritmetica del continuo, entrambi ne rispettarono il precedente significato geometrico, asserendo che ognuno dei «loro» numeri reali davvero corrisponde a un punto della retta. Ma per ottenere questo non era sufficiente il lavoro duro (e nemmeno, per parafrasare Russell[2], sarebbe bastato il furto): Cantor [1872, p. 128] e Dedekind [1872, p. III] riconobbero entrambi la necessità di un apposito *assioma*.

Cantor [1880, p. 358] ebbe a ricordare che all'epoca stava già considerando infinite iterazioni della sua operazione P' usando «simboli di infinito»:

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{n}^{\infty} P^{(n)}, P^{(\infty+1)} = P^{(\infty)'}, P^{(\infty+2)}, \dots P^{(\infty\cdot 2)}, \dots P^{(\infty^2)}, \dots P^{(\infty^\infty)}, \dots P^{(\infty^{\infty^\infty})}, \dots .$$

Con un'importante mossa concettuale, egli cominciò a investigare, come oggetti di ricerca autonomi, collezioni infinite di numeri reali ed enumerazioni infinitarie. Questo passo lo portò dapprima a un chiarimento di importanza fondamentale riguardo alla nozione di grandezza del continuo e, successivamente, a una nuova e vasta teoria dell'enumerazione. La teoria degli insiemi nacque in quel giorno di dicembre del 1873 in cui Cantor stabilì che *i numeri reali non sono numerabili*[3]. Da questa gemma, nei decenni successivi sarebbero scaturiti i risultati prodigiosi che il matematico tedesco ottenne nella teoria dei numeri transfiniti e cardinali.

La non numerabilità dei numeri reali fu stabilita con una *reductio ad absurdum* come nel caso dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Entrambi questi risultati

[1] I numeri algebrici sono quei numeri reali che sono radici di polinomi a coefficienti interi.

[2] «The method of "postulating" what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil» (B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen and Unwin, London - Macmillan, New York 1919, p. 71, trad. it. *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano 2004, p. 82: «Il metodo di "postulare" ciò che ci fa comodo ha molti vantaggi: sono gli stessi vantaggi che ha il furto in confronto al lavoro onesto»).

[3] Un insieme è *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca tra esso e l'insieme {0, 1, 2, …} dei numeri naturali. La data esatta può essere identificata nel 7 dicembre. Cantor diede per la prima volta una dimostrazione della non numerabilità dei numeri reali in una lettera a Dedekind del 7 dicembre 1873 [Ewald 1996, pp. 845 sgg.], confessando: «solo oggi credo di avere chiuso la questione».

di impossibilità esemplificano come una *reductio* possa chiamare in causa un contesto matematico più ampio permettendo la messa in discussione di proprietà fino a quel momento implicite. Comunque sia, il matematico Cantor affrontò uno specifico *problema*, espresso nei termini della matematica del suo tempo, con un lavoro pionieristico intitolato *Su una proprietà della totalità dei numeri algebrici reali* [Cantor 1874]. Dopo aver stabilito questa proprietà – il fatto cioè che i numeri algebrici sono numerabili –Cantor affermò: *per ogni successione (numerabile) di numeri reali, ogni intervallo contiene un numero reale che non appartiene alla successione.* Nella dimostrazione, egli utilizzava la completezza dell'ordinamento dei numeri reali. Supponiamo che s sia una successione di reali e I un intervallo. Siano $a < b$ i primi due reali di s in I, se ne esistono. Poi siano $a' < b'$ i primi reali di s, se esistono, nell'intervallo aperto (a, b); $a'' < b''$ i primi due reali, se ne esistono, di s nell'intervallo (a', b'); e così via. Allora per quanto a lungo duri questo processo, l'intersezione (non vuota) di questi intervalli contenuti l'uno nell'altro non può contenere alcun membro di s.

In questo modo Cantor fornì una nuova dimostrazione del risultato di Liouville che esistono numeri trascendenti (numeri reali non algebrici). Solo in seguito osservò la non numerabilità dei reali in generale. Questo breve resoconto illustra l'atteggiamento prudente di Cantor all'epoca: non voleva trarre conclusioni troppo affrettate. Nelle esposizioni delle sue ricerche, viene in genere rovesciato l'ordine con cui fu dimostrata l'esistenza dei numeri trascendenti: si dice cioè che prima abbia stabilito la non numerabilità dei reali e solo dopo abbia dedotto l'esistenza dei numeri algebrici dalla loro numerabilità. Dipende da come si interpreta la dimostrazione, ma gli argomenti di Cantor sono poi stati effettivamente implementati come algoritmi per generare le cifre dei numeri trascendenti[4].

1.2. L'ipotesi del continuo e i numeri transfiniti.

A partire dalla pubblicazione successiva [1878], Cantor spostò l'attenzione sulla costruzione di corrispondenze biunivoche, stabilendo che due insiemi hanno la stessa potenza se e solo se esiste una tale corrispondenza tra di essi, e stabilì che i reali $\mathbb{R}$ e gli spazi n-dimensionali $\mathbb{R}^n$ hanno tutti la stessa potenza. Cantor [1874] aveva già aperto una prima breccia con un

[4] In Gray [1994] si mostra che l'argomentazione originale di Cantor [1874] può essere implementata in un algoritmo che genera le prime n cifre di un numero trascendente con complessità temporale $O\left(2^{n^{1/3}}\right)$; e l'argomentazione basata sulla diagonalizzazione, che propose successivamente, con un efficace algoritmo di complessità $O(n^2 \log^2 n \log\log n)$. L'argomento originale di Liouville dipendeva da una semplice osservazione sulla convergenza veloce, e le cifre dei numeri di Liouville possono essere generate molto più velocemente.

risultato negativo sulla mancanza di una corrispondenza biunivoca, ma ora consolidava questo nuovo campo di ricerca con uno studio in positivo, sulla *possibilità* di realizzare tali corrispondenze[5]. Così come la scoperta dei numeri irrazionali aveva portato a uno dei grandi risultati della matematica greca – la teoria geometrica delle proporzioni di Eudosso presentata nel quinto libro degli *Elementi* di Euclide, che costituisce l'antefatto concettuale delle sezioni di Dedekind [1872] – questi risultati portarono Cantor a muoversi verso una teoria matematica dell'infinito.

Pur prosegendo nelle sue fruttuose ricerche, Cantor non si spinse a considerare per gli insiemi infiniti nessuna potenza se non le due presentate nella dimostrazione di Cantor [1874]. Così, alla fine di Cantor [1878, p. 257] affermava:

(CH_0) Ogni insieme infinito di reali o è numerabile o ha la potenza del continuo.

Così si presentava l'*ipotesi del continuo* al momento della sua nascita. Questa congettura, che assumeva il valore di problema fondamentale, avrebbe stimolato Cantor non solo ad avvicinarsi ai reali come un continuo estensionale in modo sempre più aritmetico, ma anche a porsi domande fondamentali sull'esistenza degli insiemi. I suoi trionfi, che aprivano un nuovo contesto matematico, sarebbero stati come un faro per guidare altri nello studio dell'infinito; ma anche il suo insuccesso nello stabilire l'ipotesi del continuo avrebbe avuto conseguenze non di poco conto. La teoria degli insiemi vide la luce non come astratto fondamento della matematica, ma piuttosto come quadro in cui articolare e risolvere il «problema del continuo»:

Esistono più di due potenze immerse nel continuo?

Nelle sue magistrali *Grundlagen* [1883] Cantor sviluppò i *numeri transfiniti* e il concetto chiave di *buon ordinamento*. L'indicizzazione infinitaria usata nelle sue ricerche sulle serie trigonometriche non era più un artificio. I «simboli di infinito» divennero autonomi e si estesero come numeri transfiniti, e la loro nascita fu segnata dal cambio di notazione: dall'∞ che indicava la potenzialità all'ω che, essendo l'ultima lettera dell'alfabeto greco, voleva indicare piena completezza. Con questo simbolo poteva raffigurare la progressione dei numeri transfiniti:

$$0, 1, 2, \ldots \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega\ (= \omega \cdot 2), \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots$$

[5] Cantor ottenne una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ essenzialmente combinando le espansioni decimali di una coppia di reali per ottenere il reale associato, tenendo conto dei punti eccezionali (in quantità numerabile) come 0,100… = 0,099… con un'opportuna procedura *ad hoc* di rimescolamento. Un tale argomento sembra oggi ovvio, ma aver stabilito una corrispondenza biunivoca fra piano e retta fu, all'epoca, un risultato sorprendente.

Definizione 1.1. Una relazione binaria $\prec$ è un *ordine totale* di un insieme a se è transitiva (cioè se $x \prec y$ e $y \prec z$ implicano $x \prec z$) e tricotomica (cioè se $x, y \in a$, vale una e una sola delle relazioni $x \prec y$, $x = y$ o $y \prec x$). Una relazione $\prec$ è un *buon ordine* (o anche *buon ordinamento*) di un insieme a se è un ordine totale dell'insieme tale che ogni sottoinsieme non vuoto abbia un minimo elemento rispetto a $\prec$.

I buoni ordinamenti traducono l'idea di enumerazione sequenziale, e i numeri transfiniti servono da standard con cui calibrare i buoni ordinamenti. Come osservò Cantor, ogni ordine totale di un insieme finito è già un buon ordinamento, e tutti questi buoni ordinamenti sono isomorfi tra loro. Di conseguenza, il senso della definizione si può cogliere solo su insiemi infiniti, per i quali possono esistere buoni ordinamenti non isomorfi. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, \dots\}$ (i predecessori di ω) può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei predecessori di $\omega + \omega$, contando sequenzialmente prima i pari e poi i dispari. Di fatto, tutti gli infiniti numeri transfiniti mostrati sopra sono numerabili. Cantor chiamò l'insieme dei numeri naturali «prima classe di numeri» (I), e «seconda classe di numeri» (II) l'insieme dei numeri i cui predecessori sono numerabili. Cantor concepì la classe (II) come limitata superiormente secondo un principio di limitazione e mostrò che la stessa classe (II) non è numerabile. Procedendo così, Cantor chiamò terza classe (III) l'insieme dei numeri i cui predecessori sono in corrispondenza biunivoca con (II), e così via. Inoltre, secondo la sua terminologia, un insieme ha *potenza superiore* a un altro se non hanno la stessa potenza, ma il secondo ha la potenza di un sottoinsieme del primo. Cantor arrivò così a concepire potenze sempre più alte, rappresentate da classi di numeri, supponendo inoltre che ogni potenza fosse rappresentabile in questo modo. Con questa «creazione libera» di numeri, Cantor [1883, p. 550] propose un principio di base che avrebbe guidato l'analisi degli insiemi:

> Si può sempre trasformare ogni insieme *ben definito* in un insieme *bene ordinato*.

Cantor considerava questo principio una «legge del pensiero particolarmente notevole che grazie alla sua validità generale è fondamentale e ricca di conseguenze». Gli insiemi devono poter essere bene ordinati, e quindi essi e le loro potenze devono poter essere misurati mediante i numeri transfiniti del suo infinito strutturato.

Il problema del continuo non è così lontano da questi sviluppi e potrebbe infatti essere visto come una motivazione soggiacente. I numeri transfiniti avrebbero fornito il quadro per i due approcci di Cantor al problema, quello mediante la potenza e quello, più diretto, mediante gli insiemi definibili di numeri reali.

Per l'approccio mediante la potenza, nelle *Grundlagen* Cantor stabilì che la seconda classe (II) non è numerabile ma *ogni sottoinsieme infinito di (II) o è numerabile o ha la stessa potenza di (II).* Quindi, (II) ha esattamente la proprietà che Cantor cercava per i reali, ed egli aveva così ridotto l'ipotesi del continuo all'asserzione positiva che i reali e (II) hanno la stessa potenza. La dimostrazione di Cantor che (II) non è numerabile è essenzialmente la seguente. Supponiamo che s sia una successione (numerabile) di membri di (II), con elemento iniziale a. Sia a' un membro di s, se esiste, tale che $a < a'$; sia a'' un membro di s, se esiste, tale che $a' < a''$; e così via. Allora, per quanto a lungo duri questo processo, l'estremo superiore di questi numeri, o il suo successore, non è un membro di s.

Questa dimostrazione ricorda quella di Cantor [1874] che i reali non sono numerabili e suggerisce una relazione tra i reali con la loro rappresentazione come successioni e i membri di (II) con le loro successioni cofinali associate. Malgrado l'abbia annunciata diverse volte, Cantor non riuscì mai a sviluppare una correlazione funzionante. Retrospettivamente, possiamo vedere l'emergere di un problema: egli non era in grado di *definire* un buon ordinamento dei reali.

Per quanto riguarda l'approccio mediante insiemi definibili di reali, questo si sviluppò direttamente dal lavoro di Cantor sulle serie trigonometriche; i «simboli di infinito» usati nell'analisi dell'operazione P' si trasformarono nei numeri transfiniti della seconda classe (II). Nelle *Grundlagen* Cantor studiò P' quando P è un insieme non numerabile e definì il concetto chiave di insieme *perfetto* di reali (non vuoto, chiuso e senza punti isolati). Cantor [1884] dimostrò che *ogni insieme perfetto ha la potenza del continuo*, e che *ogni insieme chiuso non numerabile di reali è l'unione di un insieme perfetto e di un insieme numerabile*. Un insieme A di numeri reali ha la «proprietà dell'insieme perfetto» se A è numerabile o ha un sottoinsieme perfetto. Cantor aveva dimostrato in particolare che gli insiemi chiusi hanno la proprietà dell'insieme perfetto. Aveva quindi stabilito che CH_0 vale per gli insiemi chiusi: ogni insieme chiuso o è numerabile o ha la potenza del continuo. Da questo nuovo punto di vista, Cantor aveva ridotto il problema del continuo a determinare se esiste un insieme chiuso di reali che ha la potenza della seconda classe. Anche se non ci riuscì, aveva dato inizio a un programma per affrontare il problema del continuo che sarebbe stato energicamente sviluppato nei decenni successivi (cfr. §§ 2.1 e 2.4.).

1.3. Diagonalizzazione e numeri cardinali.

Quasi due decenni dopo la dimostrazione del 1874 che i reali non sono numerabili, in un breve articolo del 1891 Cantor generalizzò il risultato trasformandolo nel suo famoso argomento diagonale. Con esso dimostrava che *per ogni insieme L, la collezione delle funzioni da L in un insieme fissato di due elementi ha una potenza maggiore di quella di L*. Questo risultato effettivamente generalizza quello di Cantor [1874], in quanto la collezione delle funzioni dai numeri naturali in un insieme fissato con due elementi risulta avere la stessa potenza dei reali. Ecco come l'autore presentava l'argomentazione nella sua forma generale[6]. Sia M la totalità delle funzioni da L a valori 0 oppure 1. Anzitutto, L è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di M – associando a ogni $x_0 \in L$ la funzione che manda x_0 in 1 e tutti gli altri elementi di L in 0. Ma non può esistere una corrispondenza biunivoca tra M e L. Altrimenti, ci sarebbe una funzione $\varphi(x, z)$ di due variabili tale che per ogni membro f di M esisterebbe uno $z \in L$ tale che $\varphi(x, z) = f(x)$ per ogni $x \in L$. Ma la funzione «diagonalizzante» $g(x) = 1 - \varphi(x, x)$ non può essere un membro di M perché per ogni $z_0 \in L$ si ha $g(z_0) \neq \varphi(z_0, z_0)$!

Retrospettivamente, si può dire che l'argomento diagonale poteva essere estratto dalla dimostrazione del 1874[7]. Cantor andò poi gradualmente spostando il suo concetto di «insieme» verso un livello di astrazione che andava oltre quello degli insiemi di numeri reali, e l'apparente *nonchalance* del lavoro del 1891 potrebbe riflettere un collegamento di fondo con quello del 1874. Che la nuova dimostrazione sia o no davvero «diversa» dalla prima, sta di fatto che, attraverso questo nuovo livello di astrazione, Cantor poté fare a meno degli insiemi annidati definiti ricorsivamente e della costruzione del limite, e poté applicare l'argomento a un insieme qualunque. Si trattava della prima dimostrazione dell'esistenza di una potenza superiore a quella del continuo; inoltre Cantor aveva anche enunciato «il teorema generale che le potenze degli insiemi ben definiti non hanno massimo». L'argomento diagonale sarebbe diventato un *metodo*, confluito poi nella teoria descrittiva degli insiemi, nel teorema di incompletezza di Gödel e nella teoria della ricorsività.

Oggi è ovvio che una funzione da un insieme L a un insieme di due elementi corrisponda a un sottoinsieme di L, e il teorema di Cantor viene anche enunciato in questi termini: *per ogni insieme L il suo insieme potenza* $\mathcal{P}(L) = \{X \mid X \subseteq L\}$ *ha una potenza maggiore di L*. Sarebbe però esagerato asserire che Cantor lavorasse sugli insiemi potenza; si può dire, piuttosto, che estese il concetto ottocentesco di *funzione* inaugurando quello moderno di funzione arbitraria. In ogni caso, Cantor avrebbe ora dovuto affrontare, nel suo contesto funzionale, una difficoltà generale nettamente indipendente dal

[6] In realtà, Cantor assumeva che L fosse l'intervallo unitario dei reali, presumibilmente per mettersi in un contesto standard, ma era chiaramente consapevole della generalità del suo argomento.

[7] Se si parte con una successione s di reali e un intervallo semiaperto I_0, invece di scegliere *coppie* di reali nella successione (cfr. § 1.1), si possono evitare gli elementi di s uno alla volta: sia I_1 il sottointervallo semiaperto di I_0 sinistro o destro delimitato dal punto medio di I_0, che non contenga il primo elemento di s. Sia poi I_2 il sottointervallo semiaperto di I_1 delimitato dal punto medio di I_1 che non contiene il secondo elemento di s, e così via. Di nuovo, l'intersezione di tutti questi intervalli annidati contiene un numero reale che non appartiene alla successione s. Astraendo il processo in termini di reali rappresentati in espansione binaria, si generano le cifre del reale diagonalizzante. È piuttosto significativo che nella lettera di Cantor a Dedekind del 7 dicembre 1873 [cfr. Ewald 1996, pp. 845 sgg.], in cui si stabilisce la non numerabilità dei reali, appaia già una disposizione di numeri reali contrassegnati da due indici e una procedura per attraversare tale disposizione verso destra e verso il basso, come nelle correnti rappresentazioni dell'argomento diagonale.

problema del continuo: dall'esistenza di un buon ordinamento in un insieme, non segue necessariamente l'esistenza di un buon ordinamento del suo insieme potenza. L'argomento diagonale metteva in discussione il concetto stesso che Cantor aveva della nozione di insieme: da un lato tale argomento, semplice ed elegante, avrebbe dovuto far parte della teoria degli insiemi e portare a nuovi insiemi di potenza superiore; dall'altro, questi insiemi non si conformavano al principio di Cantor che ogni insieme dovesse essere dotato di un buon ordinamento definibile.

I *Beiträge* di Cantor, pubblicati in due parti [1895 e 1897], presentano la sua teoria del transfinito in una fase ormai matura. Nella prima parte, Cantor ricostruisce la potenza come *numero cardinale*, visto ormai come concetto autonomo, piuttosto che come una *façon de parler* delle corrispondenze biunivoche; e definisce fin da subito addizione, moltiplicazione ed esponenziazione di numeri cardinali in termini di operazioni e funzioni insiemistiche. Particolarmente importante era la definizione dell'esponenziazione: se $\mathfrak{a}$ è il numero cardinale di M e $\mathfrak{b}$ il numero cardinale di N, allora $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ è il numero cardinale della collezione di tutte le funzioni $N \to M$, aventi cioè come dominio N e valori in M. Come si addice a nuovi numeri, Cantor introdusse per loro una nuova notazione, che utilizzava la lettera *aleph* dell'alfabeto ebraico: $\aleph$. Se $\aleph_0$ è il numero cardinale dell'insieme dei numeri naturali, Cantor osservò che $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ e che $2^{\aleph_0}$ è il numero cardinale del continuo. Osservò inoltre che la fatica fatta in [1874] per associare il continuo con il piano e più in generale $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^m$ si riduceva a «pochi tratti di penna» nella sua nuova aritmetica:

$$2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \quad \text{e} \quad (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Cantor menzionò solo i cardinali

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots$$

dove questi sarebbero i numeri cardinali delle classi di numeri successive nelle *Grundlagen* e quindi esaurirebbero tutti i numeri cardinali infiniti.

Cantor poi sviluppò la sua teoria dei «tipi d'ordine», astrazioni degli ordini totali. Definì addizione e moltiplicazione di tipi d'ordine e caratterizzò i tipi d'ordine dei razionali e dei reali. Nel secondo dei *Beiträge* Cantor tornò al caso speciale del buon ordinamento e ricostruì i numeri transfiniti come i loro tipi d'ordine, usando per questi numeri il nuovo nome di «numeri ordinali». Qui finalmente veniva data la dimostrazione, mediante confronto di insiemi bene ordinati, che i numeri ordinali sono confrontabili. Cantor continuava descrivendo l'aritmetica ordinale come caso speciale dell'aritmetica dei tipi d'ordine e, dopo aver dato le proprietà di base della seconda classe di numeri, definì $\aleph_1$ come il suo numero cardinale.

Le due parti dei *Beiträge* sono non solo diverse per argomento – numeri cardinali e continuo da un lato, numeri ordinali e buoni ordinamenti dall'altro – ma tra loro si era sviluppata un'ampia e inconciliabile frattura. Per un insieme L di numero cardinale $\mathfrak{a}$, $2^{\mathfrak{a}}$ è il numero cardinale della collezione delle funzioni da L in un insieme fissato di due elementi (e quindi il numero cardinale dell'insieme potenza $\mathcal{P}(L)$); di conseguenza, il risultato del 1891 potrebbe essere enunciato semplicemente come $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$ per ogni $\mathfrak{a}$. Ma questo non è mai affermato nel primo dei *Beiträge* neanche in un caso speciale; piuttosto si chiarisce [1895, p. 495] che la successione dei numeri cardinali transfiniti dev'essere giustificata mediante la loro costruzione come *aleph*. Neanche il secondo dei *Beiträge* menziona gli *aleph* oltre $\aleph_1$, e non cita neanche l'ipotesi del continuo, che avrebbe potuto ormai essere enunciata come

$$\text{(CH)} \qquad 2^{\aleph} = \aleph_1$$

(tuttavia Cantor l'affermò in questi termini in una lettera del 1895 [cfr. Moore 1989, p. 99]).

Ci sono due aspetti notevoli nell'ipotesi del continuo come fu formulata da Cantor:

– si sottintende che *esista* un buon ordinamento dei reali;
– esiste di fatto un buon ordinamento indicizzato dagli ordinali numerabili.

È questo il punto cruciale del problema del continuo: ogni insieme bene ordinato, attraverso il corrispondente numero ordinale, ha un *aleph* come numero cardinale, ma come si colloca $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nella successione degli *aleph*?

La dimostrazione iniziale di Cantor [1874] portò al problema del continuo. Questo problema era nascosto tra le pieghe della teoria degli insiemi così come era stata inizialmente sviluppata: infatti le strutture che Cantor aveva costruito (anche se oggi hanno ormai un interesse intrinseco) erano emerse, in buona parte, dagli sforzi per articolare e risolvere tale problema. L'argomento diagonale di Cantor [1891], probabilmente una trasformazione di quello iniziale del 1874, esacerbò una tensione crescente tra l'avere buoni ordinamenti e ammettere insiemi di funzioni arbitrarie (o insiemi potenza arbitrari). David Hilbert, quando presentò la sua famosa lista di problemi al Congresso internazionale dei matematici del 1900 a Parigi, pose il problema del continuo al primissimo posto. Ed è significativo che Hilbert enunciasse dapprima l'ipotesi del continuo nella sua forma primitiva CH_0 e poi desse uguale importanza al problema di ottenere un buon ordinamento dei reali, in quanto questo avrebbe forse fornito la «chiave» per la dimostrazione. È anche interessante notare che la sua osservazione finale rese pubbliche le difficoltà di Cantor, suggerendo la desiderabilità di «dare davvero» un buon ordinamento ai reali.

Una conseguenza del lavoro di Cantor sul problema del continuo fu che la matematica si aprì a un nuovo modo di pensare e lavorare col continuo.

In una prospettiva più ampia, portò a riflettere su quali insiemi dovessero essere considerati, e divenne una questione da affrontare mediante assiomatizzazione; il che, a sua volta, portò alla trasformazione del concetto stesso di insieme. Tutto ciò preparò il terreno per il primo fondamentale risultato sul problema del continuo, quello della sua coerenza relativa.

2. *Matematizzazione.*

2.1. I primi passi.

L'eredità di Cantor consisteva di due lasciti principali: la ricerca sugli insiemi definibili di reali e l'estensione dei numeri nel transfinito. Questi due aspetti vennero subito a intrecciarsi con la pratica matematica attraverso iniziative dirette che stabilirono nuovi contesti e illuminarono varie questioni. Gli analisti francesi Émile Borel, René Baire ed Henri Lebesgue intrapresero la ricerca sugli insiemi definibili di reali con un approccio dal basso verso l'alto, di tipo «costruttivo». Cantor [1884] aveva stabilito la proprietà dell'insieme perfetto per gli insiemi chiusi e formulato il concetto di *contenuto* per un insieme di reali, ma non sviluppò questi argomenti. Con questi antecedenti il lavoro dei francesi avrebbe gettato le basi per la teoria della misura e anche per la «teoria descrittiva degli insiemi», la teoria della definibilità del continuo.

Poco dopo aver completato la sua tesi, Borel [1898, pp. 46 sgg.] considerò per la sua teoria della misura la collezione degli insiemi di reali ottenibile partendo dagli intervalli, richiedendo che sia chiusa rispetto alle operazioni di complementare e unione numerabile. La formulazione era astratta e assiomatica e, vista in questa luce, anche ardita e fantasiosa; oggi chiamiamo questi insiemi «insiemi boreliani» e ne conosciamo piuttosto bene le proprietà.

Baire, nella sua tesi, partiva dall'asserzione di Dirichlet per cui una funzione reale è un arbitrario assegnamento di reali, e distaccandosi dalla predilezione propria del XIX secolo per gli esempi patologici, cercò un approccio costruttivo tramite limiti puntuali. La sua «classe 0 di Baire» consiste delle funzioni reali continue, e per gli ordinali numerabili $\alpha > 0$, la «classe α di Baire» consiste di quelle funzioni f che non appartengono alle classi precedenti, ma sono ottenibili come limiti puntuali di successioni $f_0, f_1, f_2, \ldots$ di funzioni di classi precedenti; in altre parole

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

per ogni reale x. Le funzioni in queste classi sono oggi note come funzioni «di Baire», e questa era la prima stratificazione in una gerarchia transfinita dopo quelle di Cantor. La tesi di Baire introduceva anche il concetto, oggi basilare, di *categoria* nel contesto della teoria degli insiemi. Si dice che un insieme di reali non è *raro* (*nowhere dense*) se la sua chiusura non ha punti interni, e un insieme di reali è *magro* (o *di prima categoria*) se è unione numerabile di insiemi rari; in caso contrario è detto *di seconda categoria*. Baire dimostrò il teorema che oggi porta il suo nome («teorema di categoria di Baire»): *ogni sottoinsieme aperto e non vuoto dei reali è di seconda categoria*. Il suo lavoro suggerì anche una proprietà basilare: un insieme di reali ha la «proprietà di Baire» se ha una differenza simmetrica magra con un qualche insieme aperto[8]. È facile vedere che gli insiemi boreliani hanno la proprietà di Baire.

La tesi di Lebesgue [1902] è fondamentale per la moderna teoria dell'integrazione, dato che in essa si introduceva la nuova nozione di misurabilità. In parte ispirato alle idee di Borel, ma venato di aspetti non costruttivi, il concetto di insieme misurabile di Lebesgue attraverso la proprietà di essere chiuso per unioni numerabili sussumeva gli insiemi boreliani; la sua definizione di funzione misurabile, inoltre, attraverso la proprietà di essere densa rispetto a limiti puntuali sussumeva le funzioni di Baire[9].

Il primo grande lavoro di Lebesgue in una direzione significativamente originale sarebbe stato il suo pionieristico articolo sulla teoria descrittiva degli insiemi: nella memoria [1905] Lebesgue studiò le funzioni di Baire, sottolineando che sono esattamente le funzioni definibili con espressioni analitiche, in un senso preciso. Per prima cosa stabiliva una correlazione con gli insiemi boreliani, mostrando che essi sono esattamente le controimmagini degli intervalli aperti tramite le funzioni di Baire. Con questo introduceva la prima gerarchia per gli insiemi boreliani, ove i suoi *insiemi aperti di classe* α sono quelli che non stanno in classi precedenti ma sono controimmagini di un intervallo aperto mediante una funzione di Baire di classe α. Dopo aver verificato varie proprietà di chiusura e fornito caratterizzazioni per queste classi, Lebesgue stabilì due risultati principali. Il primo dimostrava la necessità di contemplare tutti gli ordinali numerabili: *la gerarchia di Baire è propria, ovvero per ogni* α *numerabile esiste una funzione di Baire di classe* α*; analogamente, la corrispondente gerarchia per gli insiemi boreliani è propria.* Il secondo stabiliva che la sua nozione di misurabilità andava oltre la chiusura numerabile: *esiste una funzione misurabile secondo Lebesgue che non è in alcuna classe di Baire; analogamente esiste un insieme misurabile secondo Lebesgue che non è boreliano.*

Il primo di questi risultati fu anche il primo di tutti i risultati di gerarchia; precorreva ricerche fondamentali in logica matematica, in quanto applicava l'argomento di Cantor di enumerazione e diagonalizzazione per ottenere una trascendenza a livello successivo. Anche il secondo risultato di Lebesgue era

[8] La differenza simmetrica di due insiemi consiste degli elementi che stanno nell'uno o nell'altro, ma non in entrambi.

[9] I concetti di categoria e misura sono piuttosto diversi; esistono insiemi di reali co-magri (complementari di un magro) che hanno misura di Lebesgue zero.

piuttosto notevole, nel senso che forniva un insieme esplicitamente definito, che poi risultò il primo esempio di insieme non boreliano «analitico» (cfr. § 2.4). A questo scopo, si adottò un punto di vista secondo il quale i reali servivano a codificare qualcos'altro, ovvero i buoni ordinamenti numerabili; ciò non solo contribuì a inglobare i numeri transfiniti nelle ricerche sugli insiemi di reali, ma anticipò i successivi risultati di «codificazione» in logica matematica.

$\aleph_0$ era entrato a far parte della quotidianità matematica attraverso l'uso crescente che ne aveva fatto il tardo Ottocento; i risultati di Lebesgue, insieme con il lavoro successivo in teoria descrittiva degli insiemi, possono essere considerati come qualcosa che spinse la frontiera matematica dell'infinito attuale, attraverso la seconda classe di numeri di Cantor, fino ad $\aleph_1$. Per ironia della sorte – ma è anche un fatto rivelatore – tutto questo derivò dal lavoro di analisti con una ben definita tendenza costruttiva. Baire [1899, p. 36] vedeva gli ordinali infiniti (e quindi anche la sua gerarchia di funzioni) come una mera *façon de parler*, e continuò a considerare costrutti infiniti solo in potenza. Borel [1898] seguì un approccio pragmatico e sembrò accettare gli ordinali numerabili. Lebesgue era più incerto ma ancora vicino a queste posizioni; con un atteggiamento che ricorda quello iniziale di Cantor, considerò gli ordinali come un sistema di indici, come «simboli» per le classi, ma ciononostante elaborò le loro proprietà di base, fornendo anche una formulazione di dimostrazioni per induzione transfinita [Lebesgue 1905, p. 149].

La misurabilità secondo Lebesgue, la proprietà di Baire e la proprietà dell'insieme perfetto divennero i principali esempi di «proprietà di regolarità», proprietà indicative di insiemi di reali che si comportano bene. La proprietà dell'insieme perfetto era quello che Cantor aveva ottenuto dal suo lavoro sul problema del continuo. Via via che venivano presi in considerazione nuovi insiemi definibili di reali, la portata delle proprietà di regolarità divenne una preoccupazione importante, specialmente perché sembravano andare a toccare le caratteristiche di base dell'interpretazione del significato estensionale del continuo, pur resistendo ad approcci induttivi.

A sviluppare la teoria del transfinito dopo Cantor fu Felix Hausdorff, il cui lavoro mise in luce le ricchezze potenzialmente nascoste nel transfinito di ordine superiore. Matematico *par excellence*, Hausdorff adottò un approccio matematico alla teoria degli insiemi e un approccio estensionale e insiemistico alla matematica: un atteggiamento che avrebbe dominato gli anni a venire. Mentre il lavoro di Cantor – caratterizzato da un'impostazione intensionale tipicamente ottocentesca – ci appare oggi abbastanza remoto, l'opera di Hausdorff ci suona familiare e la vediamo come parte del moderno linguaggio della matematica. Hausdorff [1908] raccolse il suo corposo lavoro sui tipi d'ordine *non numerabili*. Sembrava che Cantor avesse portato il problema del continuo ai limiti del possibile, ma Hausdorff si avventurò con vigore oltre la seconda classe di numeri. Fornì un'elegante analisi dei tipi di ordine lineari dispersi (quelli che non hanno un sottotipo denso) costruendo una gerarchia transfinita. Fu lui a enunciare per primo l'«ipotesi generalizzata del continuo»: per ogni insieme infinito x, non esiste un insieme di numero cardinale strettamente compreso tra quello di x e quello del suo insieme potenza $\mathcal{P}(x)$. Ovvero, usando le ultime notazioni cantoriane:

(GCH) Per ogni α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Hausdorff fu anche il primo a considerare il concetto di «grande cardinale», di cui parleremo più estesamente alla fine del § 2.5.

Il lavoro di Hausdorff [1907] sulle pantachie vide il primo uso dell'ipotesi del continuo (CH) nella pratica della ricerca matematica e gettò le basi per la moderna teoria dei salti (*gaps*) negli ordini lineari. Il termine «pantachia» era stato inizialmente introdotto da Paul Du Bois-Reymond [1880] per denotare sottoinsiemi ovunque densi del continuo; lo aveva poi applicato a vari concetti connessi com le sue ricerche sugli ordini di infinito delle funzioni e sugli infinitesimi. Hausdorff ridefinì il termine pantachia come una collezione di funzioni dai numeri naturali ai reali che sia *massimale* tra quelle linearmente ordinate dalla relazione $<^*$: $f <^* g$ se, per n abbastanza grande, $f(n) < g(n)$.

Per un insieme ordinato $(X, <)$, un $\aleph_0$-gap è un insieme di x_i, $y_i \in X$, con i numero naturale, tale che per $i < j$, $x_i < x_j < y_j < y_i$ ma non esiste $z \in X$ tale che $x_i < z < y_i$ per ogni i. Analogamente, si può definire un $\aleph_1$-gap, rimpiazzando «numero naturale» con «ordinale numerabile». Non fu difficile dimostrare che le pantachie sono prive di insiemi numerabili coiniziali o cofinali e di $\aleph_0$-gap. Considerando le pantachie come continui di ordine superiore, era naturale chiedersi se potevano esserci degli $\aleph_1$-gap, in quanto la loro assenza poteva rappresentare un principio di continuità di ordine superiore. Hausdorff dimostrò che, assumendo CH, tutte le pantachie sono isomorfe e possiedono degli $\aleph_1$-gap. Ottenendo un risultato che si sarebbe poi rivelato importante per la moderna teoria degli insiemi, Hausdorff [1909] fece vedere che si può dimostrare che esiste una pantachia con un $\aleph_1$-gap senza far uso di CH. Nel paragrafo finale di [1907, p. 151], Hausdorff si era posto «il problema della pantachia», ovvero se possa esistere una pantachia senza $\aleph_1$-gap. Sorprendentemente, in un punto precedente dello stesso lavoro [p. 128] aveva dimostrato che, se esistesse una tale pantachia, allora $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$: risultato da cui seguirebbe la negazione di CH. Era la prima volta che una proposizione della matematica corrente comportava la negazione dell'ipotesi del continuo.

2.2. L'assioma della scelta.

Nel primo decennio del XX secolo si assistette ai grandi progressi di Ernst Zermelo (1871-1953) nello sviluppo della teoria degli insiemi[10]. Zermelo era uno stimato matematico applicato che si rivolse alla teoria degli insiemi grazie all'influenza di Hilbert. Il suo primo risultato importante fu la scoperta – indipendente – dell'argomentazione che sarebbe poi stata chiamata «paradosso di Russell». Zermelo [1904] dimostrò il «teorema del buon ordinamento»: *ogni insieme può essere bene ordinato*, assumendo un postulato che poco dopo battezzò «assioma della scelta» (AC). In questo modo, Zermelo liberava il concetto di insieme dall'assunzione implicita del principio cantoriano (ogni insieme ben definito è un insieme bene ordinato), rimpiazzandolo con un assioma esplicito che riguardava una concezione più ampia della nozione di insieme. Da allora in poi, il fatto che esista un buon ordinamento dei reali – uno dei punti di forza del problema del continuo – sarebbe stato considerato una conseguenza dell'assioma della scelta.

Retrospettivamente, l'*argomentazione* con cui Zermelo dimostrò il suo teorema del buon ordinamento può essere vista come un evento chiave per lo sviluppo della teoria degli insiemi [Kanamori 1997]. La possiamo riassumere in questi termini: sia x l'insieme che deve essere bene ordinato e, per l'ipotesi di Zermelo (AC), assumiamo che l'insieme potenza $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$ abbia una funzione di scelta, ovvero una funzione γ tale che per ogni membro non vuoto y di $\mathcal{P}(x)$, $\gamma(y) \in y$. Chiamiamo un sottoinsieme y di x un γ-*insieme* se esiste un buon ordinamento R di y tale che per ogni $a \in y$,

$$\gamma\,(\{z \mid z \notin y \text{ oppure } z\,R\,a \text{ non vale}\}) = a.$$

Cioè, ogni membro di y è ciò che γ «sceglie» fra ciò che non precede già quell'elemento secondo l'ordinamento R. L'osservazione principale è che i γ-insiemi sono coerenti nel senso seguente: se y è un γ-insieme dotato del buon ordinamento R e z è un γ-insieme con il buon ordinamento S, allora $y \subseteq z$ e S è un prolungamento di R, o viceversa. Detto questo, sia ω l'unione di tutti i γ-insiemi. Allora anche ω è un γ-insieme e, essendo massimale, deve essere tutto x, quindi x è bene ordinato.

L'inverso di questo risultato è immediato, in quanto se x è bene ordinato allora l'insieme potenza $\mathcal{P}(x)$ ha una funzione di scelta δ[11]. L'argomento di Zermelo non solo analizzava la connessione tra l'esistenza di un buon ordinamento e quella di una funzione di scelta sugli insiemi potenza, ma anticipava – definendo approssimazioni e utilizzando l'unione – il procedi-

[10] Si veda Kanamori [2004] per altri dettagli su Zermelo e la teoria degli insiemi.

[11] Precisamente, se $<$ è un buon ordinamento di x, per ogni membro non vuoto y di $\mathcal{P}(x)$, si può scegliere come $\delta(y)$ l'elemento minimo di y rispetto all'ordinamento $<$.

mento dimostrativo del teorema di ricorsione transfinita di von Neumann (cfr. § 2.5).

Zermelo sosteneva che l'assioma della scelta – inteso nel senso che *ogni* insieme ha una funzione di scelta – fosse un «principio logico» che veniva «applicato senza esitazione e dappertutto nelle deduzioni matematiche»; questa sua convinzione si rifletteva sul fatto che considerava il teorema del buon ordinamento appunto come un teorema. Il lavoro di Cantor aveva fatto sì che si andasse sempre più esacerbando tra i matematici il dissenso su due questioni collegate: se le collezioni infinite dovessero essere oggetto di ricerca matematica, e fino a che punto fosse possibile estendere il concetto di funzione. L'argomentazione di Zermelo operava a un nuovo livello, più astratto, di concetti e di costruzioni. Il fatto che si usasse esplicitamente una funzione arbitraria operante su sottoinsiemi arbitrari fece divampare molte controversie dopo la pubblicazione della dimostrazione di Zermelo[12]. Questa può essere considerata un punto di svolta per la matematica, e la successiva tendenza ad accettare l'assioma della scelta è sintomatica di un cambiamento di prospettiva.

Una volta che l'assioma della scelta fu reso esplicito, lo si usò in argomentazioni di vario tipo, prime fra tutte quelle per costruire insiemi di reali dotati di particolari proprietà. La nuova risorsa consisteva nell'avere a disposizione una funzione di scelta sull'insieme potenza dei reali o, equivalentemente, un buon ordinamento dei reali: un principio cantoriano, questo, ma ora fondato su un assioma.

Giuseppe Vitali [1905] dimostrò che esiste un insieme di reali che non è misurabile secondo Lebesgue; Felix Bernstein [1908] esibì un insieme di reali che non ha la proprietà dell'insieme perfetto. Presto si vide che nessuno di questi due esempi aveva la proprietà di Baire. Si trattava di risultati notevoli, in quanto con costruzioni abbastanza semplici facevano vedere che le varie proprietà di regolarità non sono universali. In particolare, il risultato di Bernstein mostrava che il particolare approccio di Cantor al problema del continuo si scontrava con la sua stessa strutturazione del problema, basata sul buon ordinamento dei reali. La proprietà dell'insieme perfetto avrebbe continuato a essere oggetto di ricerca, ma non più come strumento per affrontare l'ipotesi del continuo. Fra parentesi, è notevole che nell'era del dopo Cohen (cfr. § 4.2) si sia visto che l'universalità delle proprietà regolari *è* ottenibile insieme a una forma debole, ma significativa, di (AC).

Sulla scia del lavoro fondazionale di Zermelo, il classico testo di Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* [1914], dedicato a Cantor, ebbe un impatto dirompente in teoria degli insiemi e topologia per un'intera generazione di matematici. Questo compendio ricco di risultati proponeva procedimenti

[12] Si veda il capitolo II di Moore [1982], specialmente sulla reazione di Borel, Baire e Lebesgue.

e punti di vista che si sarebbero successivamente radicati nella pratica matematica. Dopo aver dato un chiaro resoconto della prima dimostrazione di Zermelo del teorema del buon ordinamento, Hausdorff [1914, pp. 140 sgg.] ne sottolineava l'aspetto di massimalità fornendo varie versioni del lemma di Zorn due decenni prima di Zorn stesso: una di esse è oggi nota come «principio di massimalità di Hausdorff»[13]. Inoltre, Hausdorff [p. 304] forniva la presentazione oggi considerata standard della gerarchia degli insiemi boreliani, utilizzando la notazione anch'essa utilizzata ancor oggi degli F_σ e dei G_δ. Di particolare interesse è il fatto che Hausdorff [pp. 469 sgg.] utilizzasse un buon ordinamento dei reali per costruire quello che oggi è noto come «paradosso di Hausdorff», una decomposizione della sfera del tutto controintuitiva, che precorreva il più noto paradosso di Banach-Tarski[14]. Il paradosso di Hausdorff fu la prima e spettacolare sintesi fra matematica classica e la nuova concezione astratta zermeliana.

Questi vari risultati basati sull'assioma della scelta, considerati da principio piuttosto sconcertanti, vennero presto incorporati in matematica come esempi sintomatici dell'uso di metodi non costruttivi. Si trattava fondamentalmente di conseguenze del buon ordinamento dei reali, che sviluppavano l'approccio aritmetico di Cantor al continuo visto come una collezione enumerata di punti.

2.3. L'assiomatizzazione.

In risposta ai suoi critici, Zermelo nel 1908 pubblicò una seconda dimostrazione del teorema del buon ordinamento e, con l'assiomatizzazione che andava assumendo un ruolo metodologico generale in matematica, pubblicò anche la prima vera e propria assiomatizzazione della teoria degli insiemi. Com'era già avvenuto per le ricerche di Cantor, non si trattava di un ozioso lavoro di costruzione di strutture, ma di una risposta all'esigenza pressante di edificazione di un nuovo contesto matematico; contesto che in questo caso non era mirato alla formulazione e soluzione di un *problema* come il problema del continuo, ma a chiarire una *dimostrazione*. La motivazione di Zermelo per assiomatizzare la teoria degli insiemi era in buona parte quella di corroborare il proprio teorema del buon ordinamento rendendo esplicite le sue assunzioni sull'esistenza di insiemi, e anche di organizzare in modo

[13] Tale principio afferma che se A è un insieme parzialmente ordinato e B un sottoinsieme totalmente ordinato, allora esiste un sottoinsieme totalmente ordinato di A contenente B e $\subseteq$-massimale.

[14] Il paradosso di Hausdorff afferma che una sfera può essere decomposta in quattro pezzi Q, A, B, C con Q numerabile e A, B, C e $B < C$ tutti a due a due congruenti. Fatto ancora meno plausibile, il paradosso di Banach-Tarski [1924] afferma che una palla può essere decomposta in un numero finito di pezzi che possono essere mossi con movimenti rigidi fino a formare due palle della stessa grandezza di quella originale.

coerente una materia che si era sviluppata nel corso degli anni. Operando la prima trasformazione della nozione di insieme dopo Cantor, Zermelo inaugurò una nuova concezione, astratta e prescrittiva, degli insiemi, strutturati unicamente dalla relazione di appartenenza e governati dagli assiomi – una concezione che presto sarebbe divenuta dominante.

Elenchiamo qui di seguito, nel linguaggio moderno, gli assiomi di Zermelo. La loro funzione è regolamentare le relazioni tra $\in$ e $\subseteq$ e prescrivere la generazione di nuovi insiemi a partire dai precedenti. Ne sarebbe poi derivata l'assiomatizzazione standard, con l'aggiunta di due assiomi ulteriori e la formalizzazione del tutto nella logica del primo ordine (cfr. §§ 2.5 e 3.1).

ASSIOMA DI ESTENSIONALITÀ. *Due insiemi sono uguali esattamente quando hanno gli stessi elementi.* Gli insiemi rappresentano quindi la quintessenza della visione *estensionale* della matematica, in quanto si stipula che comunque si arrivi a un insieme, esiste un preciso criterio di uguaglianza fornito esclusivamente dall'appartenenza.

ASSIOMA DELL'INSIEME VUOTO. *Esiste un insieme che non ha elementi.* Questo assioma serve a sottolineare l'esistenza di un insieme iniziale, l'insieme *vuoto*, indicato con $\emptyset$.

ASSIOMA DELLA COPPIA. *Dati due insiemi x e y, esiste un insieme che contiene esattamente x e y.* L'insieme postulato è denotato $\{x, y\}$ ed è chiamato *coppia* (non ordinata) di x e y. $\{x, x\}$ si abbrevia con $\{x\}$, il *singoletto* di x.

ASSIOMA DELL'UNIONE. *Per ogni insieme x, esiste un insieme che consiste esattamente di quegli insiemi che sono elementi di qualche elemento di x.* L'insieme postulato è denotato con $\bigcup x$ ed è l'*unione* di x, una componente cruciale della dimostrazione di Zermelo [1904]. L'unione binaria, la più comune, è quindi $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$.

ASSIOMA DELL'INSIEME POTENZA. *Per ogni insieme x, esiste un insieme che contiene esattamente i sottoinsiemi di x.* L'insieme postulato è denotato $\mathcal{P}(x)$ ed è l'*insieme potenza* di x, come abbiamo già visto.

ASSIOMA DELLA SCELTA. *Per ogni insieme x che consiste di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, esiste un insieme c tale che ogni membro di x abbia esattamente un elemento in c.* Quindi, c agisce come una funzione di scelta per x visto come famiglia di insiemi. Si tratta di un modo riduzionista di postulare le funzioni di scelta.

ASSIOMA DELL'INFINITO. *Esiste un insieme che ha $\emptyset$ come elemento e tale che se y è un suo elemento, allora lo è anche $y \cup \{y\}$.* Questo è diventato il modo usuale di postulare l'esistenza di un insieme infinito, a causa della definizione di ordinale (cfr. § 2.5). Zermelo in realtà enunciò il suo assioma con «$y \cup \{y\}$» rimpiazzato da «$\{y\}$», ottenendo un insieme informalmente descrivibile come $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$.

ASSIOMA DI SEPARAZIONE. *Per ogni insieme x e ogni proprietà definita P, esiste un insieme che consiste di quegli elementi di x che hanno la proprietà P.* Una volta che una collezione sia stata riunita in un insieme, possiamo formare un sottoinsieme «separando» elementi mediante una proprietà. Per esempio, se a è un altro insieme,

$$x \cap a = \{y \in x \mid y \in a\}$$

e

$$x - a = \{y \in x \mid y \notin a\}$$

sono insiemi; e, se x non è vuoto, possiamo «separare» l'intersezione di x, $\bigcap x = \{a \mid a \in y \text{ per ogni } y \in x\}$, da un elemento di x. Secondo Zermelo una proprietà è «*definita*, se le relazioni fondamentali del dominio, per il tramite degli assiomi e delle leggi logiche universalmente valide, determinano senza arbitrarietà se essa valga oppure no». Ma, non essendoci una logica sottostante formalizzata, l'ambiguità delle proprietà ben definite sarebbe diventata una questione cruciale, destinata a essere risolta solo decenni dopo, mediante l'assiomatizzazione al primo ordine (cfr. § 3.1). In ogni caso, Zermelo vide che l'idea della separazione è sufficiente per uno sviluppo della teoria degli insiemi che permette ancora la formazione «logica» di insiemi mediante proprietà.

Diamo uno sguardo d'insieme a questi assiomi. Estensionalità, insieme vuoto e coppia servivano per gettare le basi degli insiemi. Gli assiomi dell'infinito e dell'insieme potenza assicuravano un quadro sufficientemente ricco per le costruzioni insiemistiche. Ponendo un freno agli eccessi del problematico «tutti» usato dai logici, l'assioma dell'insieme potenza forniva il modo per ottenere «tutti» i sottoinsiemi di un insieme dato, così come quello della separazione serviva a catturare «tutti» gli elementi di un insieme dato che soddisfano una proprietà. Infine, unione e scelta completavano i principî di esistenza insiemistici necessari per inquadrare le dimostrazioni zermeliane del teorema del buon ordinamento.

Si può pensare che l'assiomatizzazione della geometria di Hilbert nelle sue *Grundlagen der Geometrie* del 1899 possa essere servita da modello per l'assiomatica di Zermelo, così come il saggio di Dedekind del 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* sui fondamenti dell'aritmetica può esserne considerato un precursore; ma bisogna tener conto dell'esistenza di differenze cruciali che riguardano sia l'argomento, sia il ruolo delle dimostrazioni. Nelle intenzioni e nei risultati, Dedekind e Hilbert si erano dedicati all'analisi di un argomento circoscritto. Dedekind in particolare si era dato molto da fare per preservare la dimostrazione come veicolo principe verso l'astrazione e la generalizzazione algebriche. Al pari dei costrutti algebrici, gli insiemi erano nuovi per la matematica e sarebbero stati incorporati al suo interno stabilendo opportune regole dimostrative: proprio come gli assiomi di Euclide per la geometria avevano fissato le costruzioni geometriche ammissibili, gli assiomi della teoria degli insiemi avrebbero determinato le regole per la generazione e la manipolazione degli insiemi. Ma diversamente dallo sviluppo della matematica dall'aritmetica commerciale e dalla geometria greca, gli insiemi e i numeri transfiniti non erano gravati da significativi antecedenti, e nemmeno sussistevano elementi preesistenti su cui appoggiarsi. Mancava un substrato condiviso. Avventurandosi in una terra straniera, alcuni intrepidi matematici svilupparono una familiarità con gli insiemi, guidati passo dopo passo dal solo quadro assiomatico. A Dedekind era bastato lavorare con gli insiemi enunciando poche definizioni e poche proprietà, che prefiguravano gli assiomi di estensionalità, dell'unione e dell'infinito. Zermelo fornì altre regole: separazione, insieme potenza e scelta.

Il lavoro di Zermelo [1908], specialmente con la sua interpretazione della teoria cantoriana delle cardinalità in termini di funzioni formulate come costrutti insiemistici, inaugurò il *riduzionismo insiemistico*. Zermelo, infatti, fu il primo a intraprendere la riduzione di concetti e ragionamenti matematici a concetti insiemistici e ragionamenti assiomatici, basati su insiemi che svolgono la funzione di oggetti matematici. La teoria degli insiemi avrebbe fornito l'impalcatura su cui edificare la matematica, e gli assiomi di Zermelo sarebbero stati in armonia con la pratica matematica emergente. Nella prospettiva degli sviluppi successivi, l'analisi di Zermelo servì inoltre a separare cosa dovesse essere considerato insiemistico da ciò che invece era presumibilmente logica pura. Aspetto questo che si sarebbe rilevato particolarmente importante per gli assiomi dell'infinito e dell'insieme potenza, e fu strategicamente compiuto trattando i problemi del concetto di proprietà mediante l'assioma di separazione. Basata su assiomi generativi e prescrittivi, la teoria degli insiemi sarebbe diventata più combinatoria e meno logica. Con queste caratteristiche, gli assiomi di Zermelo si dimostrarono più che adeguati per costituire una base riduzionista della matematica, almeno per fornire surrogati per gli oggetti matematici; e se si pensa agli sviluppi successivi, questi avrebbero confermato che la teoria degli insiemi poteva servire anche come ambito per risolvere problemi di coerenza relativa.

2.4. Insiemi analitici e proiettivi.

Un decennio dopo il pionieristico lavoro di Lebesgue [1905], la teoria descrittiva degli insiemi emerse come disciplina distinta grazie agli sforzi del matematico russo Nikolaj Nikolaevič Luzin. Mentre era studente a Parigi, si era familiarizzato con il lavoro degli analisti francesi e iniziò a studiare le funzioni di Baire usando l'ipotesi del continuo (CH) in modo sottile e originale. Quello che è noto oggi come «insieme di Luzin» è un insieme non numerabile di reali la cui intersezione con un qualunque insieme magro è numerabile; Luzin dimostrò che CH *implica l'esistenza di un insieme di Luzin*[15]. Questo sarebbe diventato un uso paradigmatico di CH, nel senso che una costruzione ricorsiva veniva portata avanti per $\aleph_1$ passi, e ad ogni passo c'era solo un insieme numerabile di condizioni da prendere in considerazione – in questo caso applicando il teorema di categoria di Baire. Luzin fece vedere che la funzione caratteristica del suo insieme sfuggiva alla classificazione delle funzioni di Baire, e gli insiemi di Luzin sono da allora diventati esempi paradigmatici di insiemi speciali di reali.

A Mosca Luzin istituì un importante seminario dove, fin dall'inizio, uno degli argomenti più significativi fu la «teoria descrittiva delle funzioni». Il giovane polacco Wacław Sierpiński fu tra i suoi primi frequentatori (durante la Prima guerra mondiale, dopo un breve periodo di internamento, gli fu concesso di rimanere a Mosca), e fu certo questa partecipazione la scintilla che accese la collaborazione decennale tra Luzin e Sierpiński, incoraggiando anche l'impegno di quest'ultimo nello sviluppo di una scuola polacca di matematica orientata allo studio della teoria descrittiva degli insiemi.

Delle tre proprietà di regolarità – misurabilità secondo Lebesgue, proprietà di Baire e proprietà dell'insieme perfetto (cfr. § 2.1) – le prime due erano di immediata dimostrazione per gli insiemi boreliani. Ma poco si sapeva sulla proprietà dell'insieme perfetto, tranne il risultato di Cantor (cioè che gli insiemi chiusi hanno questa proprietà) e quello di Bernstein (esiste un insieme di reali che non la possiede). Un allievo di Luzin, Pavel Sergeevič Aleksandrov [1916], stabilì il clamoroso risultato che gli insiemi boreliani hanno la proprietà dell'insieme perfetto e quindi che l'ipotesi del continuo vale per gli insiemi boreliani[16].

Partendo da un errore che aveva trovato in un articolo di Lebesgue, un altro studente di Luzin, Michail Jakovlevič Suslin, cominciò a studiare gli *insiemi analitici*, inaugurando la teoria descrittiva degli insiemi. Suslin [1917] definiva questi insiemi in termini di una esplicita operazione $\mathcal{A}$ ed enunciava due risultati fondamentali: *un insieme B di reali è boreliano se e solo se B e $\mathbb{R} - B$ sono entrambi analitici*; *esiste un insieme analitico che non è boreliano*. Questa fu la sua sola pubblicazione: Suslin infatti morì a Mosca nel 1919, a soli 25 anni, durante un'epidemia di tifo. In una nota che accompagnava il lavoro del suo allievo, Luzin [1917] enunciò le proprietà di regolarità: *ogni insieme analitico è misurabile secondo Lebesgue, ha la proprietà di Baire e ha la proprietà dell'insieme perfetto*; quest'ultimo risultato veniva attribuito a Suslin.

Luzin e Sierpiński [1918 e 1923] fornirono le dimostrazioni, e il secondo articolo fu fondamentale nello spostare l'interesse verso gli insiemi coanaliti-

[15] Paul Mahlo [1913] stabilì lo stesso risultato.

[16] Anche Hausdorff, dopo aver ottenuto un risultato parziale [1914, pp. 465 sgg.], dimostrò sostanzialmente che i boreliani hanno la proprietà dell'insieme perfetto [Hausdorff 1916].

ci, cioè gli insiemi di reali X tali che $\mathbb{R} - X$ è analitico. I due autori fornirono una basilare *rappresentazione ad albero* degli insiemi coanalitici, dalla quale discendevano i principali risultati di quel periodo.

Dopo la prima ondata di esiti della teoria descrittiva degli insiemi – inaugurata da Suslin [1917] e Luzin [1917] –, Luzin [1925*a* e *b*] e Sierpiński [1925] estesero il dominio di studio agli *insiemi proiettivi*. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$, la *proiezione* di Y è

$$pY = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid \exists y\, ((x_1, \ldots, x_k, y) \in Y)\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Suslin [1917] aveva in sostanza notato che *un insieme di reali è analitico se e solo se è la proiezione di un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$ *boreliano*[17]. Luzin e Sierpiński presero come operazione di base la proiezione e definirono proiettivi quegli insiemi ottenibili dai boreliani iterando le applicazioni di proiezione e complemento. La corrispondente gerarchia dei sottoinsiemi proiettivi di $\mathbb{R}^k$ è definita, in notazione moderna, nel modo seguente.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^k$, A è Σ^1_1 se e solo se $A = pY$ per qualche insieme boreliano $Y \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$. In altre parole, A è analitico come nel caso $k = 1$ e, se n è un intero maggiore di zero,

$$A \text{ è } \Pi^1_n \text{ se e solo se } \mathbb{R}^k - A \text{ è } \Sigma^1_n;$$

$$A \text{ è } \Sigma^1_{n+1} \text{ se e solo se } A = pY \text{ per qualche insieme } Y \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \text{ che sia } \Pi^1_n$$

$$A \text{ è } \Delta^1_n \text{ se e solo se } A \text{ è } \Sigma^1_n \text{ e } \Pi^1_n.$$

Luzin [1925*b*] e Sierpiński [1925] adattarono la riformulazione di Lebesgue dell'argomento diagonale di Cantor per dimostrare che la gerarchia proiettiva è propria, e presto si stabilirono le sue proprietà di base. Tuttavia, questa ricerca incontrò difficoltà di fondo fin dall'inizio. Luzin [1925*b*] sottolineò che determinare se gli insiemi Π^1_1 – gli insiemi coanalitici che sono alla base della gerarchia – abbiano la proprietà dell'insieme perfetto, costituiva un problema importante. Arrivò ad asserire, quasi profeticamente, che i suoi sforzi per trovarne la soluzione lo avevano portato alla conclusione «del tutto inaspettata» che «non sappiamo e *non sapremo mai*» se ogni membro della famiglia degli insiemi proiettivi – nonostante essa abbia cardinalità $2^{\aleph_0}$ e consista di «insiemi effettivi» – abbia cardinalità $2^{\aleph_0}$ se non numerabile, abbia la proprietà di Baire, e neanche se sia misurabile secondo Lebesgue.

Luzin [1925*a*], in particolare, richiamava l'attenzione sul problema specifico di stabilire se gli insiemi Σ^1_2 siano misurabili secondo Lebesgue. Entrambe queste difficoltà furono segnalate anche da Sierpiński [1925]. La

[17] I sottoinsiemi boreliani di $\mathbb{R}^k$ sono definiti in modo analogo a quelli di $\mathbb{R}$.

teoria descrittiva degli insiemi sarebbe rimasta in questa impasse per oltre un decennio, per poi esserne sorprendentemente liberata dalla penetrante analisi di Gödel basata su metodi metamatematici (cfr. § 3.2).

Nella moderna teoria degli insiemi, al posto dei «reali» si considera lo «spazio di Baire», l'insieme delle funzioni dai numeri naturali ai numeri naturali (dotato della topologia prodotto). Lo spazio di Baire è omeomorfo agli irrazionali, il «dominio fondamentale» di una monografia di Luzin del 1930, e da allora è divenuto evidente che uno studio insiemistico del continuo può venire formulato più efficacemente in termini di spazi di Baire, abbandonando le intuizioni geometriche in favore di quelle combinatorie.

2.5. Il completamento dell'assiomatizzazione.

Negli anni Venti del Novecento nuove iniziative strutturarono meglio il quadro assiomatico zermeliano con nuove caratteristiche e corrispondenti sviluppi assiomatici, e le iniziative più ricche di conseguenze furono quelle intraprese da John von Neumann[18]. Von Neumann operò una specie di controriforma che portò all'incorporazione di un nuovo assioma, l'«assioma di rimpiazzamento». I numeri transfiniti erano stati centrali per Cantor, ma periferici per Zermelo; von Neumann li ricostruì come insiemi a tutti gli effetti – gli ordinali – e stabilì la loro efficacia formalizzando la ricorsione transfinita, ovvero il metodo per definire insiemi in modo sequenziale, basato su insiemi definiti precedentemente e applicato con un'indicizzazione transfinita.

Gli ordinali concretizzano l'idea di prendere come relazione di precedenza in un buon ordinamento semplicemente l'appartenenza.

Definizione 2.2. Un insieme x è *transitivo* se $\bigcup x \subseteq x$, cioè se $a \in b$ e $b \in x$, allora $a \in x$.

Un insieme x è un *ordinale* (di von Neumann) se x è transitivo e la relazione di appartenenza ristretta a $x = \{y \mid y \in x\}$ è un buon ordinamento di x.

I primissimi ordinali sono

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

e sono identificati con i numeri 0, 1, 2, 3, … . Se x è un ordinale, allora lo è anche $x \cup \{x\}$, il successore di x, e questo spiega il modo in cui l'assioma dell'infinito è stato formulato nel paragrafo precedente. È diventato consueto usare lettere greche (α, β, γ, …) per denotare gli ordinali.

Von Neumann, come già Mirimanoff prima di lui, stabilì per gli ordinali la proprietà fondamentale dei numeri ordinali di Cantor: *ogni insieme bene ordinato è isomorfo, come insieme ordinato, a esattamente un ordinale di von Neu-*

[18] Fra il 1917 e il 1920, un matematico russo emigrato in Svizzera, Dmitrij Mirimanoff (1861-1945), lo aveva parzialmente anticipato, ma in un ambito preassiomatico.

mann. La dimostrazione era un tipico argomento basato sul rimpiazzamento, e quindi fu la prima a introdurre quell'assioma nella teoria degli insiemi.

Se x è un insieme e $P(v, w)$ è una proprietà, diciamo che la proprietà è *funzionale su x* se per ogni $a \in x$ esiste esattamente un b tale che $P(a, b)$.

Assioma di rimpiazzamento. Per ogni insieme x e per ogni proprietà $P(v, w)$ funzionale su x,

$$\{b \mid P(a, b) \text{ per qualche } a \in x\}$$

è un insieme.

Questo assioma permette di introdurre nuovi insiemi che vengono generati quando i membri di un insieme sono «rimpiazzati» secondo una proprietà e implica immediatamente l'assioma di separazione[19].

Von Neumann compie così il passo cruciale di attribuire agli ordinali il ruolo dei numeri ordinali di Cantor con i loro numerosi principî di generazione. Ora, dato che gli ordinali sono usati per calibrare i buoni ordinamenti, il fatto che un buon ordinamento sia una parte iniziale propria di un altro corrisponde, nel caso degli ordinali, alla relazione di appartenenza e può essere scritto come segue:

$$\alpha < \beta \text{ se e solo se } \alpha \in \beta.$$

Per questa riformulazione dei numeri ordinali e per definire l'aritmetica degli ordinali, von Neumann si rese conto che era necessario stabilire il teorema di ricorsione transfinita, il teorema che rende valide le definizioni per ricorsione su buoni ordinamenti. La sua dimostrazione era stata anticipata da quella di Zermelo del 1904, ma il rimpiazzamento era necessario non solo per la dimostrazione, ma addirittura per la formulazione stessa del teorema. Avendo gli ordinali a disposizione, von Neumann completò la risistemazione del transfinito cantoriano definendo i cardinali come «ordinali iniziali», quegli ordinali che non sono in corrispondenza biunivoca con nessun loro predecessore.

Gli ordinali iniziali infiniti sono così denotati:

$$\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha \ldots;$$

ω è dunque l'insieme dei numeri naturali nella costruzione ordinale, e l'identificazione delle due connotazioni differenti è data da

$$\omega_\alpha = \aleph_\alpha,$$

[19] Per vedere che il rimpiazzamento implica la separazione, supponiamo che x sia un insieme e P sia una proprietà (definita). Se non ci sono elementi di x che soddisfano P, abbiamo concluso. Altrimenti, fissiamo un tale elemento y_0. Per ogni $a \in x$, diciamo che vale $P(a, a)$ se a soddisfa P e vale $P(a, y_0)$ altrimenti. Allora l'insieme «rimpiazzato» $\{b \mid P(a, b)$ per qualche $a \in x\}$ è l'insieme degli elementi di x che soddisfano P.

dove il membro sinistro è un ordinale di von Neumann e il membro destro è il numero cardinale di Cantor. Ogni insieme x (grazie all'assioma della scelta) è bene ordinabile e quindi in corrispondenza biunivoca con un ordinale iniziale ω_α, e la *cardinalità* di x è $|x| = \aleph_\alpha$. Si è soliti utilizzare le lettere collocate verso la metà dell'alfabeto greco (κ, λ, μ, …) per denotare gli ordinali iniziali nel loro ruolo di cardinali. Un cardinale *successore* è uno della forma $\aleph_{\alpha+1}$ ed è denotato κ^+ dove $\kappa = \aleph_\alpha$. Un cardinale che non è un successore è chiamato cardinale *limite*. L'ipotesi del continuo (CH) potrebbe essere ora rienunciata semplicemente come:

(CH′) Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(\omega)$ e ω_1,

dove con ω_1 s'intende il minimo ordinale non numerabile.

L'assioma di rimpiazzamento è stato successivamente considerato in una certa misura meno necessario o importante degli altri assiomi, in quanto – si sosteneva – questo assioma avrebbe esercitato i suoi effetti soltanto su insiemi di grande cardinalità. Inizialmente, Abraham Fraenkel [1922] e Thoralf Skolem [1923] avevano (indipendentemente) proposto di aggiungere il rimpiazzamento per garantire che $E(a) = \{a, \mathcal{P}(a), \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)), \ldots\}$ sia un insieme quando a è il particolare insieme infinito $Z_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$ postulato dall'originale assioma di Zermelo dell'infinito; infatti, come essi sottolinearono, gli assiomi di Zermelo non sono sufficienti a stabilire questa proprietà. Comunque, nemmeno l'esistenza dell'insieme $E(\emptyset)$ può essere dimostrata a partire dagli assiomi di Zermelo[20], e se anche il suo assioma dell'infinito fosse riformulato in modo da includere $E(\emptyset)$, ci sarebbero ancora molti insiemi finiti a tali che l'esistenza dell'insieme $E(a)$ non potrebbe essere dimostrata [cfr. Mathias 2001]. Il rimpiazzamento serve a correggere la situazione ammettendo nuovi insiemi infiniti ottenuti «rimpiazzando» membri del singolo insieme infinito dato dall'assioma dell'infinito. In ogni caso, l'uso a tutto campo del rimpiazzamento è parte integrante e costitutiva della ricorsione transfinita, strumento usato dappertutto nella moderna teoria degli insiemi, e fu proprio per incorporare formalmente questo metodo nella teoria degli insiemi, così come richiedevano le sue dimostrazioni, che von Neumann introdusse il rimpiazzamento.

Von Neumann (e prima di lui Mirimanoff, Fraenkel e Skolem) aveva anche considerato gli effetti salutari della restrizione dell'universo degli insiemi agli insiemi ben fondati. Gli insiemi *ben fondati* sono quelli appartenenti a qualche «rango» V_α, e questi insiemi sono definibili mediante ricorsione transfinita:

$$V_0 = \emptyset,\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \text{ e } V_\delta = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \delta\} \text{ per ordinali limite } \delta.$$

[20] L'unione di $E(Z_0)$, con la relazione di appartenenza ristretta ad esso, verifica gli assiomi di Zermelo ma non ha $E(\emptyset)$ come membro.

V_ω consiste degli insiemi «ereditariamente finiti», $\omega \in V_{\omega+1}$, e $\mathcal{P}(\omega) \in V_{\omega+2}$, quindi già in questi livelli iniziali ci sono le controparti insiemistiche di molti oggetti della matematica.

Il fatto che l'universo V di tutti gli insiemi sia la *gerarchia cumulativa*

$$V = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \text{ è un ordinale}\}$$

equivale quindi a dire che ogni insieme è ben fondato. Von Neumann essenzialmente dimostrò che questa asserzione equivale a una semplice asserzione sugli insiemi.

Assioma di fondazione. $\forall x\, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(x > y = \emptyset))$.

Quindi, gli insiemi ben fondati e non vuoti hanno elementi $\in$-minimali. Se un insieme x verifica $x \in x$, allora $\{x\}$ non è ben fondato; similmente, se ci sono $x_1 \in x_2 \in x_1$, allora $\{x_1, x_2\}$ non è ben fondato. Gli ordinali e gli insiemi coerenti di ordinali sono ben fondati, e la buona fondatezza può essere vista come una generalizzazione della proprietà di essere un ordinale, dove però viene meno la restrizione della transitività. L'assioma di fondazione elimina patologie come $x \in x$ e mediante l'interpretazione della gerarchia cumulativa fornisce metafore su come costruire l'universo degli insiemi e la possibilità di argomenti induttivi per stabilire risultati su tutti gli insiemi.

In un suo notevole lavoro, Zermelo [1930] enunciò la propria assiomatizzazione definitiva della teoria degli insiemi, suggerendo al contempo in maniera originale e sintetica una serie di modelli che avrebbero avuto un'influenza decisiva sulla matematica moderna. Lavorando in quello che chiameremmo oggi un contesto del secondo ordine, Zermelo estese la sua assiomatizzazione del 1908 aggiungendo il rimpiazzamento e la fondazione.

In questa assiomatizzazione si può ravvisare quella oggi diventata standard per la teoria degli insiemi, la cosiddetta «ZFC» (*Zermelo-Fraenkel with Choice*, assiomi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma della scelta): la principale differenza sta nel fatto che quest'ultima è una teoria del primo ordine (cfr. § 3.1). La lettera «F» rende merito al suggerimento di Fraenkel di aggiungere il rimpiazzamento, e la «C» ricorda il fatto che l'assioma della scelta viene esplicitamente menzionato. «ZF», Zermelo-Fraenkel, è il sistema di assiomi ZFC senza assioma della scelta ed è una teoria di base per studiare sia proposizioni più deboli dell'assioma della scelta, sia proposizioni che lo contraddicono.

Zermelo portava così a compimento la sua trasformazione della nozione di insieme: la sua visione astratta e prescrittiva veniva consolidata introducendo ulteriori assiomi che strutturavano l'universo degli insiemi. Il rimpiazzamento e la fondazione mettevano a fuoco il concetto di insieme: il primo di questi due assiomi forniva i mezzi per la ricorsione e l'induzione transfinita; il secondo rendeva possibile l'applicazione di questi metodi per ottenere risultati su *tutti* gli insiemi. Al giorno d'oggi è diventato quasi una banalità asserire che la fondazione sia il solo assioma non necessario per formulare la matematica in termini insiemistici; ma questo assioma è anche la caratteristica saliente che distingue la ricerca in teoria degli insiemi come settore autonomo della matematica. Infatti, possiamo dire che la moderna teoria degli insiemi è essenzialmente uno studio espresso in termini di buona fondatezza, dove le dottrine cantoriane sul buon ordinamento sono adattate alla concezione zermeliana generativa e prescrittiva degli insiemi. Disponendo del rimpiazzamento e della fondazione, Zermelo poté fornire modelli naturali per i suoi assiomi e stabilire risultati di isomorfismo algebrico, identificazione con segmenti iniziali e immersione tra i suoi modelli. Infine, Zermelo postulò una serie infinita dei suoi modelli, ognuno dei quali era un insieme nel successivo, come estensioni naturali delle loro gerarchie cumulative.

Zermelo trovò una semplice condizione insiemistica, l'*inaccessibilità dei cardinali*, che caratterizza l'altezza ordinale dei suoi modelli, cioè quegli ordinali ρ tali che i predecessori di ρ siano esattamente gli ordinali di un modello.

Definizione 2.3. Per ogni cardinale infinito κ:

(i) la *cofinalità* di κ è la minima cardinalità di un insieme $x \subseteq \kappa$ cofinale in κ: per ogni $\alpha < \kappa$ esiste $\beta \in x$ con $\alpha \leq \beta$;
(ii) κ è *regolare* se coincide con la propria cofinalità, altrimenti viene detto *singolare*;
(iii) κ è un *limite forte* se per ogni cardinale $\beta < \kappa$, $2^\beta < \kappa$;
(iv) κ è *inaccessibile* se è regolare e limite forte.

$\aleph_0$ è regolare; $\aleph_1$, $\aleph_2$, … e in generale tutti i cardinali successori sono regolari. Il cardinale limite $\aleph_\omega$ è singolare, in quanto ha un sottoinsieme cofinale numerabile $\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots\}$. Già Hausdorff [1908] aveva preso in esame la possibilità di avere un cardinale limite regolare. I cardinali furono introdotti in seguito per disporre di una nozione più restrittiva, chiusa rispetto all'operazione «insieme potenza»; fu Zermelo a fornire la prima motivazione strutturale per questi cardinali, come delimitatori dei suoi modelli naturali.

I cardinali inaccessibili sono stati il modesto inizio della teoria dei *grandi cardinali*, un importante filone di ricerca nella moderna teoria degli insiemi, rivolto allo studio di ipotesi forti e di problemi di forza di coerenza. Le ipotesi sui grandi cardinali presuppongono l'esistenza di strutture nei livelli superiori della gerarchia cumulativa, la maggior parte delle volte postulando cardinali che prescrivono la loro stessa inaccessibilità rispetto ai cardinali più piccoli. Già negli anni Settanta, si è visto che queste ipotesi formano una gerarchia naturale di proposizioni sempre più forti che trascendono ZFC.

Il numero della rivista in cui apparve l'articolo di Zermelo del 1930 conteneva anche il pionieristico lavoro di Stanisław Ulam [1930] sui *cardinali misurabili*, destinati a diventare i più importanti fra i grandi cardinali.

Per ogni insieme s, U è un *ultrafiltro* (non principale) su s se U è una collezione di sottoinsiemi di s diversi dall'insieme vuoto che gode delle tre proprietà seguenti: se $x \in U$ e $x \subseteq y \subseteq s$, allora $y \in U$; se $x \in U$ e $y \in U$, allora $x > y \in U$; e per ogni $x \subseteq s$, o $x \in U$ oppure $s - x \in U$.

Per ogni cardinale λ, un ultrafiltro U è λ-*completo* se per ogni $D \subseteq U$ di cardinalità minore di λ, $\bigcap D \in U$. Infine, un cardinale non numerabile κ si dice *misurabile* se esiste un ultrafiltro κ-completo su κ. Quindi, un cardinale misurabile è un cardinale il cui insieme potenza è strutturato con una «misura» a due valori con una forte proprietà di chiusura.

Con la nozione di cardinale misurabile venivano a confluire due linee di ricerca, entrambe di ascendenza cantoriana: quella volta all'estenzione del concetto di numero nel transifinito e quella relativa allo studio dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definibili. In effetti, la definizione stessa di cardinale misurabile derivava da considerazioni di teoria della misura legata alla misurabilità secondo Lebesgue di insiemi di reali e comportava l'inaccessibilità nel transfinito. Il concetto introdotto da Ulam, inoltre, fece sorgere un problema che avrebbe mantenuto vivo l'interesse verso i grandi cardinali per i successivi tre decenni: *il minimo cardinale inaccessibile può essere misurabile?* Negli anni Sessanta furono trovate una caratterizzazione strutturale e alcune proprietà della misurabilità che divennero fondamentali nel contesto neozermeliano dell'importanza accordata alla buona fondazione (cfr. § 3.3).

2.6. Equivalenze e conseguenze.

L'assioma della scelta (AC) e l'ipotesi del continuo (CH) cominciarono ben presto a essere studiati non più come un assioma sottinteso o un'ipotesi primitiva, ma come parte della matematica. Si trovarono conseguenze e anche equivalenze, e questa matematizzazione – com'era avvenuto con lo sviluppo della geometria non euclidea – finì con il condurre a un drastico ridimensionamento degli atteggiamenti metafisici e del relativo codazzo di problemi riguardanti la verità e l'esistenza.

La Polonia, a partire dalla sua riunificazione nel 1918, si caratterizzò per un'attiva scuola di matematica che stabilì risultati fondamentali in logica matematica, topologia e analisi. A Varsavia, Tarski e Kuratowski, insieme con Sierpiński, stavano dando contributi cruciali alla teoria degli insiemi e alla delucidazione del suo ruolo in matematica. La scuola polacca portò avanti penetranti ricerche sul ruolo dell'assioma della scelta in teoria degli insiemi e in analisi. Le prime pubblicazioni di Sierpiński, che culminarono nell'articolo di rassegna [Sierpiński 1918], non solo trattavano costruzioni specifiche ma mostravano quanto tale assioma fosse profondamente coinvolto nello sviluppo informale della cardinalità, della misura e della gerarchia di Borel, confermando la tesi di Zermelo [1904, p. 516] secondo cui esso è applicato «ovunque nella deduzione matematica».

Tarski stabilì che tutta una serie di proposizioni dell'aritmetica cardinale sono equivalenti all'assioma della scelta; Lindenbaum e Tarski [1926] dimostrarono il risultato strettamente imparentato e di grosso impatto che l'ipotesi generalizzata del continuo (GCH, nella forma «$\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$ è falsa per ogni coppia di cardinali infiniti $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$») in realtà implica AC. Veniva così stabilita un'altra connessione tra i problemi cantoriani della cardinalità e del buon ordinamento[21].

Più ancora che sull'assioma della scelta, le ricerche di Sierpiński si indirizzarono verso l'ipotesi del continuo – compendiate nella monografia [1934]. Qui venivano fornite parecchie notevoli versioni equivalenti dell'ipotesi del continuo, per esempio che il piano $\mathbb{R}^2$ è l'unione di un insieme numerabile di curve, dove una *curva* è un insieme della forma $\{(x, y) | y = f(x)\}$ o $\{(x, y) | x = f(y)\}$, dove f è una funzione reale [Sierpiński 1934, p. 11].

Sierpiński presentava inoltre numerose conseguenze dell'ipotesi del continuo riprese dalla letteratura, e in particolare una che ne implicava tutta una schiera. Luzin [1914] aveva dimostrato che CH *implica che esiste un insieme di Luzin*: un insieme non numerabile di reali la cui intersezione con ogni insieme magro è numerabile (cfr. § 2.4). Diciamo che un insieme X di reali ha *fortemente misura zero* se per ogni successione $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ di reali positivi esiste una successione di intervalli $I_0, I_1, I_2, \ldots$ tali che la lunghezza di I_n è minore di ε_n per ogni n e $X \subseteq \bigcup_n I_n$. Borel nel 1919 aveva congetturato che tali insiemi fossero numerabili; ma Sierpiński [1928] mostrò che *ogni insieme di Luzin ha fortemente misura zero*. Analogamente agli insiemi di Luzin, un insieme di Sierpiński è un insieme non numerabile la cui intersezione con ogni insieme di misura di Lebesgue zero è numerabile. Sierpiński [1924] dimostrò che CH *implica che esiste un insieme di Sierpiński*, e in seguito [1934] mise in evidenza una possibile dualità tra misura e categoria.

Le ricerche di Fritz Rothberger avrebbero avuto conseguenze rilevanti per il problema del continuo. Rothberger osservò che se esistono sia gli insiemi di Luzin, sia quelli di Sierpiński, allora essi hanno cardinalità $\aleph_1$, sicché l'esistenza congiunta di tali insiemi della cardinalità del continuo implica CH [Rothberger 1938]. In seguito, in penetranti analisi dei lavori di Sierpiński e di Hausdorff sui *gaps* (cfr. § 2.1), Rothberger [1939 e 1948] considerò altri insiemi e implicazioni tra proprietà cardinali del continuo indipendenti da CH. Fu di nuovo chiarito che senza CH si possono ancora isolare cardinali

[21] D'altra parte, il fatto che non ci siano cardinali intermedi tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ non basta a procurare un buon ordinamento dei reali. Sulla base del risultato di Lindenbaum-Tarski come pubblicato in Specker [1954], un rafforzamento sufficiente di tale ipotesi è che non ci siano cardinali intermedi nemmeno tra $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ e $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

non numerabili minori o uguali a $2^{\aleph_0}$ che misurano e limitano varie costruzioni ricorsive: questo approccio sarebbe rifiorito mezzo secolo dopo nello studio delle *caratteristiche cardinali* (o *invarianti*) del continuo.

Questi risultati misero in una nuova luce l'ipotesi del continuo, evidenziando la sua forza come principio di costruzione. Dall'ipotesi che i reali ammettano un buon ordinamento erano state dedotte varie conseguenze, ma ce n'era una fornita da CH che permetteva costruzioni ricorsive, in cui a ogni passo si dovevano manipolare solo un'infinità numerabile di condizioni, corrispondenti ad altrettanti reali. Tuttavia, mentre le nuove costruzioni che usavano l'assioma della scelta, anche se in un primo momento controverse, finirono con l'essere accettate contestualmente all'accettazione dell'assioma stesso e come espressioni di potenziale ricchezza, le costruzioni che usavano l'ipotesi del continuo si scontravano proprio con il senso di ricchezza del continuo. Furono le ricerche *matematiche* su CH che sollevarono dubbi via via più consistenti sulla sua verità e, ancor di più, sulla sua dimostrabilità (cfr. § 3.3).

3. *La coerenza.*

3.1. La logica del primo ordine.

Il lavoro di Zermelo [1930] era in parte una risposta alla difesa appassionata che Skolem[22] andava facendo dell'idea di inquadrare gli assiomi di Zermelo del 1908 nella logica del primo ordine. La logica del primo ordine è la logica dei linguaggi formali che consistono di formule costruite a partire da simboli fissati di funzione e predicato, usando i connettivi logici e i quantificatori del primo ordine $\forall$ e $\exists$, che variano sugli *elementi* di un universo di discorso. La logica del secondo ordine ha invece quantificatori che variano sulle proprietà o sulle collezioni di elementi.

La logica del primo ordine era emersa nelle lezioni di Hilbert del 1917 come un sistema limitato potenzialmente adatto per l'analisi matematica. Provenendo da una tradizione diversa – algebrica –Skolem [1920] aveva stabilito un risultato pionieristico per i metodi semantici con il teorema di Löwenheim-Skolem: *se una collezione numerabile di formule del primo ordine è soddisfacibile, allora essa è soddisfacibile in un universo finito o numerabile*.

Per la teoria degli insiemi Skolem propose di formalizzare gli assiomi di Zermelo nel linguaggio del primo ordine con $\in$ e $=$ come simboli di predicati binari. Le proprietà *definite* di Zermelo sarebbero diventate quelle esprimibili in questo linguaggio del primo ordine in termini di insiemi dati,

[22] Già iniziata in Skolem [1923].

e l'assioma di separazione sarebbe diventato uno *schema* di assiomi, uno per ogni formula del primo ordine.

Quasi volesse mettere in guardia dall'assunzione della teoria degli insiemi come fondamento della matematica, Skolem evidenziò quello che sarebbe stato poi chiamato il «paradosso di Skolem»: gli assiomi di Zermelo del 1908 formulati nella logica del primo ordine diventano una collezione numerabile di formule, quindi se sono soddisfacibili, lo sono in un dominio finito o numerabile[23]. Ne segue, quindi, la paradossale esistenza di modelli numerabili degli assiomi di Zermelo anche se essi implicano l'esistenza di insiemi non numerabili. Zermelo trovò questo risultato difficile da digerire. Ma erano al lavoro forze sotterranee che avrebbero condotto a una nuova, più sottile, trasformazione della nozione di insieme mediata dalla logica del primo ordine, sancendo il relativismo dei concetti insiemistici.

Possiamo dire che fu Kurt Gödel (1906-1978) a portare quasi a compimento la matematizzazione della logica immergendo completamente metodi metamatematici nella matematica. Il principale strumento fu la codifica diretta, l'«aritmetizzazione della sintassi», usata nel suo celebre «teorema di incompletezza» del 1931, che operò dialetticamente contro il programma di Hilbert volto a stabilire la coerenza della matematica. Ma il precedente «teorema di completezza» del 1930 aveva chiarito la distinzione tra sintassi formale e semantica della logica del primo ordine e aveva stabilito la proprietà fondamentale di quest'ultima con il «teorema di compattezza»: *se una collezione di formule del primo ordine è tale che ogni sottocollezione finita è soddisfacibile, allora l'intera collezione è soddisfacibile.*

Il lavoro di Gödel aveva mostrato che la nozione di coerenza di una teoria matematica ha una controparte formale esprimibile nel linguaggio del primo ordine con simboli di funzione per l'addizione e la moltiplicazione. Parlando informalmente, una *teoria* è una collezione di formule di un qualche linguaggio del primo ordine; si può formalizzare il fatto che una successione di formule costituisca una *deduzione*; e una teoria è *coerente* se da essa non possiamo derivare una contraddizione. L'aritmetizzazione della sintassi di Gödel codifica tutto questo in enunciati sui numeri naturali e la loro aritmetica, producendo una formula

$$\mathrm{Con}(T)$$

che asserisce la coerenza formale di T, almeno per quelle teorie le cui formule possono essere definite da uno schema di assiomi. È ben noto che Gödel, con il suo teorema di incompletezza, stabilì che per teorie coerenti che includano l'aritmetica dei numeri naturali, $\mathrm{Con}(T)$ stessa non può essere derivata da T. Si possono tuttavia dedurre nozioni relative:

[23] Analoghe osservazioni valgono per l'assioma di rimpiazzamento, aggiunto in seguito, che diventò uno schema di assiomi.

Definizione 3.4. Una formula σ è *relativamente coerente* con una teoria T se $\mathrm{Con}(T)$ implica $\mathrm{Con}(T + \sigma)$.

Una formula σ è *indipendente* da una teoria T se sia σ sia la sua negazione sono relativamente coerenti con T.

Due formule σ_1 e σ_2 sono *equicoerenti* su una teoria T se $\mathrm{Con}(T + \sigma_1)$ è equivalente a $\mathrm{Con}(T + \sigma_2)$.

Queste asserzioni sono di solito stabilite su una teoria debole di base. Per esempio, in questo modo di esprimersi, il fatto che un enunciato insiemistico σ sia relativamente coerente con la teoria degli insiemi significa in generale che Con(ZFC) implica Con(ZFC + σ), e che questo è deducibile in (qualche versione debole di) ZFC. La *forza di coerenza* in teoria degli insiemi può essere discussa in questi termini, tipicamente per enunciati insiemistici forti non dimostrabili in ZFC: dati due enunciati insiemistici σ_1 e σ_2, la forza di coerenza di σ_1 è minore di quella di σ_2 se Con(ZFC + σ_1) implica Con(ZFC + σ_2), e quindi σ_1 e σ_2 hanno la stessa forza di coerenza se σ_1 e σ_2 sono equicoerenti su ZFC.

Nei primi anni Trenta, Tarski completò la matematizzazione della logica fornendo la sua «definizione di verità» che, da allora, ha dato un bel po' di lavoro ai filosofi. Il logico polacco, semplicemente, rese esplicita in termini insiemistici la corrispondenza tra formule di un linguaggio formale e asserzioni insiemistiche su un'interpretazione del linguaggio e fornì una definizione ricorsiva della relazione di *soddisfazione*, ovvero di quando una formula sussiste in un'interpretazione. Questa risposta a una sempre più forte esigenza di un inquadramento matematico della logica divenne il punto di partenza della *teoria dei modelli*.

L'effetto finale della formulazione matematica della semantica realizzata da Tarski sarebbe stato non solo di trasformare un concetto informale di soddisfacibilità in una nozione matematica, ma anche di arricchire la matematica corrente con un metodo sistematico per formare gli analoghi matematici di molte nozioni semantiche intuitive. Siccome dovremo discuterne, specifichiamo con le definizioni seguenti alcuni notazioni e concetti connessi con la definizione di Tarski.

Definizione 3.5. Per un linguaggio del primo ordine, per un'interpretazione N di quel linguaggio (cioè, la specificazione di un dominio e delle interpretazioni dei simboli di funzione e di predicato), per una formula $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ del linguaggio con le variabili $v_1, v_2, \ldots, v_n$, e per $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nel dominio di N,

$$N \models \varphi\,[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

asserisce che la formula φ è soddisfatta in N secondo la definizione ricorsiva di Tarski quando v_i è interpretato come a_i.

Un sottoinsieme y del dominio di N è *definibile al primo ordine su N* se esistono una formula $\psi(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ed elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nel dominio di N tali che

$$y = \{z \in N \mid N \models \psi[z, a_1, \ldots, a_n]\}.$$

3.2. L'universo costruibile.

La teoria degli insiemi prese una strada indipendente come campo autonomo della ricerca matematica grazie alla costruzione di Gödel di L, una costruzione che portò a dimostrare la coerenza relativa dell'assioma della scelta (AC) e dell'ipotesi generalizzata del continuo (GCH)[24]. Operando una sintesi di tutti i materiali preesistenti, Gödel si basò sugli ordinali di von Neumann fondati sull'assioma di rimpiazzamento per formulare un universo di insiemi (relativo) *à la* Zermelo, basato sulla definibilità logica, ma impregnato dell'idea cantoriana di ordine enumerativo. La teoria degli insiemi era progredita al punto che lo schema concettuale di gerarchia cumulativa era ormai assodato e si potevano mettere in opera metodi logici per dimostrare formalmente che l'ipotesi del continuo di Cantor non generi contraddizione. Il problema del continuo fu uno stimolo significativo per un'ulteriore strutturazione della teoria degli insiemi e per la trasformazione del concetto di insieme.

Gödel [1938] riprendeva il lavoro di Russell e descriveva L come una gerarchia che può essere ottenuta dalla teoria ramificata dei tipi di Russell, «una volta che la si estenda a includere ordini transfiniti». In effetti egli aveva raffinato la gerarchia cumulativa degli insiemi ottenendo una gerarchia cumulativa di insiemi *definibili*, analoga agli ordini della teoria ramificata di Russell. L'ulteriore innovazione di Gödel fu di continuare l'indicizzazione della gerarchia attraverso *tutti* gli ordinali. I buoni ordinamenti canonici di von Neumann sarebbero stati la spina dorsale di una gerarchia di insiemi, e questa si sarebbe rivelata cruciale per ottenere i risultati sull'assioma della scelta e sull'ipotesi generalizzata del continuo.

In un breve resoconto, Gödel [1939] presentò in modo informale L essenzialmente come si fa oggi. Per ogni insieme x, sia def(x) la collezione dei sottoinsiemi di x definibili al primo ordine su $(x, \in)$. Definiamo quindi:

$$L_0 = \emptyset; L_{\alpha+1} = \mathrm{def}(L_\alpha), L_\delta = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha < \delta\} \text{ per ordinali limite } \delta;$$

e infine l'universo costruibile:

$$L = \bigcup \{ L_\alpha \mid \alpha \text{ è un ordinale}\}.$$

Gödel sottolineò che L può essere definito, e la sua teoria può essere sviluppata, negli stessi sistemi formali della teoria degli insiemi. Ma questa

[24] Si veda Kanamori [2007] per maggiori dettagli su Gödel e la teoria degli insiemi.

affermazione è decisamente un *understatement*, che minimizza quella che è, con ogni evidenza, la caratteristica centrale della costruzione di L. Una *classe* (definibile) M nella teoria degli insiemi è una collezione della forma $\{x \mid \varphi(x)\}$, ovvero è l'estensione di qualche formula del primo ordine $\varphi(x)$ in $\in$, dove $y \in M$ equivale all'asserzione $\varphi(y)$. L è una classe mediante una formula che descrive una ricorsione transfinita, formula che poteva basarsi sulla possibilità di formalizzare def(x) – la definibilità della definibilità – possibilità che fu poi riaffermata nella definizione sistematica di Tarski della relazione di soddisfacibilità in termini insiemistici. A questo punto, è possibile formalizzare l'«assioma di costruibilità»: $V = L$, ovvero: $\forall x(x \in L)$. Nella terminologia moderna, un *modello interno* è una classe transitiva contenente tutti gli ordinali tali che, restringendo a tale classe l'appartenenza e la quantificazione, essa soddisfi tutti gli assiomi di ZF. In sintesi, ciò che Gödel fece fu di mostrare che L è un modello interno e, inoltre, che L soddisfa AC e GCH. Aveva così dimostrato la coerenza relativa: Con(ZF) implica Con(ZFC + GCH).

Nell'approccio mediante def(x) è necessario dimostrare che def(x) rimane inalterato quando lo si applica a L con quantificatori ristretti a L. Gödel stesso non sarebbe mai arrivato a stabilire esplicitamente questa *assolutezza della definibilità al primo ordine*, preferendo, nell'unica esposizione rigorosa di L che abbia mai pubblicato, adottare un approccio che evita del tutto def(x). La monografia [Gödel 1940] fornisce una presentazione specifica e formale di L, usando otto operazioni binarie per produrre nuovi insiemi a partire da insiemi precedenti e generando L insieme per insieme mediante ricorsione transfinita.

Questa «enumerazione di Gödel» tramite ordinali evitò il ricorso a def(x) e mise in luce certi aspetti di L. Poiché esiste un buon ordinamento di L naturale e definibile, in L abbondano le funzioni di scelta, e AC vale. Per gli altri assiomi, il nodo della difficoltà sta dove interviene la logica del primo ordine, ovvero nella formulazione delle proprietà di separazione e rimpiazzamento. Per questo, la chiusura «algebrica» rispetto alle otto operazioni di Gödel garantì la separazione «logica» per formule limitate[25] e poi l'uso pieno del rimpiazzamento (in V) mise al sicuro tutti gli assiomi di ZF in L.

La dimostrazione di Gödel che L soddisfa GCH consisteva di due parti separate. Egli stabilì l'implicazione $V = L \to$ GCH e – per poter utilizzare questa implicazione in L – dimostrò che L definito entro L con quantificatori ristretti a L è di nuovo L stesso. Quest'ultimo fatto deriva dalla già ricordata assolutezza di def(x); Gödel [1940] ne diede una dimostrazione alternativa basata sull'assolutezza delle otto operazioni binarie.

[25] Cioè, quelle formule del primo ordine in cui tutti i quantificatori possono essere scritti come $\forall x \in y$ e $\exists x \in y$.

L'argomentazione di Gödel per $V = L \rightarrow \mathrm{GCH}$ si basa, come scrisse egli stesso [Gödel 1939], su una «generalizzazione del metodo di Skolem per costruire modelli numerabili». Questo fu il primo uso significativo delle funzioni di Skolem, da quando Skolem stesso le aveva introdotte per stabilire il teorema di Löwenheim-Skolem e, con esso, il paradosso di Skolem. Ironia della sorte, anche se Skolem cercava mediante il suo paradosso di screditare la teoria degli insiemi basata sulla logica del primo ordine come fondamento della matematica, Gödel trasformò il paradosso in un metodo che avrebbe invece incoraggiato l'uso della logica del primo ordine. In Gödel [1939] viene specificamente stabilito il seguente risultato:

(*) Per ogni infinito α, ogni sottoinsieme costruibile di L_α appartiene a qualche L_β per un β della stessa cardinalità di α.

È immediato dimostrare che, per ogni infinito α, L_α ha la stessa cardinalità di α. Da (*) segue che, nel senso di L, l'insieme potenza di $L_{\aleph_\alpha}$ è contenuto in $L_{\aleph_{\alpha+1}}$, e quindi che GCH vale in L.

La sintesi di L si estese alla soluzione di alcune difficoltà nella teoria descrittiva degli insiemi (cfr. la fine del § 2.4). Per usare la terminologia moderna, in Gödel [1938] si enunciava che se $V = L$, allora:

(*a*) esiste un insieme Δ^1_2 di reali che non è Lebesgue misurabile;

(*b*) esiste un insieme Π^1_1 di reali senza la proprietà dell'insieme perfetto.

Gli studiosi di teoria descrittiva degli insiemi si stavano dunque confrontando con un ostacolo insormontabile in ZFC! In Gödel [1938] venivano elencati tutti questi risultati di impossibilità, mettendoli sullo stesso piano dei suoi risultati su AC e GCH. Tali sviluppi inattesi furono i primi esempi di metodi metamatematici in grado di risolvere importanti problemi matematici che in precedenza non avevano mostrato alcun legame con questi metodi. Quando alla fine furono raffinati e confermati, i risultati portarono a un buon ordinamento naturale Σ^1_2 dei reali di L. La teoria degli insiemi era progredita al punto di stabilire, in aggiunta a una soluzione coerente per CH, la possibilità di un buon ordinamento definibile e coerente dei reali, come desiderava Cantor. I risultati di Gödel (*a*) e (*b*) costituiscono la prima vera sintesi della teoria degli insiemi astratta e descrittiva, nel senso che mettevano in opera il suo contesto assiomatico nella ricerca sugli insiemi definibili di reali. Con il suo lavoro su L, Gödel introdusse nella teoria degli insiemi un metodo di costruzione e di argomentazione che riaffermava molte caratteristiche della presentazione assiomatica di questa teoria. Anzitutto, Gödel mostrò come la definibilità al primo ordine potesse venire formalizzata e usata in una costruzione ricorsiva transfinita per stabilire nuovi e sorprendenti risultati matematici. Questo contribuì in misura significativa a una durevole supremazia della logica del primo ordine la quale, oltre che per la sua *sufficienza* come quadro logico per la matematica, cominciò a essere apprezzata in quanto dotata di considerevole *efficacia operativa*. La costruzione di Gödel inoltre consolidò l'incorporazione di rimpiazzamento e fondazione nella teoria degli insiemi. Il rimpiazzamento era immanente all'uso di ordinali arbitrariamente grandi per indicizzare L e alla sua definizione formale mediante ricorsione transfinita. Per quel che riguarda la fondazione, nella costruzione era sottintesa la buona fondatezza degli insiemi. In una nota, Gödel [1939] osservava: «Per dare un senso intuitivo ad A [l'assioma $V = L$], si intenda per "insiemi" tutti gli oggetti ottenuti costruendo la gerarchia semplice dei tipi su un insieme di individui vuoto (includendo tipi di ordine transfinito arbitrario)». In che modo Gödel trasformò la teoria degli insiemi, lo si può descrivere in questi termini. Dopo Cantor, gli insiemi si erano fatti strada in topologia, algebra e analisi, e al tempo di Gödel essi erano ormai ben radicati nella struttura e nel linguaggio della matematica. Ma come erano visti gli insiemi matematici che li studiavano in quanto tali? Prima di Gödel, le principali preoccupazioni vertevano sulla natura degli insiemi e del loro ruolo, in un contesto assiomatico, come possano servire di fondamento cui ridurre la matematica. Anche oggi, coloro che si occupano di questioni ontologiche concentrano la loro attenzione principalmente sulla teoria degli insiemi del periodo iniziale. Dopo Gödel, l'interesse si è invece focalizzato su che cosa gli insiemi *facciano* e su come la teoria degli insiemi possa svilupparsi come campo autonomo della matematica. Lo schema della gerarchia cumulativa è diventato materia corrente e i metodi metamatematici sono usati come «mediatori». Insomma, nella teoria degli insiemi si è assistito a un deciso spostamento verso questioni epistemologiche.

3.3. Nuovi assiomi.

Quale fu la posizione di Gödel? Se stiamo a quello che *disse*, dovremmo quasi metterlo insieme ai suoi predecessori, ma quello che *fece* aprì la strada all'innovazione. In un articolo del 1944 sulla logica matematica di Russell, in un altro del 1947 sul problema del continuo (rivisto poi nel 1964) e in successive lezioni e lettere, Gödel articolò la sua filosofia della matematica: il «realismo concettuale». Proponeva un «concetto di insieme» risolutamente oggettivo, secondo il quale gli assiomi della teoria degli insiemi sono veri e descrivono una realtà oggettiva schematizzata dalla gerarchia cumulativa. Comunque sia, il suo effettivo lavoro matematico gettò le basi per lo sviluppo di una serie di modelli e assiomi per la teoria degli insiemi. Già nei primi anni Quaranta, infatti, Gödel elaborò per proprio conto un possibile modello per la negazione dell'assioma della scelta e, in una conferenza tenuta nel 1946, descrisse un nuovo modello interno, la classe degli insiemi ordinal-definibili.

In anni successivi, Gödel speculò sulla possibilità di decidere proposizioni come l'ipotesi del continuo utilizzando ipotesi sui grandi cardinali basate sull'euristica della *riflessione* e, più tardi, della *generalizzazione*. Già nella citata conferenza del 1946 suggeriva di considerare «assiomi dell'infinito sempre più potenti» e faceva la seguente riflessione: «Ogni dimostrazione di un teorema insiemistico condotta nel sistema immediatamente superiore a una teoria degli insiemi (cioè ogni dimostrazione che coinvolga il concetto di verità [...]) è sostituibile con una dimostrazione che utilizzi un tale assioma dell'infinito». Una opportuna proprietà di grandezza attribuibile alla classe di tutti gli ordinali potrebbe essere usata per derivare qualche proposizione insiemistica; ma ogni proprietà siffatta, scontrandosi con il fatto che la classe sfugge alla comprensione matematica, induce (sintesi) a postulare un grande cardinale che abbia quella proprietà.

In un articolo espositivo sul problema del continuo, Gödel [1947] prevedeva che l'ipotesi del continuo si sarebbe rivelata indipendente da ZF, e avanzava congetture più concrete sui grandi cardinali. Gödel argomentava che «gli assiomi della teoria degli insiemi non costituiscono affatto un sistema in sé chiuso» e quindi «il genuino concetto di insieme sul quale essi sono basati suggerisce la loro estensione mediante nuovi assiomi che asseriscano l'esistenza di ulteriori iterazioni dell'operazione "insieme di"», citando Zermelo [1930] e riecheggiandone il *Leitmotiv*.

In una nota (la 20) destinata a una revisione di Gödel [1947], scritta nel 1966 ma non pubblicata, Gödel riconosceva la possibilità di «assiomi di infinito estremamente forti di specie completamente nuova», generalizzazioni di proprietà di $\aleph_0$, osservando che «esistono a loro favore forti argomentazioni analogici». Questa euristica della *generalizzazione* si lega alla visione unitaria di Cantor del finito e del transfinito, ove le proprietà come l'inaccessibilità e la misurabilità tecnicamente soddisfatte da $\aleph_0$ sarebbero troppo accidentali – in un universo insiemistico essenzialmente uniforme – se non fossero attribuibili a cardinali superiori.

Basandosi sul lavoro di Sierpiński e altri (cfr. § 2.6), Gödel [1947] finì con l'avanzare argomenti contro l'ipotesi del continuo, mostrandone sei conseguenze «paradossali». Una di esse è l'esistenza di un insieme di Luzin avente la cardinalità del continuo – e altre tre seguono dall'esistenza di un tale insieme. Veniva così allo scoperto la posizione di Gödel a proposito di ciò che è vero in teoria degli insiemi. Che l'ipotesi del continuo risultasse o meno coerente oppure indipendente rispetto a ZFC, Gödel credeva in una «verità di fatto», sia dal punto di vista delle intuizioni sul continuo, sia dal punto di vista filosofico. Diventò così un'opinione diffusa, e duratura, che CH non fosse plausibile perché portava a varie conclusioni non plausibili. Negli ultimi anni della sua vita Gödel, sorprendentemente e malgrado tutto quello che era venuto alla luce dopo Cohen, tornò al vecchio lavoro di Hausdorff sulle pantachie (§ 2.1) e formulò assiomi sugli «ordini di crescita», assiomi dai quali sosteneva di poter dedurre il risultato $2^{\aleph_0} = \aleph_2$[33]. Il lavoro di Gödel su L rimase come una cattedrale nel deserto per vari anni, e ciò che aveva ottenuto sarebbe stato riassimilato solo con l'introduzione dei nuovi metodi di teoria dei modelli.

Con l'affermarsi di una nuova generazione, Dana Scott [1961] stabilì un risultato destinato ad aprire nuove strade per la teoria dei grandi cardinali. Gli ultrafiltri avevano guadagnato importanza alla fine degli anni Cinquanta a causa dell'emergere del procedimento delle *ultrapotenze* e, più in generale, degli *ultraprodotti* per costruire modelli concreti: Scott fece la mossa cruciale di prendere l'ultrapotenza dell'universo V stesso con un ultrafiltro fornito da un cardinale misurabile. Un tale ultrafiltro diede ultrapotenze ben fondate e portò a un modello interno M e a un'immersione elementare $j : V \to M$.

Definizione 3.6. Una funzione di classe $j : V \to M$ dall'universo V in un modello interno M è una *immersione elementare* se, per ogni formula insiemistica $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e per ogni successione di insiemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si ha:

$$V \models \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ se e solo se } M \models \varphi[j(a_1), j(a_2), \ldots , j(a_n)].$$

L è il modello interno paradigmatico. Usando la definibilità di L, Scott stabilì che: *se esiste un cardinale misurabile, allora* $V \neq L$. Le ipotesi sui grandi cardinali assumevano così un nuovo significato attraverso un nuovo procedimento dimostrativo, come strumenti per massimizzare le possibilità al di là dell'universo delimitativo di Gödel. La costruzione con le ultrapotenze aveva indicato una direzione; ben presto H. Jerome Keisler ne scoprì un'altra, grazie a una nuova caratterizzazione che attribuiva un ruolo strutturale ai cardinali misurabili: *esiste un'immersione elementare (diversa dall'identità)* $j : V \to M$ *per qualche modello interno* M *se e solo se esiste un cardinale misurabile.*

Attraverso i metodi della teoria dei modelli, la teoria degli insiemi arrivò fino al punto di considerare immersioni elementari in modelli ben fondati; ben presto, tuttavia, sarebbe stata completamente trasformata da un nuovo metodo, teso a ottenere *estensioni* ben fondate di modelli ben fondati.

4. *L'indipendenza.*

4.1. Il *forcing*.

Nel 1963 Paul Cohen (1934-2007) dimostrò che l'assioma della scelta (AC) è indipendente da ZF e che l'ipotesi del continuo (CH) è indipendente da ZFC [Cohen 1963 e 1964]. In altre parole, Cohen riuscì a completare i risultati di coerenza relativa di Gödel con L, stabilendo che Con(ZF) implica Con(ZF + la negazione di AC) e che Con(ZFC) implica Con(ZFC + la negazione di CH). Questi risultati fornirono una limitazione di ZF e ZFC rispetto a due problemi fondamentali che erano sul tappeto fin dai primordi della teoria degli insiemi. Ma al di là dei risultati, le dimostrazioni di Cohen si trasformarono ben presto in un metodo, divenendo i primi esempi del *forcing*, una tecnica notevolmente generale e flessibile per estendere i modelli della teoria degli insiemi. Il *forcing* ha forti basi intuitive e rafforza la nozione di insieme data dagli assiomi del primo ordine di ZF con un ampio uso degli assiomi di rimpiazzamento e di fondazione. Se la costruzione di Gödel di L aveva lanciato la teoria degli insiemi come campo autonomo della matematica, con il metodo del *forcing* di Cohen cominciò a trasformarsi in una teoria moderna e assai evoluta. Il problema del continuo quindi stimolò un'ulteriore trasformazione della teoria degli insiemi, il suo arricchimento con un nuovo metodo per estendere modelli.

L'approccio di Cohen fu di partire da un modello M di ZF e aggiungere un insieme G, il quale avrebbe esibito la nuova proprietà voluta. Era chiaro che tale operazione doveva essere compiuta in modo controllato, minimale, affinché la struttura risultante continuasse a verificare ZF. Cohen impose quindi condizioni restrittive su M e G: prese come M un modello numerabile standard, ovvero un insieme numerabile transitivo che, con la relazione di appartenenza ristretta a se stesso, è un modello di ZF (l'ipotesi di esistenza di un tale modello si può evitare nelle dimostrazioni formali di coerenza relativa mediante il *forcing*).

Gli ordinali di M coincidono dunque con i predecessori di qualche ordinale ρ, e M è la gerarchia cumulativa $M = \bigcup_{\alpha<\rho} (V_\alpha \cap M)$. Cohen stabilì poi un sistema di termini per denotare i membri del nuovo modello, trovando comodo usare un linguaggio ramificato: per ogni $x \in M$ sia $\dot{x}$ una costante corrispondente; sia $\dot{G}$ una nuova costante; e per ogni $\alpha < \rho$ introduciamo quantificatori $\forall_\alpha$ ed $\exists_\alpha$. Si sviluppi quindi una gerarchia di termini come segue: $\dot{M}_0 = \{\dot{G}\}$ e, per ordinali limite $\delta < \rho$, $\dot{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \dot{M}_\alpha$. A livello dei successori, sia $\dot{M}_{\alpha+1}$ la collezione che contiene i termini $\dot{x}$ per $x \in V_\alpha \cap M$ e i termini di «astrazione», corrispondenti a formule con parametri in $\dot{M}_\alpha$ e quantificatori $\forall_\alpha$ ed $\exists_\alpha$. È cruciale che questo linguaggio ramificato con termini di astrazione sia interamente formalizzabile in M, mediante una sistematica codifica di simboli. Quando si fornisce un insieme G dall'esterno, i termini determinano un modello $M[G] = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha[G]$, dove ciascun $\dot{x}$ è interpretato da x per $x \in M$ e $\dot{G}$ è interpretato da G. Si ha così: $M_0[G] = \{G\}$; per ordinali limite $\delta < \rho$, $M_\delta[G] = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha[G]$; e $M_{\alpha+1}[G]$ consiste degli insiemi in $V_\alpha \cap M$, più gli insiemi che interpretano i termini di astrazione con i corrispondenti sottoinsiemi definibili di $M_\alpha[G]$, con $\forall_\alpha$ ed $\exists_\alpha$ che variano in questo dominio.

Ma quali proprietà possono essere imposte su G per assicurare che $M[G]$ sia un modello di ZF? L'idea chiave di Cohen fu di legare strettamente G a M mediante un sistema di insiemi di M, chiamati *condizioni*, che approssimano

G. Non è necessario che G sia un elemento di M, ma dev'essere un sottoinsieme di qualche $Y \in M$ (con $Y = \omega$ come caso di base). Queste condizioni «forzeranno» alcune asserzioni a proposito di $M[G]$; per esempio, decidendo alcuni problemi di appartenenza (se $x \in G$ oppure no quando $x \in Y$). Le asserzioni devono essere quelle esprimibili nel linguaggio ramificato, e Cohen sviluppò una corrispondente relazione di *forcing* $p \Vdash \varphi$ (p forza φ) tra condizioni p e formule φ, una relazione con proprietà che riflettono la sua idea dell'approssimazione. Per esempio, se $p \Vdash \varphi$ e $p \Vdash \psi$, allora $p \Vdash \varphi \,\&\, \psi$. Le condizioni sono ordinate secondo i vincoli che esse impongono sul G finale di modo che, se $p \Vdash \varphi$ e q è una condizione più forte, allora $q \Vdash \varphi$. Scott ebbe anche la felice idea di semplificare la definizione per la negazione: $p \Vdash \neg\varphi$ se per nessuna condizione più forte q vale $q \Vdash \varphi$. Cruciale, nell'approccio di Cohen, è il f che la relazione di *forcing*, al pari del linguaggio ramificato, sia definibile in M.

Per il tocco finale, occorre dare vita all'intera impalcatura incorporando un qualche insieme G. Uscendo da M e usando solo la sua numerabilità, Cohen enumerò le formule del linguaggio ramificato in una successione numerabile e richiese che G fosse completamente determinato da una successione numerabile di condizioni sempre più forti $p_0, p_1, p_2, \ldots$ tali che, per ogni formula φ del linguaggio ramificato, solo una tra φ e $\neg\varphi$ fosse forzata da qualche p_n. Un siffatto insieme G è detto *generico*. Cohen riuscì a dimostrare che il modello $M[G]$ risultante soddisfa effettivamente gli assiomi di ZF: ogni asserzione su $M[G]$ è già forzata da qualche condizione; la relazione di *forcing* è definibile in M; quindi gli assiomi di ZF, veri in M, in particolar modo quelli dell'insieme potenza e di rimpiazzamento, possono essere applicati per derivare corrispondenti asserzioni di *forcing* sulla validità degli assiomi di ZF in $M[G]$.

Il riassunto che abbiamo appena fatto riflette, nelle sue linee principali, l'originaria concezione del *forcing* da parte di Cohen, risalente al luglio 1963; successivamente Cohen stesso presentò le sue idee in un corso tenuto nella primavera del 1965, in cui trattava anzitutto il caso $G \subseteq \omega$. Le condizioni p sono funzioni definite in qualche sottoinsieme finito di ω e a valori in $\{0, 1\}$ e $p \Vdash \dot{n} \in \dot{G}$ se $p(n) = 1$, $p \Vdash \dot{n} \notin \dot{G}$ se $p(n) = 0$. Oggi, un G aggiunto a M in questo modo si chiama un *reale di Cohen* su M. Cohen stabilì l'indipendenza di CH aggiungendo un insieme che può essere costruito come successione di molti reali di Cohen. Stabilì invece l'indipendenza di AC utilizzando una versione dello schema appena descritto, in cui, in aggiunta a $\dot{G}$, ci sono anche nuove costanti $\dot{G}_i$ per $i \in \omega$, dove $\dot{G}$ è interpretato con un insieme X di reali di Cohen, ognuno interpretazione di qualche $\dot{G}_i$. Il punto è che X non è bene ordinabile nell'estensione.

L'uso di un modello numerabile da parte di Cohen ripropone il paradosso di Skolem (§ 3.1) in un contesto nuovo. È interessante notare che già Skolem [1923, p. 229] aveva considerato la possibilità di aggiungere un nuovo sottoinsieme dei numeri naturali in un modello numerabile del sistema di Zermelo, ottenendo così un nuovo modello, e in una nota aveva sostenuto che era «piuttosto probabile» che l'ipotesi del continuo non fosse decisa dagli assiomi di Zermelo.

Così come l'assunzione iniziale di un modello numerabile standard non è formalmente necessaria per i risultati di coerenza relativa, anche altre caratteristiche dell'argomentazione di Cohen sarebbero state presto riformulate, riorganizzate e generalizzate. Tuttavia, l'essenza del suo approccio costruttivo mediante definibilità e genericità non sarebbe stata scalfita. Il risultato più di spicco ottenuto da Cohen sta nell'aver immaginato una procedura concreta per estendere in modo controllato i modelli ben fondati della teoria degli insiemi a modelli ben fondati con nuove proprietà, senza però modificarne gli ordinali. La teoria degli insiemi ha subito una trasformazione profonda, che l'ha resa non solo più ricca, ma anche più strana. In ogni caso, negli ultimi quarant'anni, essa ha avuto un'espansione così ampia da far sembrare poca cosa tutto ciò che venne prima, sia per il numero di ricercatori coinvolti, sia per la messe di risultati. Avendo a disposizione un nuovo metodo per costruire modelli, i teorici degli insiemi non avrebbero infatti perso tempo, usando il *forcing* per stabilire un profluvio di risultati di coerenza relativa, verità in un senso più ampio del termine, alcune delle quali illuminavano problemi classici della matematica. Furono costruiti molti *forcing* diversi allo scopo di aggiungere nuovi reali e furono ben presto derivate tecniche di *forcing* iterato. Nei paragrafi seguenti ci limiteremo a sottolineare gli aspetti più rilevanti per il problema del continuo.

4.2. La potenza del *forcing*.

Molte questioni precedenti legate al problema del continuo furono viste sotto una nuova luce grazie al *forcing*, specialmente nei lavori di Robert Solovay. Solovay ebbe un ruolo di primo piano nel trasformare il *forcing* in un metodo generale, e fu soprattutto grazie a lui che la teoria degli insiemi raggiunse l'apice della sua raffinatezza in tutti i settori, dal *forcing* ai grandi cardinali, alla teoria descrittiva degli insiemi.

Solo qualche settimana dopo l'impresa di Cohen, Solovay diede un nuovo sviluppo alla questione dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo, caratterizzando le possibilità per la grandezza di 2^κ per κ regolare, e fece la prima esplorazione di un'ampia gamma di cardinali.

Fu nel 1964 che William Easton [1970] stabilì il risultato definitivo per le potenze dei cardinali regolari: *supponiamo che valga GCH e che F sia una funzione dalla classe dei cardinali regolari a valori nei cardinali tali che per* $\kappa \leq \lambda$, $F(\kappa) \leq F(\lambda)$ *e la cofinalità di* $F(\kappa)$ *sia maggiore di* κ. *Allora esiste un'estensione di forcing che preserva le cofinalità e in cui* $2^\kappa = F(\kappa)$ *per ogni* κ *regolare*. Quindi, come Solovay aveva visto localmente, se si eccettua la monotonia, la sola restrizione sulle potenze dei cardinali regolari è quella data dalla ben nota disuguaglianza di Zermelo-König: che la cofinalità di 2^κ sia maggiore di κ per ogni cardinale κ. Il risultato di Easton aggiunse forza vitale al *forcing* non solo con l'introduzione di classi proprie di condizioni di *forcing*, ma con l'idea – oggi basilare – di analisi di prodotto e con la nozione, divenuta poi familiare, di «supporto di Easton». Grazie alla sua riduzione, il risultato di Easton focalizzò l'interesse sulle possibilità per le potenze dei cardinali *singolari*, e questo «problema dei cardinali singolari» insieme con l'«ipotesi dei cardinali singolari» avrebbe stimolato l'ulteriore sviluppo della teoria degli insiemi, così come il problema del continuo e l'ipotesi del continuo avevano stimolato il suo sviluppo iniziale[26].

Nella primavera del 1964 Solovay stabilì un risultato di notevole profondità matematica, quale livello di sottigliezza fosse possibile ottenere con il *forcing*: *se esiste un cardinale inaccessibile, allora in un modello interno di una estensione di forcing ogni insieme di reali è misurabile secondo Lebesgue, ha la proprietà di Baire e quella dell'insieme perfetto* [Solovay 1970]. Al pari dei risultati di Cohen, questo teorema decise in un sol colpo questioni che risalivano all'inizio del Novecento, se non a prima ancora. I controesempi classici implicano che il modello interno di Solovay non può avere un buon ordinamento dei reali, ma questi stabilì che il modello soddisfa il «principio delle scelte dipendenti», un principio sufficiente per l'interpretazione formale della tradizionale teoria della misura e della categoria. Il lavoro di Solovay riscattava in questo modo le fatiche dei primi studiosi di teoria descrittiva degli insiemi, nel senso che le proprietà di regolarità possono coerentemente valere per tutti gli insiemi di reali in un modello genuinamente utilizzabile per l'analisi matematica. Per il suo risultato Solovay applicò il «collasso di Levy», che era stato recentemente inventato; per la misurabilità secondo Lebesgue introdusse un nuovo tipo di *forcing* (che andava oltre il metodo diretto di Cohen di aggiungere nuovi insiemi di ordinali o collassare cardinali), ma consisteva nell'aggiunta di un *reale* (*random*). Il lavoro di Solovay non solo spianò la strada a una moltitudine di argomenti di *forcing* differenti, ma ancor oggi i suoi argomenti originali di definibilità rimangono vitali per la teoria descrittiva degli insiemi.

La proprietà dell'insieme perfetto, centrale nell'approccio diretto di Cantor al problema del continuo attraverso la definibilità, portò al primo esempio riconosciuto di un nuovo fenomeno in teoria degli insiemi: la derivazione di risultati di *equicoerenza* con ipotesi di grandi cardinali basate sui metodi complementari del *forcing* e dei modelli interni. Tipicamente, un'ipotesi di grandi cardinali viene trasformata in una proposizione su insiemi di reali

[26] L'ipotesi dei cardinali singolari asserisce che 2^λ per λ singolare è il minimo possibile rispetto alle potenze 2^μ per $\mu < \lambda$, data la monotonia e la disuguaglianza di Zermelo-König.

con un *forcing* che «collassa» quel cardinale a $\aleph_1$ o «fa salire» la potenza del continuo a quel cardinale. Viceversa, si mostra che la proposizione implica la stessa ipotesi di grandi cardinali in un modello interno. Il risultato di Solovay permetteva di passare, usando il *forcing*, da un cardinale inaccessibile alla proposizione che ogni insieme di reali ha la proprietà dell'insieme perfetto (e $\aleph_1$ è regolare). Ma Ernst Specker [1957, p. 210] aveva stabilito che, se vale questo, allora $\aleph_1$ (di V) è inaccessibile in L. Quindi, l'uso di Solovay di un cardinale inaccessibile era effettivamente necessario, e il suo collasso a $\aleph_1$ completava l'osservazione di Specker. L'emergere di tali risultati di equicoerenza rappresentò un'interessante trasformazione delle precedenti speranze di Gödel (cfr. § 3.3): si può assumere la validità di certe proposizioni, se ci sono abbastanza ordinali, e quanti ne servono è specificato postulando l'esistenza di un grande cardinale. D'altra parte, il *forcing* portò rapidamente alla conclusione che non ci poteva essere una implicazione diretta per l'ipotesi del continuo: nel 1964 Levy e Solovay [1967] stabilirono che i cardinali misurabili non implicano e non confutano CH, con un'argomentazione generalizzabile alla maggior parte dei grandi cardinali inaccessibili. Piuttosto, l'assunzione della validità di molte altre proposizioni si sarebbe avuta in termini di coerenza, e i metodi di *forcing* e di modelli interni avrebbero fornito le modalità operative delle dimostrazioni. Un'importante linea di ricerca della moderna teoria degli insiemi è l'articolazione e lo studio di ipotesi sui grandi cardinali; tra esse – prime ad apparire fra quelle più forti della misurabilità – la *supercompattezza* e la *n-hugeness* («*n*-enormità»), definite in termini di immersioni elementari, e i *modelli interni* per grandi cardinali, strutture canoniche che sono state individuate con successo per ipotesi di grandi cardinali decisamente più forti della misurabilità[27]. Basandosi sul proprio risultato relativo alla misurabilità secondo Lebesgue, Solovay presto riattivò il programma della teoria descrittiva degli insiemi di investigare fino a che punto valgano le proprietà di regolarità (se si assume l'assioma della scelta), fornendo caratterizzazioni per gli insiemi Σ^1_2, il livello in cui Gödel aveva derivato da $V = L$ la falsità di tali proprietà (§ 3.2). In particolare, mostrò che, per questi insiemi, le proprietà di regolarità seguono dall'esistenza di un cardinale misurabile. Quindi, anche se i cardinali misurabili non decidono l'ipotesi del continuo, stabiliscono però la proprietà dell'insieme perfetto per insiemi Σ^1_2, [Solovay 1969] e da questo segue che «CH vale per gli insiemi Σ^1_2, – il che giustifica le speranze di Gödel di ottenere i grandi cardinali per implicazione diretta.

In un successivo lavoro, Solovay e Tennenbaum [1971] stabilirono la coerenza dell'ipotesi di Suslin: veniva chiarito così un problema classico che

[27] Si veda Kanamori [2003] per maggiori dettagli sulle ipotesi di grandi cardinali.

risaliva agli anni Venti, tramite lo sviluppo e l'uso del *forcing* iterato. Si potrebbe parlare a lungo del significato di questo lavoro, ma ci limiteremo solo a segnalare una connessione con l'ipotesi del continuo. Tony Martin sottolineò che l'argomentazione di Solovay-Tennenbaum effettivamente stabilisce la coerenza di una chiusura di estensioni di *forcing* di un certo tipo, e formulò un apposito assioma – oggi chiamato «assioma di Martin» (MA) – secondo il quale, per certe nozioni ristrette di *forcing*, gli oggetti generici esistono sempre. Il metodo divenne un assioma, e molti risultati di coerenza potevano ora essere semplicemente enunciati come conseguenze dirette di una singola proposizione tuttofare. Tecnicamente, CH implica MA, ma l'argomentazione di Solovay-Tennenbaum stabiliva che MA è coerente con l'ipotesi che la cardinalità di $2^{\aleph_0}$ sia arbitrariamente grande.

Per il continuo, MA generalizzò CH come principio di costruzione. Mentre i risultati classici relativi a CH avevano provocato una dicotomia $\aleph_0 / \aleph_1$, MA stabilì una dicotomia $<\frac{2^{\aleph_0}}{2^{\aleph_0}}$. Per esempio, Martin e Solovay [1970] dimostrarono che, assumendo MA, l'unione di meno di $2^{\aleph_0}$ insiemi aventi misura di Lebesgue nulla (rispettivamente, magri) ha ancora misura nulla (rispettivamente, è ancora magra). Assumendo CH, questo sarebbe stato un risultato immediato, ma ora l'espansione del continuo permetteva nuove costruzioni. Per esempio, Sierpiński [1925] aveva stabilito che ogni insieme $\sum^1_2$ di reali è l'unione di $\aleph_1$ insiemi boreliani. Conseguenza diretta del risultato di cui sopra sulla misura di Lebesgue è allora il seguente: MA e $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implicano che ogni insieme $\sum^1_2$ di reali è misurabile secondo Lebesgue. Molti altri risultati usarono la dicotomia $<\frac{2^{\aleph_0}}{2^{\aleph_0}}$. per dimostrare che MA permette di ottenere, in $2^{\aleph_0}$ passi, risultati sul continuo che con l'uso di CH si ottengono in $\aleph_1$ passi. Il problema del continuo fu posto sotto nuova luce dal punto di vista del metodo, mostrando che CH, come principio di costruzione, poteva essere generalizzata anche se $2^{\aleph_0}$ fosse arbitrariamente grande.

Con il costante progresso della tecnica del *forcing* e i risultati di coerenza relativa, appositi assiomi di *forcing* sono ormai diventati comuni nella moderna teoria degli insiemi. La successiva grande svolta si ebbe quando Saharon Shelah [1982], dopo aver formulato una vasta classe di nozioni di *forcing proprio* e averne dimostrato l'efficacia, introdusse l'«assioma del *forcing* proprio» (PFA). Diversamente da MA, stabilire la coerenza di PFA richiedeva cardinali molto forti, più precisamente, l'esistenza di un cardinale supercompatto. Inoltre, si è dimostrato abbastanza presto che PFA comporta il risultato che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$; e più di recente che esso implica alcune delle più forti proposizioni finora studiate in teoria degli insiemi.

4.3. La determinatezza.

L'intensa ricerca degli anni Settanta e Ottanta ha rafforzato considerevolmente l'idea che le gerarchie di grandi cardinali che sono via via emerse forniscano *la* gerarchia di principî esaustivi con la quale tutte le possibili forze di coerenza possono essere misurate, una specie di completamento gerarchico di ZFC. In primo luogo, le varie ipotesi, anche se storicamente contingenti, formano una gerarchia *lineare*. Tipicamente, date due ipotesi di grandi cardinali, al di sotto di un cardinale che soddisfi una delle due, ce ne sono molti che soddisfano l'altra, in un senso prescritto dalla prima. In secondo luogo, tra due ipotesi di grandi cardinali rimane inquadrata, rispetto alla forza di coerenza, una vasta gamma di proposizioni forti: l'ipotesi più forte implica che esista una estensione di *forcing* in cui la proposizione vale; e se la proposizione vale, esiste un modello interno che soddisfa l'ipotesi più debole.

Uno dei maggiori successi dei grandi cardinali ha a che fare con lo sviluppo forse più originale e affascinante della moderna teoria degli insiemi. Anche se la nozione di *determinatezza dei giochi* ha radici addirittura in una nota di Zermelo del 1913, il concetto di gioco infinito cominciò a essere esplorato seriamente solo negli anni Sessanta, quando ci si rese conto che portava a proprietà di regolarità per insiemi di reali.

Denotando con ω l'insieme dei numeri naturali, sia ${}^{\omega}\omega$ l'insieme delle funzioni da ω in ω, insieme che può essere identificato con l'insieme dei reali. Per ogni $A \subseteq {}^{\omega}\omega$, $G(A)$ denoti il seguente «gioco infinito a due giocatori con informazione perfetta». Il giocatore I sceglie inizialmente $x(0) \in \omega$; il giocatore II sceglie quindi $x(1) \in \omega$; poi I sceglie $x(2) \in \omega$ e II sceglie $x(3) \in \omega$, e così via.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{I:} & x(0) & & x(2) & & \dots \\
\text{II:} & & x(1) & & x(3) & \dots
\end{array}
$$

Ogni scelta è una *mossa* del gioco; ciascuno dei due giocatori, prima di fare la sua mossa, conosce la successione delle mosse precedenti («informazione perfetta»); i due giocatori insieme costruiscono un $x \in {}^{\omega}\omega$. I vince $G(A)$ se $x \in A$, altrimenti vince II. Una *strategia* è una funzione che va dalle successioni finite di numeri naturali ai numeri naturali e dice a un giocatore quale mossa fare, data la successione delle mosse precedenti. Una *strategia vincente* è una strategia tale che, se un giocatore la segue, vince sempre – comunque giochi l'avversario.

A è *determinato* se o I o II ha una strategia vincente in $G(A)$. La determinatezza di questi giochi è stata studiata usando gerarchie di insiemi definibili di reali e, verso la fine del 1962, gli insiemisti polacchi proposero il drastico «assioma di determinatezza» (AD): ogni $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ è determinato.

Questo assioma non vale se esiste un buon ordinamento dei reali, in quanto le strategie possono essere costruite codificandole con numeri reali e si può «diagonalizzare» attraverso tutte le strategie. Inoltre, si è visto subito che AD implica che ogni insieme di reali sia misurabile secondo Lebesgue, abbia la proprietà di Baire e la proprietà dell'insieme perfetto. Mediante quest'ultima, si deduce la validità dell'ipotesi del continuo nella prima formulazione di Cantor (CH_0: cfr. § 1.2). Sempre di più comunque, con l'accettazione di ZFC, AD iniziò a essere considerato un assioma importante e potente, da assumere in un modello interno, il più piccolo modello $L(\mathbb{R})$ contenente tutti i reali.

Alla fine degli anni Sessanta, Solovay riuscì a stabilire alcune connessioni tra l'assioma di determinatezza e i grandi cardinali, mostrando in ZF che AD implica che $\aleph_1$ è misurabile. Nello stesso periodo, Martin dimostrò in ZFC che, se esiste un cardinale misurabile, allora gli insiemi analitici $\left(\sum_1^1\right)$ sono determinati. Investigando ulteriori conseguenze della determinatezza, una nuova generazione di studiosi della teoria descrittiva degli insiemi ha ben presto stabilito un'elaborata rete di connessioni, andando a caccia di nuove strutture in modo tanto spudorato quanto sterile. Le ipotesi di determinatezza sembravano sistemare molte questioni sugli insiemi definibili di reali e fornire nuovi metodi argomentativi, portando a una parziale realizzazione delle vecchie iniziative di Cantor concernenti gli insiemi di reali e il transfinito, ove la determinatezza rimpiazzava il buon ordine come principio ispiratore. Alla fine degli anni Settanta, era in piedi una teoria più o meno completa degli insiemi proiettivi di reali: con questo completamento di uno dei progetti principali della teoria descrittiva degli insiemi, l'attenzione cominciò a spostarsi su questioni di coerenza assoluta.

L'analisi della coerenza di AD condusse a progressi decisivi nella teoria dei grandi cardinali e affermò il loro ruolo centrale nella misura della forza di coerenza. Negli anni Settanta la forza dei metodi resi possibili da questo assioma portò a ipotizzare che o l'assioma era ortogonale ai grandi cardinali, o in sostanza li includeva tutti. Ci si accorse però che certe ipotesi di grandi cardinali, prima fortissime e poi di tipo supercompattezza, dominavano la determinatezza. Studiando i dettagli di una dimostrazione, Hugh Woodin nel 1984 inventò quelli che oggi sono noti come «cardinali di Woodin». Successivamente, Martin e John Steel hanno mostrato che l'esistenza di un numero sempre maggiore di cardinali di Woodin implica la determinatezza di un numero sempre maggiore di insiemi della gerarchia proiettiva. Infine, nel 1992, Woodin ha dimostrato che *l'esistenza di infiniti cardinali di Woodin è equicoerente con l'assioma di determinatezza*. I cardinali di Woodin sono più deboli dei cardinali supercompatti e più vicini di questi ultimi ai cardinali misurabili; in ricerche successive, la teoria dei modelli interni è stata sviluppata fino a ottenere modelli interni dei cardinali di Woodin.

Verso la fine degli anni Novanta, Woodin [2001], basandosi sulla ricchezza di idee che circondano i cardinali di Woodin e la determinatezza e sviluppandole a un livello più alto, ha proposto una soluzione dello stesso problema del continuo. Si tratta di uno schema forte, che implica $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Questa soluzione vede l'uso di una quantità arbitraria di cardinali di Woodin, l'assimilazione di nuovi principî per insiemi di insiemi di reali, e una nuova e irrisolta congettura su una nuova «logica» che completerebbe il quadro. In questo modo, idee strutturali che coinvolgono ipotesi di grandi cardinali possono chiudere il cerchio e produrre una soluzione definitiva del problema originale, che ha stimolato così profondamente lo sviluppo della teoria degli insiemi.

Se facciamo un passo indietro e diamo uno sguardo unitario alla moderna teoria degli insiemi, possiamo constatare come la forza della ricerca matematica abbia disinnescato vari possibili tentativi di «appropriazione metafisica» attraverso la produzione incessante di nuovi modelli, ipotesi e risultati. Liberandosi di gran parte del peso rappresentato dal proprio significato fondazionale, la teoria degli insiemi è diventata un affascinante settore di ricerca matematica, in cui le versioni formalizzate delle nozioni di verità e coerenza sono divenute oggetti da manipolare in modo formale, non diversamente da quel che si fa in algebra.

In quanto studio espresso in termini di buona fondatezza, ZFC insieme con tutta la varietà dei grandi cardinali serve come tribunale per giudicare, in termini di coerenza relativa, proposizioni matematiche che possono essere contestualizzate nella teoria degli insiemi facendo variare le loro variabili nell'universo insiemistico. La teoria degli insiemi è così, per la matematica, più un quadro di riferimento mai conchiuso che un fondamento che serva a spiegare tutto. È un settore autonomo della matematica – altamente specifico e affascinante – che si sviluppa coltivando le proprie questioni interne ma è anche capace di operare contestualizzazioni di vasta portata.

Quanti punti ci sono sulla retta? Sappiamo tante cose, ormai, ma – paradossalmente – la questione si fa tanto più elusiva quanto più approfondita è la nostra analisi. La stessa ipotesi del continuo è considerata, in molti ambienti, troppo sbrigativa; nel contempo, è emersa l'ipotesi $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, sia nelle ultime speculazioni di Gödel, sia come conseguenza dell'assioma del *forcing* proprio, sia nei recenti lavori di Woodin. Anche se la significatività del problema del continuo è stata messa in dubbio, le pagine precedenti dovrebbero suggerire come replicare: la sua importanza sta nell'aver contribuito ad accrescere la nostra conoscenza del continuo, e la moderna teoria degli insiemi è l'eredità più cospicua che ci ha lasciato.

ALEKSANDROV, P. S.

1916 *Sur la puissance des ensembles mesurables B*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 162, pp. 323-25.

BAIRE, R.-L.

1899 *Sur les fonctions de variables réelles*, in «Annali di matematica», 3(3), pp. 1-123.

BANACH, S. e TARSKI, A.

1924 *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, in «Fundamenta Mathematicae», 6, pp. 244-77.

BERNSTEIN, F.

1908 *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, in «Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse», 60, pp. 325-38.

BOREL, É.

1898 *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris.

CANTOR, G. **(TRAD. IT. DA CONTROLLARE)**

1872 *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, in «Mathematische Annalen», 5, pp. 123-32.

1874 *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 77, pp. 258-62.

1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 84, pp. 242-58.

1880 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. II*, in «Mathematische Annalen», 17, pp. 355-58.

1883 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. V*, in «Mathematische Annalen», 21, pp. 545-91, poi con il titolo *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*, Teubner, Leipzig 1883.

1884 *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. VI*, in «Mathematische Annalen», 23, pp. 453-88.

1891 *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, in «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», 1, pp. 75-78.

1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I*, in «Mathematische Annalen», 46, pp. 481-512.

1897 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. II*, in «Mathematische Annalen», 49, pp. 207-46.

1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a cura di E. Zermelo, Springer, Berlin (ristampa 1980).

COHEN, P. J.

1963 *The independence of the continuum hypothesis. I*, in «Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.», 50, pp. 1143-48.

1964 *The independence of the continuum hypothesis. II*, in «Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.», 51, pp. 105-10.

DEDEKIND, R.

1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig [trad. it. *Essenza e significato dei numeri; Continuità e numeri irrazionali*, a cura di O. Zariski, Stock, Roma 1926].

DU BOIS-REYMOND, P.

1880 *Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung:* $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$, in «Mathematische Annalen», 16, pp. 115-28.

easton, w. b.

1970 *Powers of regular cardinals*, in «Annals of Mathematical Logic», 1, pp. 139-178.

EWALD, W. (a cura di)

1996 *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

FRAENKEL, A. A.

1922 *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, in «Mathematische Annalen», 86, pp. 230-37.

GÖDEL, K.

1938 *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*, in «Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.», 24, pp. 556-57 [trad. it. *La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo*, in *Opere*, vol. II. *1938-1974*, Bollati Boringhieri, Torino 2000, pp. 28-29].

1939 *Consistency-proof for the Generalized Continuum Hypothesis*, in «Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.», 25, pp. 220-24 [trad. it. *Dimostrazione di coerenza per l'ipotesi generalizzata del continuo*, in *Opere*, vol. II cit., pp. 31-35].

1940 *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the axioms of set theory*, in «Annals of Mathematical Studies», 3, pp. 1-25 [trad. it. *La coerenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo con gli assiomi della teoria degli insiemi*, in *Opere*, vol. II cit., pp. 36-106].

1946 *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics*, in m. davis (a cura di), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett [trad. it. *Osservazioni svolte al convegno del bicentenario di Princeton sui problemi della matematica*, in *Opere*, vol. II cit., pp. 153-56].

1947 *What is Cantor's Continuum Problem?*, in «American Mathematical Monthly», 54, pp. 515-25 (ivi, 55, 1948, p. 151 contiene una lista di errata) [trad. it. *Che cos'è il problema del continuo di Cantor?*, in *Opere*, vol. II cit., pp. 180-92].

GRAY, R.

1994 *Georg Cantor and transcendental numbers*, in «American Mathematical Monthly», 101, pp. 819-32.

HAUSDORFF, F.

1907 *Untersuchungen über Ordnungstypen, IV, V*, in «Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse», 59, pp. 84-159.

1908 *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, in «Mathematische Annalen», 76 (1908), pp. 436-43.

1909 *Die Graduierung nach dem Endverlauf*, in «Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse», 31, pp. 295-334.

1914 *Grundzüge der Mengenlehre*, de Gruyter, Leipzig (rist. Chelsea, New York 1965).

1916 *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*, in «Mathematische Annalen», 77, pp. 430-37.

1936 *Summen von $\aleph_1$ Mengen*, in «Fundamenta Mathematicae», 26, pp. 241-55.

KANAMORI, A.

1997 *The mathematical import of Zermelo's well-ordering theorem*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 3, pp. 281-311.

2003 *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*, seconda edizione, Springer, Berlin.

2004 *Zermelo and set theory*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 10, pp. 487-553.

2007 *Gödel and set theory*, in «The Bulletin of Symbolic Logic», 13, pp. 153-88.

LEBESGUE, H.-L.

1902 *Intégrale, longueur, aire*, in «Annali di matematica pura e applicata», (3)7, pp. 231-359.

1905 *Sur les fonctions représentables analytiquement*, in «Journal de mathématiques pures et appliquées», (6)1, pp. 139-216.

1972 *Œuvres scientifiques*, Kundig, Genève.

LEVY, A. e SOLOVAY, R. M.

1967 *Measurable cardinals and the Continuum Hypothesis*, in «Israel Journal of Mathematics», 5, pp. 234-48.

LINDENBAUM, A. e TARSKI, A.

1926 *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, in «Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathématiques et Physiques», 19, pp. 299-330.

LUZIN, N. N.

1914 *Sur un problème de M. Baire*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 158, pp. 1258-61.

1917 *Sur la classification de M. Baire*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 164, pp. 91-94.

1925*a* *Les propriétés des ensembles projectifs*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 180, pp. 1817-19.

1925*b* *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 180, pp. 1572-74.

LUZIN, N. N. e SIERPIŃSKI, W.

1918 *Sur quelques propriétés des ensembles (A)*, in «Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles», Série A, pp. 35-48.

1923 *Sur un ensemble non mesurable B*, in «Journal de mathématiques pures et appliquées», (9)2, pp. 53-72.

MAHLO, P.

1913 *Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Mächtigkeit*, in «Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse», 65, pp. 283-315.

MARTIN, D. A. e SOLOVAY, R. M.

1970 *Internal Cohen extensions*, in «Annals of Mathematical Logic», 2, pp. 143-178.

MATHIAS, A. R. D.

2001 *Slim models of Zermelo set theory*, in «The Journal of Symbolic Logic», 66, pp. 487-96.

MOORE, G. H.

1982 *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*, Springer, New York.

1989 *Towards a History of Cantor's Continuum Problem*, in D. E. ROWE e J. MCCLEARY (a cura di), *The History of Modern Mathematics*, vol. I. *Ideas and their Reception*, Academic Press, Boston, pp. 79-121.

PLOTKIN, J. M.

2005 *Hausdorff on Ordered Sets*, American Mathematical Society, Providence.

ROTHBERGER, F.

1938 *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen*, in «Fundamenta Mathematicae», 30, pp. 215-17.

1939 *Sur un ensemble toujours de première categorie qui est depourvu de la properté ambda*, in «Fundamenta Mathematicae», 32, pp. 294-300.

1948 *On some problems of Hausdorff and Sierpin^ski*, in «Fundamenta Mathematicae», 35, pp. 29-46.

SCOTT, D. S.

1961 *Measurable cardinals and constructible sets*, in «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques», 9, pp. 521-24.

SHELAH, S.

1982 *Proper Forcing*, Springer, Berlin.

SIERPIŃSKI, W.

1918 *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, in «Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles», Série A, pp. 97-152.

1924 *Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$)*, in «Fundamenta Mathematicae», 5, pp. 177-87.

1925 *Sur une classe d'ensembles*, in «Fundamenta Mathematicae», 7, pp. 237-43.

1928 *Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle*, in «Fundamenta Mathematicae», 11, 302-4.

1934 *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne vol. 4, Warsaw (seconda edizione corretta con un'appendice di articoli successivi, Chelsea, New York 1956).

SKOLEM, TH.

1920 *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, in «Videnskaps-selskapets Skrifter, I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klass», 4, pp. 1-36 [trad. it. *Ricerche logico-combinatorie sulla soddisfacibilità delle proposizioni matematiche unitamente a un teorema sugli insiemi densi*, in E. CASARI (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*, Sansoni, Firenze 1979, pp. 93-106].

1923 *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, in *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Akademiska-Bokhandeln, Helsinki, pp. 217-32 [trad. it. *Osservazioni sulla fondazione assiomatica della teoria degli insiemi*, in C. CELLUCCI (a cura di), *ll paradiso di Cantor. Il dibattito sui fondamenti della teoria degli insiemi*, Bibliopolis, Napoli 1979, pp. 159-74].

1970 *Selected Works in Logic*, a cura di J. E. Fenstad, Univesitetsforlaget, Oslo.

SOLOVAY, R. M.

1969 *The Cardinality of Σ^1_2 Sets of Reals*, in J. J. BULLO, TH. C. HOLYOKE e S. W. HAHN (a cura di), *Foundations of Mathematics. Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel*, Springer, Berlin, pp. 58-73.

1970 *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, in «Annals of Mathematics», 92, pp. 1-56.

SOLOVAY, R. M. e TENNENBAUM, S.

1971 *Iterated Cohen extensions and Soslin's problem*, in «Annals of Mathematics», 94, pp. 201-45.

SPECKER, E.

1954 *Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom*, in «Archive der Mathematik», 5, pp. 332-37.

1957 *Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom)*, in «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik», 3, pp. 173-210.

SUSLIN, M. JA.

1917 *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*, in «Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris», 164, pp. 88-91.

ULAM, S.

1930 *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, in «Fundamenta Mathematicae», 16, pp. 140-50.

VAN HEIJENOORT, J. (a cura di)

2002 *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (1967), Harvard University Press, Cambridge Mass.

VITALI, G.

1905 *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Gamberini e Parmeggiani, Bologna, poi in ID., *Opere sull'analisi reale e complessa. Carteggio*, Cremonese, Roma 1984.

VON NEUMANN, J.

1923 *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, in «Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, sectio scientiarum mathematicarum», 1, pp. 199-208.

1928 *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, in «Mathematische Annalen», 99, pp. 373-91.

WOODIN, W. H.

1999 *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*, Walter de Gruyter, Berlin.

2001 *The Continuum Hypothesis I and II*, in «Notices of the American Mathematical Society», 48, pp. 567-76 e 681-90.

ZERMELO, E.

1904 *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, in «Mathematische Annalen», 59, pp. 514-16.

1908 *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, in «Mathematische Annalen», 65, pp. 107-28.

1930 *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, in «Fundamenta Mathematicae», 16, pp. 29-47.