DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Introductory note to 1930a

Akihiro Kanamori†

Zermelo in his remarkable *1930a* offered his final axiomatization of set theory as well as a striking, synthetic view of a procession of natural models that would have a modern resonance. Appearing only six articles after *Skolem 1930* in *Fundamenta mathematicae*, Zermelo's article seemed strategically placed as a response, an aspect that we will discuss below, but its dramatically new picture of set theory reflects gained experience and suggests the germination of ideas over a prolonged period. The subtitle, "New investigations in the foundations of set theory", evidently recalls his axiomatization article *1908b,* differing only in the "New" from the title of that article. The new article is a *tour de force* which sets out principles that would be adopted in the further development of set theory and draws attention to the cumulative hierarchy picture, dialectically enriched by initial segments serving as natural models.

In Section 1, Zermelo formulates his axiom system, the "constitutive axioms" of "general set theory", and though the presentation is opaque largely because of a second-order lens, the thrust of ZFC is there. Indeed, Zermelo used the term "Zermelo-Fraenkel" to indicate the result of adding the replacement axiom (which subsumes the separation axiom) to his *1908b* axioms.[1] Zermelo actually proceeded with his "ZF'-system", the result of deleting the axiom of infinity as not being part of general set theory; assuming the axiom of choice as an implicit underlying "general logical principle"; and newly adjoining the axiom of foundation—the term having its source in this article.

Concerning the replacement axiom, Zermelo in a letter of 9 May 1921 to Abraham Fraenkel had formulated a version and aired, though with skepticism, the possibility of adopting it as a new axiom.[2] Fraenkel advocated that adoption in a paper *1922b*, completed on 1 July 1921, through which he would become associated with the axiom. It was however the work of *von Neumann 1928d*, done in the early 1920s, that made evident the importance of adopting replacement, for the formalization of transfinite recursion and the existence of sets defined therewith.

Concerning the foundation axiom, in modern notation the axiom, as is well-known, entails that the universe V of sets is stratified into cumulative ranks V_α, where by transfinite recursion $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ the power set of V_α, and $V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$ for limit ordinals δ—and $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$, *the cumulative*

† This note draws heavily on *Kanamori 2004,* with the permission of the Association for Symbolic Logic which holds the copyright.

[1] "Zermelo-Fraenkel" was first invoked by *von Neumann 1928d*, 374, for this purpose.

[2] See *Ebbinghaus 2007b,* 135ff.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

hierarchy. Zermelo substantially advanced this schematic, generative picture with his inclusion of foundation in an axiomatization.[3]

In modern set theory, the replacement and foundation axioms focus the notion of set, with the first making possible the means of transfinite recursion and induction, and the second making possible the application of those means to get results about *all* sets. In a notable inversion, what has come to be regarded as the underlying *iterative conception* has become a heuristic for motivating the axioms of set theory generally. It is nowadays almost banal that foundation is the one axiom unnecessary for the recasting of mathematics in set-theoretic terms, but the axiom ascribes to membership the salient feature that distinguishes investigations specific to set theory as an autonomous field of mathematics. Indeed, it can be fairly said that modern set theory is at base a study couched in well-foundedness, the Cantorian well-ordering doctrines adapted to the Zermelian generative conception of sets.

This combined operative effect of replacement and foundation is much in evidence in the workings of Zermelo's article. However, Zermelo nowhere points out how replacement is implicated in definitions by transfinite recursion. He just applies such definitions routinely in his analysis of various cumulative hierarchies, even though their various levels, analogues of the V_α, being sets have their provenance in replacement. This aside, Zermelo's explicit appeals to separation and replacement raise the issue of their applicability. What properties, as given by propositional functions or logical formulas, are to be in the purview of these two axioms? The vagueness of "definite" property for separation had prompted several efforts at remedy including Zermelo's own *1929a,* and Zermelo now writes (p. 31) that "framing the axioms in a suitable fashion" replacement implies separation. The discussion below of Zermelo's models clarifies how these two axioms are to be taken in his second-order context. There is also an issue about Zermelo's specific formulation of foundation, and this too will be addressed in due course.

In Section 2, Zermelo provides formulations now basic to modern set theory, but as with the ZFC axioms the presentation is opaque, here because of Zermelo's insistence on having urelements, with one having been fixed as *the* empty set.[4] Zermelo formulates the von Neumann ordinals, but starting generally from any urelement u: $u, \{u\}, \{u, \{u\}\}, \ldots$. (For convenience, these will be referred to as the *u-ordinals*; the usual (von Neumann) ordinals are a special case, and we shall avail ourselves of them and their usual notation in what follows.) Notably, Zermelo, in unpublished work perhaps as early as

[3] Paul Bernays in a letter of 3 May 1931 to Kurt Gödel (*Gödel 2003,* 105ff) also provided an axiomatization of set theory in which foundation is included, an axiomatization which, significantly, was to be formalizable in first-order logic. This letter would be the conduit to Gödel's use of a version of the axiomatization in his monograph *1940* on the constructible universe.

[4] See the earlier "U)" clause, in which "an arbitrarily chosen 'urelement' $\mathfrak{u}_0$ takes the place of the 'null set'."

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

1913, may have been the first to sketch the rudiments of the von Neumann ordinals.[5] Nonetheless, it is evident from his presentation that for Zermelo Cantor's ordinal numbers retain a separate autonomy; Zermelo's reductionism interestingly did not extend to identifying the numbers with sets, and the various u-ordinals only "represent" the ordinal numbers.

With urelements in play, Zermelo investigates the various *normal domains*, models of ZF′ when the membership relation is restricted to them. In Zermelo's words, a normal domain has a "width" given by its *basis* consisting of urelements, and a "height" given by its *characteristic*, the supremum of ordinal numbers represented in it. To modern eyes versed in pure set theory, i.e. set theory without urelements and with one universe, Zermelo's width and height seem arcane, but as one reads on in the article, it becomes a crucial feature of the *applicability* of set theory. For Zermelo a mathematical context has basic subject matter and then various possible set-theoretic super-structures built on top for the application of set-theoretic ideas and constructions.

Zermelo's crucial observation is that there are simple set-theoretic conditions on the ordinals that secure his ZF′, conditions that newly underscore how the Zermelian sets are to be an algebraic closure of his axioms. In an inspired move, Zermelo takes the characteristic π of a normal domain P to be again an ordinal number, thereby "resolving" the Burali-Forti paradox by having π outside of P but within set theory. Zermelo's simple conditions are:

(I) π is a regular cardinal, i.e. if $\alpha < \pi$ and $F\colon\ \alpha \to \pi$ is arbitrary, then $\bigcup F``\alpha < \pi$, and

(II) π is a strong limit cardinal, i.e. if $\beta < \pi$, then $2^\beta < \pi$.

Zermelo initially observes that these conditions are *necessary*; he argues in terms of his representing u-ordinals, but we can proceed directly with the usual (von Neumann) ordinals: To establish (I), suppose that $\alpha < \pi$ and $F\colon\ \alpha \to \pi$. Since $\alpha \in P$, by a crucial use of replacement $F``\alpha$ is a *set* in $P$. $\bigcup F``\alpha$ is thus a set, in fact an ordinal, in P, and hence $\bigcup F``\alpha < \pi$. To establish (II), suppose that $\beta < \pi$. Then $\mathcal{P}(\beta)$ is a set in $P$ by the power set axiom. If to the contrary $2^\beta \geq \pi$, there would be a $G\colon \mathcal{P}(\beta) \to \pi$ such that $G``\mathcal{P}(\beta) = \pi$. But by another crucial application of replacement $G``\mathcal{P}(\beta)$ must be a set in P, which is a contradiction.

The intended applicability of separation and replacement can be gleaned from these arguments. Zermelo (p. 30) had stated separation in terms of propositional functions and provided the following footnote:

> Like the replacement function in E) [the replacement axiom] the propositional function $\mathfrak{f}(x)$ can be completely *arbitrary* here, and all consequences of it restricted to a particular class of functions cease to apply from the present point of view. I shall consider elsewhere more

[5] See *Ebbinghaus 2007b*, 133.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

thoroughly "the question of definiteness" in connection with my last contribution to this journal (*Zermelo 1929a*) and with the critical "remarks" by Th. Skolem (*Skolem 1930*).

In his *1929a,* Zermelo had proposed that the "definite" properties for separation be given in terms of second-order quantification, and Skolem had responded with alacrity to criticize the vagueness of this proposal and moreover to emphasize the "Skolem paradox", whereby the axioms of set theory cast in first-order terms have countable models even though they entail the existence of uncountable sets. Zermelo found this repugnant and would work against it,[6] but, in any case, there is a *mathematical* necessity for how replacement and separation must be taken in the context of *1930a*.

The above arguments for the necessity of conditions (I) and (II) both require that replacement be applied without restriction. In modern terms, *The replacement axiom should be taken as a single, second-order axiom quantifying over all possibilities*, yielding what we now call second-order ZF. It does not even suffice for replacement to be a schema of second-order axioms, and the reference in the above cited footnote to *Zermelo 1929a*, which would still sanction separation and replacement taken as schemata, is equivocating. Zermelo's exposition is generally less meticulous than it was two decades before, and haphazard on the role of replacement. For the necessity of (II), he does not explicitly associate u-ordinals to the subsets of a set, and when finally he appeals to replacement it is for a limit case made redundant by (I).

In Section 3, Zermelo continues with three "development" theorems for his normal domains. The first states that each normal domain P is indeed stratified according to rank because of foundation: With Q the basis of urelements and π the characteristic of P, Zermelo defines the corresponding cumulative ranks by transfinite recursion:

$$P_1 = Q\,;\ P_{\alpha+1} = P_\alpha \cup \mathcal{P}(P_\alpha)\,;\ \text{and } P_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \text{ for limit ordinals } \alpha,$$

and concludes that

$$P = P_\pi = \bigcup_{\alpha<\pi} P_\alpha\,.$$

Zermelo emphasizes the partitioning into disjoint layers $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ and points out that each such layer contains a u-ordinal, so that the hierarchy is strict. It becomes evident that Zermelo is entertaining all possible subsets in his normal domains, so that the $\mathcal{P}(P_\alpha)$ above has an absolute significance independent of the domain P.[7]

The first development theorem raises an issue about the axioms of foundation and infinity. Zermelo (p. 31) actually formulates foundation both as stipulating that there are no infinite descending $\in$-chains, "Or, what amounts to the same thing: Every partial domain T contains at least one element t_0 that has no element t in T." As is now well-known, the latter form implies

[6] See *Ebbinghaus 2007b*, 196ff and the introductory note to *1929a*.

[7] This is clarified by the first isomorphism theorem mentioned below.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

the former only in the presence of substantial axioms, including the axiom of choice. Aside from this, the latter, a second-order form of foundation, was needed in the proof of the first development theorem: It is well-known that usual (set) foundation implies such a strong form assuming *transitive containment*, that every set is a subset of a transitive set.[8] Furthermore, the (first-order) axioms of replacement and infinity do imply transitive containment.[9] However, Zermelo is not assuming the axiom of infinity. In fact, it is a latter-day observation that second-order ZF with only (set) foundation but without infinity does not suffice to establish transitive containment, and in fact has models whose membership relation is ill-founded.[10] Hence, foundation as Zermelo formulated it in second-order terms *is* necessary for his cumulative hierarchy analysis in the absence of infinity, i.e. in case of normal domains with characteristic ω.

The second development theorem addresses *unit* domains, those normal domains P with a single urelement, $Q = \{u\}$, and provides information about their ranks. Zermelo had defined a Beth-type cardinal-valued function as follows: $\Psi(0) = 0$; $\Psi(\xi+1) = 2^{\Psi(\xi)}$; and $\Psi(\alpha) = \sup_{\xi<\alpha} \Psi(\xi)$ for limit ordinals α. Zermelo now proves that each P_α has cardinality $\Psi(\alpha)$ for infinite α.

In remarks following the second theorem Zermelo concludes that unit domains satisfy von Neumann's axiom IV2, that a class is a set exactly when there is no surjection from that class onto the entire universe. Zermelo thus establishes the consistency of IV2 relative to his axioms, proceeding in his second-order context with natural models. Zermelo notes: "Set theory, however, would lose most of its applicability if it were restricted to 'unit domains'." Moreover, Zermelo (p. 45) returns with emphasis to this point to criticize the putative restrictiveness of von Neumann's axiom. For Zermelo, one should be able to start with an unrestricted amount of basic subject matter as urelements and then "apply" set theory by imposing cumulative hierarchy superstructures on top. However, the following result shows that Zermelo's reservations have only to do with the nature and size of the totality of urelements. $|X|$ denotes the cardinality of a set X in the presence of the axiom of choice, i.e. the least ordinal bijective with X.

Proposition. For any normal domain P with basis Q and characteristic π, von Neumann's axiom IV2 holds in P *iff* Q is a set satisfying $|Q| \leq \pi$.

---

8 Suppose that T is a non-empty class, say with $x \in T$. Let t be a transitive set such that $\{x\} \subseteq t$ and consider the set $t \cap T$, given by separation. By (set) foundation there is a $t_0 \in t \cap T$ such that $t_0 \cap t \cap T = \emptyset$. But then, since t is transitive, $t_0 \cap T = \emptyset$. This argument was probably first given by Gödel, in his letter of 20 July 1939 to Bernays (*Gödel 2003*, 121).

9 For any set x and $n \in \omega$, recursively define $x_0 = x$, and $x_{n+1} = \bigcup x_n$. Then $\bigcup_n x_n$ is a transitive set containing x. The use of the axioms of replacement and infinity in this argument was noted by Gödel in the letter cited in the previous footnote.

10 See *Vopěnka and Hajek 1963* and *Hauschild 1966*.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Proof. Suppose first that von Neumann's axiom holds in P. Since π itself is a proper class of P, π is surjective onto P and hence $|Q| \leq \pi$.

For the converse, suppose that Q is a set satisfying $|Q| \leq \pi$. Every set in P, being well-orderable, is bijective with some u-ordinal in P,[11] and so has cardinality less than π. Hence, one can prove by induction that for the development $P = \bigcup_{\alpha<\pi} P_\alpha$, $|P_\alpha| \leq \bigcup_{\beta<\pi} \pi^\beta = \pi$ for every $\alpha \leq \pi$, the equality following from (I) and (II) for π. So presuming that urelements are exempted, von Neumann's axiom for P amounts to: For any $X \subseteq P$, $X \in P$ *iff* $|X| < \pi$. The forward direction here was already noted. For the converse, if $|X| < \pi$, then applying replacement and (I) to the function $F\colon X \to \pi$ given by $F(x) =$ the least ξ such that $x \in P_{\xi+1}$, it follows that there is an $\alpha < \pi$ such that $X \subseteq P_\alpha$, and so $X \in P_{\alpha+1} \subseteq P$.

The third development theorem provides a more refined hierarchy for a normal domain P based on the Ψ function—to wit the $(\alpha+1)$th cumulative level is now to be formed by adjoining only subsets of the αth level of cardinality at most $\Psi(\alpha)$—and with this hierarchy establishes that conditions (I) and (II) are also *sufficient* for P to be a normal domain. Actually, Zermelo seems to be assuming here that $|Q| \leq \pi$ for the basis Q and characteristic π. By the above proposition, such "canonical" developments can only be given for a normal domain exactly when it satisfies von Neumann's axiom IV2. The implicit generality of Zermelo's theorem seems to work against the alleged restrictiveness of IV2.

Those cardinals π satisfying conditions (I) and (II) are called *boundary numbers* [*Grenzzahlen*] by Zermelo,[12] and when $\pi > \omega$ are now called the *(strongly) inaccessible* cardinals. These cardinals are basic in the theory of large cardinals, a mainstream of modern set theory devoted to the investigation of strong hypotheses and consistency strength, and in fact are the modest beginnings of a natural linear hierarchy of stronger and stronger postulations extending ZFC.[13] It is through Zermelo's *1930a* that inaccessible cardinals became structurally relevant for set theory as the delimiters of natural models. Just 13 articles before Zermelo's in *Fundamenta mathematicae*, *Sierpiński and Tarski 1930* had formulated the inaccessible cardinals arithmetically as those uncountable cardinals that are not the product of fewer cardinals each of smaller power and observed that inaccessible cardinals are regular limit cardinals. The first large cardinals ever considered, the regular limit cardinals had appeared in *Hausdorff 1908,* 443, and following *Hausdorff 1914,* 131, Zermelo calls them the "exorbitant numbers". Be that as it may, in the early

[11] This fundamental von Neumann result, a consequence of (first-order) replacement, was pointed out by Zermelo (p. 32).

[12] "Boundary numbers" is how "Grenzzahlen" has been translated, but the more literal "limit numbers" has its connotative advantages as well: Zermelo in his *1930a* refers to Kant's antinomies, and Kant in his *Prolegomena* had distinguished between *Grenzen* and *Schranken*, with the first having entities beyond.

[13] See *Kanamori 2003*.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

model-theoretic investigations of set theory the inaccessible cardinals provided the natural models as envisioned by Zermelo. Years later *Shepherdson 1952* provided more formal proofs of Zermelo's results in a first-order context with sets and classes but without urelements, taking account of the relativity of concepts and isolating Zermelo's models as the transitive, super-complete models.[14] Recently *Uzquiano 1999* has investigated models of second-order Zermelo set theory (no replacement axiom but taking the separation axiom as a single second-order axiom) and showed that V_δ for limit ordinals $\delta > \omega$ are by no means the only possibilities and that there is already considerable variation at level ω.

In Section 4, Zermelo proceeds with three isomorphism theorems that establish a second-order categoricity of sorts for his axioms in terms of the cardinal numbers of the bases and characteristics. The first isomorphism theorem states that two normal domains with the same characteristic and bases of the same cardinality are isomorphic, the isomorphisms generated by bijections between the bases and extended through the two cumulative hierarchies as structured by foundation. Unbridled second-order replacement is crucial here as well, this time to establish that the cumulative ranks of the two domains are level-by-level extensionally correlative, though Zermelo does not mention replacement at all. This correlation also brings out how the $\mathcal{P}(P_\alpha)$'s for Zermelo have an absolute significance. The second isomorphism theorem states that two normal domains with different characteristics and bases of the same cardinality are such that one is isomorphic to a cumulative rank of the other. The third isomorphism theorem states that two normal domains with the same characteristic are such that one is isomorphic to a subdomain of the other. Hence, as Zermelo emphasizes, a normal domain is characterized up to isomorphism by its *type*, the pair $\langle \mathfrak{q}, \pi \rangle$ where $\mathfrak{q}$ is the cardinal number of the basis, which can be arbitrary, and π is the characteristic, which must be ω or inaccessible; and given two types $\langle \mathfrak{q}, \pi \rangle$ and $\langle \mathfrak{q}', \pi' \rangle$, isomorphic embeddability is a consequence of $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}'$ and $\pi \leq \pi'$.

In Section 5, Zermelo concludes with a brief discussion of existence, consistency, and categoricity. Notably, he initially assumes "the existence of domains of set theory that satisfy the ZF-axioms for an arbitrary basis", and concludes forthwith the existence of domains that also satisfy foundation. This was the main thrust of *von Neumann 1929,* which devoted several pages to the result in a formalized axiomatic setting. Speculating then on the possibilities for characteristics, Zermelo points out that ω is a characteristic, as starting with any normal domain P with basis Q one can consider the corresponding

[14] A class is *super-complete iff* any sub*set* is an element. *Shepherdson 1952,* 227, wrote: "[Equivalent results] were obtained by Zermelo although in an insufficiently rigorous manner. He appeared to take no account of the relativity of set-theoretical concepts pointed out by Skolem." Skolem relativity has seemingly become entrenched, but Zermelo of course was deliberately working in a second-order context and decidedly opposed "Skolemism"!

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

subdomain P_ω of the canonical development of P (cf. the third development theorem—P_ω is in effect the set of hereditarily finite sets). This also suggests why Zermelo deliberately eschews the axiom of infinity, which thus establishes the relative consistency of ZF′. Zermelo proceeds by analogy to the least inaccessible cardinal via the ordinal type of the next normal domain—what he calls the "Cantorian" normal domain—and points out how, like ω, such a cardinal cannot be proved to exist in ZF′. This kind of positing by analogy with the axiom of infinity is now typical in the theory of large cardinals and is resonant with Cantor's own seamless account of number across the finite and the transfinite. Since already it is seen that ω may exist in one model but not another, Zermelo wrote (p. 45): "Our axiom system is *non-categorical* after all, which, in this case, is not a disadvantage, but rather an *advantage*. For the enormous significance and unlimited applicability of set theory rests precisely on this fact."

Zermelo argues more broadly how a characteristic specifies a model with "suitable postulates" that determine it categorically. In a sweeping climax he puts forward the general hypothesis that "*every categorically determined domain can also be conceived of* [*aufgefaßt*] *as a 'set' in some way;* that is, that it can occur as an element of a (suitably chosen) normal domain"[15] and postulated "the *existence of an unlimited sequence of boundary numbers* [*Grenzzahlen*] as a new axiom for the 'meta-theory of sets' ..." The postulation would bijectively correlate the ordinal numbers with the inaccessible cardinals and so provide for an endless procession of models.[16] The open-endedness of Zermelo's original *1908b* axiomatization had been structured by replacement and foundation, but after synthesizing the sense of progression inherent in the new cumulative hierarchy picture and the sense of completion in the inaccessible cardinals, Zermelo advanced a new open-endedness with an eternal return of models. This dynamic view of sets and set theory was a marked departure from Cantor's (and later, Gödel's) focus on a fixed universe of sets. Through means dramatically different and complementary to Cantor's absolute infinite, Zermelo dissolved the traditional antinomies of set theory through a dialectical interplay between the global and the local.[17] Furthermore, not only did Zermelo subsume von Neumann's axiom IV2, that principled means of handling classes too large, but by having such classes be elements in a next normal domain and therefore coming under the purview of his generative axioms like power set, Zermelo dissolved further antinomies like the incompatibility of $2^\pi > \pi$ with π being the cardinal number of the

[15] This anticipates the "closed" domains of the last page of *s1930e*.

[16] Tarski in his *1938* also and later posited arbitrarily large inaccessible cardinals via his axiom of inaccessible sets; he was led to this axiom by cardinality and closure considerations, and he formulated it in such a way that it implies the axiom of choice. In contrast to Zermelo's informal, second-order approach Tarski could be seen to be working in first-order ZF.

[17] *Tait 1998* provides a sophisticated account of this aspect of Zermelo's conception of set theory and draws out large cardinal reflection principles.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

universal class, the first "paradox" that Russell had come to, while studying Cantor's work.

Zermelo (p. 47) concludes grandly:

> The two diametrically opposed tendencies of the thinking mind, the idea of creative *progress* and that of summary *completion*, which form also the basis for Kant's "antinomies", find their symbolic presentation as well as their symbolic reconciliation in the transfinite number series that rests upon the notion of well-ordering and which, though lacking in the true completion on account of its boundless progressing, possesses relative way stations, namely those "boundary numbers" separating the higher from the lower model types. Thus, instead of leading to constriction and mutilation, the set-theoretical "antinomies" lead, when understood correctly, to yet still unpredictable development of the mathematical science and its enrichment.

Remarkable and distinctive though *Zermelo 1930a* was, it was historically overshadowed by the epochal work of Kurt Gödel. In the summer of 1930 the young Gödel established his now celebrated incompleteness results. As part of a steady intellectual development, he forthwith moved into set theory as a transfinite extension of the theory of types, and in the later 1930s established the relative consistency of the axiom of choice and of the continuum hypothesis with the inner model L of constructible sets. The approaches of Gödel and of Zermelo to set theory merit comparison with respect to the underlying logic, the emergence of the cumulative hierarchy view, the focus on models of set theory, and subsequent influence.

First and foremost, first-order logic is part and parcel of Gödel's work both in completeness and set theory. Zermelo proceeded in second-order terms and ultimately did not take the linguistic turn, in that he did not develop an uninterpreted formalism. Whereas the Skolem paradox much exercised Zermelo, Gödel subsumed paradox into method by invoking Skolem's analysis to establish the continuum hypothesis in L. Gödel showed how first-order definability can be formalized and used in a transfinite recursive construction to establish striking new mathematical results. This significantly contributed to a lasting ascendancy for first-order logic, which beyond its sufficiency as a logical framework for mathematics was newly seen to have considerable operational efficacy.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Zermelo first adopted the axiom of foundation, and indeed it was thematically central to his *1930a* analysis. Gödel had foundation in his *1940* monograph on L, in an axiomatization adapted from one of Bernays, and indeed, it was axiomatically correlative to his view of set theory as a hierarchy of cumulative types. Gödel came close to *Zermelo 1930a* in his informal sketch *1939* about L when he stated his relative consistency results in terms of the *Zermelo 1908b* axioms as rendered in first-order logic and asserted that L_Ω, where Ω is "the first inaccessible number", is a model of Zermelo's axioms together with replacement. Also, making his only explicit reference to *Zermelo 1930a*, Gödel in his *1947,* 520, later gave the existence of inaccessible cardinals as the simplest example of an axiom that asserts still further iterations of the 'set of' operation and can supplement the axioms of set theory without arbitrariness.[18]

Beyond the imprint on Gödel himself, which could be regarded as significant, *Zermelo 1930a* seemed to have had little influence on the further development of set theory, presumably because of its second-order lens and its lack of rigorous detail and attention to relativism. On the other hand, Gödel's work with L with its incisive analysis and use of first-order definability was readily recognized as a signal advance. Issues about consistency, truth, and definability were brought to the forefront, and the continuum hypothesis result established the mathematical importance of a hierarchical analysis. As the construction of L was gradually digested, the sense it promoted of a cumulative hierarchy reverberated to become the basic picture of the universe of sets. Nonetheless, with the assimilation of set-theoretic rigor, increasing confidence in consistency, and the emergence of ZFC as the canonical set theory, there has been of late new appreciation of the sweep of *1930a* especially because of renewed interest in second-order logic.[19]

---

[18] Gödel referenced *Zermelo 1930a* after writing: "[This] axiom, roughly speaking, means nothing else but that the totality of sets obtainable by exclusive use of the processes of formation of sets expressed in the other axioms forms again a set (and, therefore, a new basis for a further application of these processes)." This was just what Zermelo had emphasized; for Gödel there would also be the overlay of truth in the "next higher system".

[19] See for example *Tait 1998* and *Shapiro-Uzquiano 2008*.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Über Grenzzahlen und Mengenbereiche

Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre

1930a

In der folgenden Arbeit handelt es sich um die Untersuchung der „Bereiche“, bestehend aus Mengen und Urelementen, in denen die „allgemeinen“ Axiome der Mengenlehre (die „Zermelo-Fraenkelschen Axiome“ mit einer Ergänzung) erfüllt sind, und um den Nachweis, daß ein solcher „Normalbereich“ bis auf isomorphe Abbildungen bestimmt ist durch zwei Zahlen, durch die Mächtigkeit seiner „Basis“ d. h. der Gesamtheit seiner „Urelemente“ (die keine eigentlichen Mengen sind) und durch seine „Charakteristik“ d. h. den Ordnungstypus aller in ihm enthaltenen „Grundfolgen“ oder aller in ihm durch Mengen vertretenen Ordnungszahlen. Es wird gezeigt, daß diese beiden Zahlen unabhängig von einander beliebig gewählt werden können, sofern die „Charakteristik“ den Bedingungen einer „Grenzzahl“ genügt, nämlich gleichzeitig eine „Kernzahl“ oder „reguläre Anfangszahl“ und „Eigenwert“ oder „kritische Zahl“ einer gewissen „Normalfunktion“ zu sein. Die schrankenlose Fortsetzbarkeit der transfiniten Zahlenreihe gestattet danach die Darstellung der Mengenlehre in einer ebenso unbegrenzten Folge wohlunterschiedener „Modelle“. Und eben die scharfe Unterscheidung zwischen den verschiedenen Modellen des (nicht-kategorischen!) Axiomensystems sichert uns auch eine befriedigende Aufklärung der „ultrafiniten Antinomien“, indem immer die „Unmengen“ des einen Modells sich als eigentliche „Mengen“ darstellen im nächstfolgenden wie in allen höheren Modellen.

Als Hilfsmittel der Untersuchung bieten sich einmal die „Grundfolgen“, nämlich die in jedem Normalbereich vorhandenen einfachsten Vertreter der verschiedenen Ordnungszahlen, und zweitens die „Entwickelung“ des Normalbereiches, seine Zerlegung in eine wohlgeordnete Folge getrennter „Schichten“,
30 wobei die einer Schicht | angehörenden Mengen immer in den vorangehenden „wurzeln“, sodaß ihre Elemente in diesen liegen, und selbst wieder den folgenden als Material dienen.

§ 1. Die konstituierenden Axiome

Das unserer Untersuchung zugrunde liegende Axiomensystem der Mengenlehre ist im Wesentlichen das „Zermelo-Fraenkelsche“, nämlich das durch das Fraenkelsche „Ersetzungsaxiom“ ergänzte System meiner Axiome von 1908* mit der Abänderung daß einmal mein „Unendlichkeits-Axiom“ als nicht zur

* Math. Ann. Bd. 65, S. 261–281.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

On boundary numbers and domains of sets

New investigations in the foundations of set theory

1930a

The present paper investigates "domains", consisting of sets and urelements, in which the "general" axioms of set theory (the "Zermelo-Fraenkel axioms" with a supplementation) are satisfied. The paper also provides a demonstration that such a "normal domain" is determined up to isomorphic mappings by two numbers: the cardinality of its "basis", that is, the totality of its "urelements" (which are not proper sets), and its "characteristic", that is, the order type of all "basic sequences" contained in it or of all ordinal numbers represented in it by sets. It is shown that we can choose these two numbers arbitrarily and independently of one another, provided that the "characteristic" satisfies the conditions for being a "boundary number"; that is, being a "core number", or "regular initial number", as well as an "eigenvalue", or "critical number", of a certain "normal function" at the same time. The boundless continuability of the transfinite number sequence therefore permits the presentation of set theory in a likewise unlimited sequence of well-differentiated "models". And it is this sharp distinction between the different models of the (non-categorical!) axiom system that allows us to resolve the "ultrafinite antinomies" to our satisfaction by always presenting the "non-sets" of one model as proper "sets" in the next model and in all higher models.

Two notions suggest themselves as expedients for our investigation: first, the "basic sequences", that is, the simplest representatives of the different ordinal numbers, which occur in every normal domain. Second, the "development" of the normal domain, its decomposition into a well-ordered sequence of separated "layers" where the sets belonging to one layer are always "rooted" in the preceding layers such that their elements lie in those layers, and they themselves, in turn, serve as material for subsequent layers.

§ 1. The constitutive axioms

The axiom system of set theory that forms the basis of our investigation is essentially the "Zermelo-Fraenkel" axiom system, namely, the system that results when my axioms of 1908[1] are supplemented with Fraenkel's "replacement axiom" and modified so that, on the one hand, my "axiom of infinity"

[1] *Zermelo 1908b.*

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

„allgemeinen" Mengenlehre gehörig weggelassen und andererseits das „Axiom der Fundierung" hinzugefügt wird, wodurch „zirkelhafte" und „abgründige" Mengen ausgeschlossen werden. Demgemäß bezeichnen wir als „ergänztes ZF-System" oder abgekürzt als „ZF'-System" die Gesamtheit der folgenden Axiome:

B) *Axiom der Bestimmtheit:* Jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt, sofern sie überhaupt Elemente besitzt.

A) *Axiom der Aussonderung:* Durch jede Satzfunktion $\mathfrak{f}(x)$ wird aus jeder Menge m eine Untermenge $m_\mathfrak{f}$ ausgesondert, welche alle Elemente x umfasst, für die $\mathfrak{f}(x)$ wahr ist. Oder: jedem Teil einer Menge entspricht selbst eine Menge, welche alle Elemente dieses Teiles enthält[1].

P) *Axiom der Paarung:* Sind a, b irgend zwei Elemente, so gibt es eine Menge, welche beide als Elemente enthält.

U) *Axiom der Potenzmenge:* Jeder Menge m entspricht eine Menge $\mathfrak{U}m$, welche alle Untermengen von m als Elemente enthält, einschließlich der Nullmenge und m selbst. An die Stelle der „Nullmenge" tritt hier ein beliebig ausgewähltes „Urelement" u_0.

V) *Axiom der Vereinigung*: Jeder Menge m entspricht eine Menge $\mathfrak{S}m$, welche die Elemente ihrer Elemente enthält.

E) *Axiom der Ersetzung:* Ersetzt man die Elemente x einer Menge m eindeutig durch beliebige Elemente x' des Bereiches, so ent- | hält dieser auch
31 eine Menge m', welche alle diese x' zu Elementen hat.

F) *Axiom der Fundierung:* Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht mit endlichem Index ab bei einem Urelement. Oder, was gleichbedeutend ist: Jeder Teilbereich T enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat.

Dieses letzte Axiom, durch welches alle „zirkelhaften" namentlich auch alle „sich selbst enthaltenden", überhaupt alle „wurzellosen" Mengen ausgeschlossen werden, war bei allen praktischen Anwendungen der Mengenlehre bisher immer erfüllt, bringt also vorläufig keine wesentliche Einschränkung der Theorie.

[1] Die Satzfunktion $\mathfrak{f}(\mathsf{x})$ kann hier ganz *beliebig* sein, wie auch die Ersetzungsfunktion in E), und alle aus ihrer Beschränkung auf eine besondere Klasse von Funktionen gezogenen Folgerungen kommen für den hier angenommen Standpunkt in Wegfall. Eine eingehende Erörterung der „Definitheitsfrage" in Anschluß an meine letzte Note in dieser Zeitschrift (Fund. Math. T. XIV, S. 339–344) und an die kritischen „Bemerkungen" des Herrn Th. Skolem (ebendort T. XV, S. 337–341) behalte ich mir vor.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

is dropped because it does not belong to "general" set theory and, on the other hand, the "axiom of foundation" is added, whereby "circular" and "non-grounded" sets are excluded. Accordingly, we call the totality of the following axioms the "supplemented ZF-system", or "ZF'-system", for short:

B) *Axiom of extensionality*: Every set is determined by its elements, provided that it has any elements at all.

A) *Axiom of separation*: Every propositional function $\mathfrak{f}(x)$ separates from every set m a subset $m_{\mathfrak{f}}$ containing all those elements x for which $\mathfrak{f}(x)$ is true. Or: To each part of a set there in turn corresponds a set containing all elements of this part.[2]

P) *Axiom of pairing*: If a and b are any two elements, then there is a set that contains both of them as its elements.

U) *Axiom of the power set*: To every set m there corresponds a set $\mathfrak{U}m$ that contains as elements all subsets of m, including the null set and m itself. Here, an arbitrarily chosen "urelement" $\mathfrak{u}_0$ takes the place of the "null set".

V) *Axiom of the union*: To every set m there corresponds a set $\mathfrak{S}m$ that contains the elements of its elements.

E) *Axiom of replacement*: If the elements x of a set m are replaced in a unique way by arbitrary elements x' of the domain, then the domain contains also a set m' that has as its elements all these elements x'.

F) *Axiom of foundation*: Every (decreasing) chain of elements, in which each term is an element of the preceding one, terminates with finite index at an urelement. Or, what amounts to the same thing: Every partial domain T contains at least one element t_0 that has no element t in T.

This last axiom, which excludes all "circular" sets, all "self-membered" sets in particular, and all "rootless" sets in general, has always been satisfied in all practical applications of set theory, and, hence, does not result in an essential restriction of the theory for the time being.

[2] Like the replacement function in E), the propositional function $\mathfrak{f}(x)$ can be completely *arbitrary* here, and all consequences of restricting it to a particular class of functions cease to apply from the present point of view. I shall consider elsewhere more thoroughly "the question of definiteness" in connection with my last contribution to this journal (*1929a*) and with the critical "remarks" by Mr. Th. Skolem (*Skolem 1930*).

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Auf die „Unabhängigkeit" der Axiome kommt es uns hier nicht an: bei geeigneter Fassung ließe sich etwa A) aus E) ableiten oder P) aus U) und E). Das „Auswahl-Axiom" ist hier nicht ausdrücklich formuliert, da es einen anderen Charakter hat als die übrigen und nicht zur Abgrenzung der Bereiche dienen kann. Es wird aber unserer ganzen Untersuchung als allgemeines logisches Prinzip zugrunde gelegt, und namentlich wird auf Grund dieses Prinzipes im Folgenden jede vorkommende Menge auch als *wohlordnungsfähig* vorausgesetzt werden.

Dieses Axiomensystem BAPUVEF, das wir als das „ZF'-System" bezeichnen wollen, nehmen wir hier zum Ausgangspunkt und bezeichnen als einen „*Normalbereich*" einen Bereich von „Mengen" und „Urelementen", der in Bezug auf die „Grundrelation" $a \epsilon b$ unserem ZF'-System genügt. „Bereiche" dieser Art, ihre „Elemente", ihre „Unterbereiche", ihre „Summen" und „Durchschnitte" werden wir dabei nach den allgemeinen mengentheoretischen Begriffen und Axiomen genau wie *Mengen* behandeln, von denen sie sich auch in keinem sachlich wesentlichen Punkte unterscheiden, wir werden sie aber immer nur als „Bereiche" und nicht als „Mengen" bezeichnen zur Unterscheidung von den „Mengen" als den Elementen des betrachteten Bereiches.

§ 2. Die Grundfolgen eines Normalbereiches und seine Charakteristik

Als „*Grundfolge*" bezeichne ich *eine wohlgeordnete Menge, in welcher jedes Element (mit Ausnahme des ersten, das ein „Urelement" sein muß), identisch ist mit der Menge aller ihm vorangehenden Elemente.*

32 | So entstammen dem Urelement u die Grundfolgen

$$g_0 = u, \quad g_1 = \{u\}, \quad g_2 = \{u, \{u\}\}, \quad g_3 = \{u, \{u\}, \{u, \{u\}\}\},$$

und so fort nach der Regel

$$g_{\alpha+1} = g_\alpha + \{g_\alpha\} \text{ und } g_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} g_\beta, \text{ wenn } \alpha \text{ eine Limeszahl ist.}$$

Allgemein ist eine Grundfolge *eine durch die ε-Beziehung geordnete Menge*, die dann wegen F) auch *wohlgeordnet* sein muß, und es gelten für sie u. a. die folgenden leicht zu verifizierenden Sätze:

1) Jedes in einer Grundfolge enthaltene Element ist Element aller folgenden und enthält alle vorangehenden als Elemente.
2) Jedes Element sowie jeder Abschnitt einer Grundfolge ist selbst eine Grundfolge.
3) Aus jeder Grundfolge entsteht eine neue, wenn man zu ihren Elementen die Menge selbst als letztes Element hinzufügt: $g' = g + \{g\}$, wobei ihr Ordnungstypus gerade um 1 vermehrt wird.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

We are not concerned here with the "independence" of the axioms: framing the axioms in a suitable fashion, we could, for instance, derive A) from E), or P) from U) and E). We have not explicitly formulated the "axiom of choice" here because it differs in character from the other axioms and cannot be used to delimit the domains. However, we use it as a general logical principle upon which our entire investigation is based; in particular, it is on the basis of this principle that we shall assume in the following that every set is *capable of being well-ordered*.

This axiom system BAPUVEF, which we will call the "ZF'-system", serves as our starting point. We call "*normal domain*" a domain of "sets" and "urelements" that satisfies our "ZF'-system" with regard to the "basic relation" $a \epsilon b$. We shall treat "domains" of this kind, their "elements", their "subdomains", their "sums" and "intersections" according to the general set-theoretic concepts and axioms exactly like *sets*, from which they do not substantially differ anyway. But we shall always call them "domains" rather than "sets" in order to distinguish them from the "sets" that are the elements of the domain under consideration.

§ 2. The basic sequences of a normal domain and its characteristic

I call a *"basic sequence" a well-ordered set in which every element (with the exception of the first, which has to be an urelement) is identical to the set of all elements preceding it.*

From the urelement u thus issue the basic sequences

$$g_0 = u, \quad g_1 = \{u\}, \quad g_2 = \{u, \{u\}\}, \quad g_3 = \{u, \{u\}, \{u, \{u\}\}\},$$

and so forth in accordance with the rule

$$g_{\alpha+1} = g_\alpha + \{g_\alpha\}, \quad \text{and} \quad g_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} g_\beta \text{ if } \alpha \text{ is a limit number}.$$

Generally speaking, a basic sequence is *a set that is ordered by the ε-relation*, and which then, on account of F), must also be *well-ordered*. The following easily verifiable theorems, among others, hold for basic sequences:

1) Each element in a basic sequence is contained as an element in all those following it and contains as elements all those preceding it.
2) Each element is itself a basic sequence, as is each segment of a basic sequence.
3) A new basic sequence results from any basic sequence when the set itself is added to its elements as the last element: $g' = g + \{g\}$, when its order type is increased by exactly 1.

4) Aus jeder Menge T von Grundfolgen mit identischem Anfangselement u entsteht durch Vereinigung eine neue Grundfolge $\mathfrak{S}T$, welche die Elemente von T sämtlich als Abschnitte und außer sich selbst als Elemente enthält. Auch hier ist der Ordnungstypus der neuen Grundfolge der auf die der gegebenen nächstfolgende.
5) Von zwei verschiedenen Grundfolgen mit identischem Anfangselement ist immer die eine Abschnitt und Element der anderen. Nämlich immer diejenige vom kleineren Ordnungstypus, die wir dann auch einfach als die „kleinere" bezeichnen wollen.
6) Ist u ein Urelement und r eine nach dem Typus ϱ wohlgeordnete Menge in einem Normalbereich, so enthält dieser Bereich auch eine der Menge r ähnliche Grundfolge g_ϱ mit u als Anfangselement.
   Angenommen nämlich, der Satz sei richtig für alle Ordnungszahlen $\varrho < \alpha$, so gilt er auch für $\varrho = \alpha$. Denn entweder ist $\alpha = \beta + 1$ und g_β hat den Typus β, dann hat nach 3) g' den Typus $\beta + 1 = \alpha$. Oder α ist Limeszahl, dann ist die Vereinigung Σg_β aller g_β für $\beta < \alpha$ nach 4) selbst eine Grundfolge und zwar vom Typus α, da jeder ihrer echten Abschnitte selbst ein $g_\beta < g_\alpha$ ist.
7) Die Gesamtheit *aller* in einem Normalbereich P enthaltenen Grundfolgen g_α mit gemeinsamem Anfangselement u bildet einen wohldefinierten Unterbereich G_u von P, und die entsprechenden Ordnungszahlen α einen wohldefinierten Abschnitt Z_π der Zahlenreihe vom Ordnungstypus π, aber der Bereich P enthält keine „Menge" w, die alle diese Grundfolgen zu Elementen hätte, und | ebenso wenig eine wohlgeordnete Menge
33 vom Ordnungstypus π, sondern π ist lediglich die *obere Grenze* aller in P durch Mengen vertretenen Ordnungszahlen. Anderenfalls ergäbe sich die bekannte „Burali-Fortische Antinomie".

Die so definierte Ordnungszahl π, die hier als „Grenzzahl" oder „Charakteristik" des Normalbereiches bezeichnet werden soll, ist aber nicht willkürlich, sondern muß, um „Grenzzahl-Charakter" zu haben, gewissen Bedingungen genügen. Es sind dies die folgenden:

I) Jede Grenzzahl hat „*Kernzahl*-Charakter" d. h. sie ist eine „reguläre Anfangszahl", nämlich *keiner kleineren „konfinal"*[2].

Wäre nämlich π konfinal $\varrho < \pi$, so enthielte der Abschnitt Z_π der Zahlenreihe eine Teilfolge vom Ordnungstypus ϱ bestehend aus Zahlen $\alpha_\nu < \pi$, die keinem echten Abschnitte $Z_\alpha < Z_\pi$ angehörten. Jeder dieser Zahlen a_ν entspräche dann in P eine Grundfolge g_{α_ν} vom gleichen Ordnungstypus, und auch die Vereinigung aller dieser g_{α_ν} wäre nach 4) wieder eine Grundfolge g_α des Normalbereiches, während doch ihr Ordnungstypus $\alpha = \lim \alpha_\nu = \pi$ sein müßte nach der Annahme. Also ist π eine „Kernzahl" oder eine „reguläre Anfangszahl" und zwar, wie wir sehen werden, eine solche „zweiter Art", eine „exorbitante" Zahl. (Hausdorff a. a. O. S. 131) Wäre nämlich $\pi = \omega_{\nu+1}$, so

[2] Vergl. *F. Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. Kap. IV § 4.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

4) The union of any set T of basic sequences whose initial elements are identical gives rise to a new basic sequence $\mathfrak{S}T$ that contains all elements of T as segments and, with the exception of itself, also as elements. Once again, the order type of the new basic sequence immediately follows that of the given basic sequences.
5) Of any two different basic sequences with the same initial element, one is always contained in the other, both as an element and as a segment. Because it is always the sequence of the smaller order type that is so contained in the other, we shall simply refer to it as the "smaller" one of the two sequences.
6) If a normal domain contains an urelement u and a well-ordered set r of type ϱ, then it also contains a basic sequence g_ϱ that is similar to the set r and whose initial element is u.
For, assuming that it holds for all ordinal numbers $\varrho < \alpha$, the theorem also holds for $\varrho = \alpha$. For either $\alpha = \beta + 1$ and g_β has type β, and, therefore, g' has type $\beta + 1 = \alpha$, according to 3). Or α is a limit number. In this case, the union Σg_β of all g_β for $\beta < \alpha$ is itself, according to 4), a basic sequence. Moreover, since each of its proper segments is itself a $g_\beta < g_\alpha$, it is a basic sequence of type α.
7) The totality of *all* basic sequences g_α with common initial element u contained in a normal domain P forms a well-defined subdomain G_u of P, and the corresponding ordinal numbers α form a well-defined segment Z_π of the number series of order type π. The domain P, however, does not contain a "set" w that would contain as its elements all these basic sequences. Nor does it contain a well-ordered set of order type π. Rather, π is only the *upper limit* of all ordinal numbers represented in P by sets. Otherwise, the well-known "Burali-Forti antinomy" would follow.

The ordinal number π so defined, which will be called here the "boundary number", or "characteristic", of the normal domain, is, however, not arbitrary. In order to possess the "character of a boundary number" it must satisfy the following conditions:

I) Every boundary number possesses the "character of a *core number*", that is, it is a "regular initial number", it is *"cofinal" with no smaller number.*[3]

For if π were cofinal with $\varrho < \pi$, then the segment Z_π of the number series would contain a partial series of order type ϱ consisting of numbers $\alpha_\nu < \pi$ that would belong to no proper segment $Z_\alpha < Z_\pi$. To each of these numbers α_ν there would then correspond in P a basic sequence g_{α_ν} of the same order type. And, by 4), the union of all these g_{α_ν} would be a basic sequence g_α of the normal domain as well, while, by the assumption made, its order type would have to be $\alpha = \lim \alpha_\nu = \pi$. Therefore, π is a "core number", or "regular initial number", particularly, as we shall see, one of the "second kind", that is, "exorbitant" number (*Hausdorff 1914,* 131). For if $\pi = \omega_{\nu+1}$, then still

[3] Cf. *Hausdorff 1914*, chap. IV § 4.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

wäre noch $\omega_\nu < \pi$, und der Bereich enthielte eine Grundfolge g_{ω_ν} von diesem Typus sowie die zugehörige Potenzmenge $m = \mathfrak{U} g_{\omega_\nu}$ von der Kardinalzahl $\mathfrak{m} > \overline{\omega}_\nu$, also $\mathfrak{m} \geq \overline{\omega}_{\nu+1} = \overline{\pi}$ im Widerspruch mit der Definition von π.

Wäre nun die Cantorsche Vermutung erwiesen, daß die Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ immer gerade die nächst höhere Mächtigkeit habe, so würde aus $\mathfrak{m} < \overline{\pi}$ auch immer folgen $2^{\mathfrak{m}} < \pi$ und jede „exorbitante“ Zahl π wäre auch „Grenzzahl“ eines Normalbereiches[3]. Da aber tatsächlich diese Frage noch unentschieden ist, so brauchen wir zur Charakterisierung der „Grenzzahlen“ noch eine weitere Bedingung, die hier mit Hilfe einer gewissen „Normalfunktion“[4] hergeleitet werden soll.

Ist ξ eine beliebige im Normalbereich vertretene Ordnungszahl, so enthält
34 dieser außer der Grundfolge g_ξ wegen U) auch eine | Grundfolge mit dem Index $\xi^* = \varphi(\xi)$, der Anfangszahl der Zahlenklasse, die zur Kardinalzahl $2^{\overline{\xi^*}}$ gehört. Diese Funktion $\varphi(\xi)$ ist zwar noch keine Normalfunktion, da verschiedenen Argumenten ξ gleiche Funktionswerte entsprechen können. Wohl aber gelangen wir zu einer solchen durch Iteration von φ in folgender Weise, indem wir festsetzen:

$$1) \quad \psi(0) = 0\,, \quad 2) \quad \psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* = \varphi\psi(\xi)\,, \quad 3) \quad \psi(\alpha) = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi)\,,$$

wenn α eine Limeszahl ist. Hierdurch wird die Funktion ψ für beliebige Argumente ξ eindeutig bestimmt, und auch die Bedingungen einer Normalfunktion sind erfüllt. Denn aus $\alpha < \beta$ folgt immer $\alpha + 1 \leq \beta$ und daher durch transfinite Induktion

$$\psi(\alpha) < \psi(\alpha)^* = \psi(\alpha+1) \leq \psi(\beta)\,,$$

sowie aus 3), daß allgemein $\lim \psi(\alpha_\nu) = \psi(\lim \alpha_\nu)$, die Funktion also auch „stetig“ ist. Durch unsere Funktion $\psi(\xi)$ wird aber nicht nur die *ganze* Zahlenreihe ähnlich und stetig abgebildet auf einen Teil derselben, sondern auch jeder einem Normalbereich entsprechende *Abschnitt* Z_π auf einen Teil von sich selbst. Ist nämlich $\alpha < \pi$, so ist auch $\psi(\alpha) < \pi$, wie durch Induktion gezeigt werden soll. Angenommen, es sei stets $\psi(\xi) < \pi$ für alle $\xi < \alpha$, so ist auch $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* < \pi$, weil doch der Normalbereich mit jeder seiner Mengen m auch ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}m$ enthalten soll, also $\psi(\alpha) < \pi$, wenn α von erster Art. Ist aber α eine Limeszahl, so entsprechen den Elementen der Grundfolge g_α, die ja selbst Grundfolgen g_ξ von kleinerem Typus sind, eindeutig die Grundfolgen $g_{\psi(\xi)} < g_\pi$; diese letzteren sind also nach E) selbst Elemente einer Menge in P, und ihre Vereinigung $\Sigma g_{\psi(\xi)}$ ist nach 4) selbst eine Grundfolge g_ϱ des Normalbereiches. Hier ist aber $\varrho = \lim\limits_{\xi<\alpha} \psi(\xi) = \psi(\alpha)$

[3] Vergl. *R. Baer*, Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik, Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 382 f. und die Fußnote 8) auf S. 382.

[4] *Hausdorff* a. a. O. Kap. V, 3, S. 130. Bezüglich der hier verwendeten besonderen Normalfunktion **ψ(ξ)** vergl. auch *A. Tarski*, Fund. Math. T. VII, S. 1–15.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

$\omega_\nu < \pi$, and the domain would contain both a basic sequence g_{ω_ν} of this type as well as the corresponding power set $m = \mathfrak{U}g_{\omega_\nu}$ of cardinal number $\mathfrak{m} > \overline{\omega}_\nu$, and hence $\mathfrak{m} \geq \overline{\omega}_{\nu+1} = \overline{\pi}$, contrary to the definition of π.

Now, if there existed a demonstration for Cantor's conjecture that the power set $\mathfrak{U}m$ is always of exactly the next higher cardinality, then $2^{\mathfrak{m}} < \pi$ would always follow from $\mathfrak{m} < \overline{\pi}$, and every "exorbitant" number π would also be the "boundary number" of a normal domain.[4] But since this question in fact is still undecided, we need a further condition in order to characterize the "boundary numbers", which we shall provide here using a certain "normal function".[5]

If ξ is an arbitrary ordinal number represented in the normal domain, then, on account of U), the normal domain contains in addition to the basic sequence g_ξ also a basic sequence with index $\xi^* = \varphi(\xi)$, the initial number of the number class belonging to the cardinal number $2^{\overline{\xi}}$.[6] This function $\varphi(\xi)$ is not a normal function yet, since the same functional values may correspond to different arguments ξ. But we can arrive at such a normal function by iteration of φ as follows, using the definitions:

$$1) \quad \psi(0) = 0\,, \quad 2) \quad \psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* = \varphi\psi(\xi)\,, \quad 3) \quad \psi(\alpha) = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi)\,,$$

if α is a limit number. Thus, the function ψ is uniquely determined for arbitrary arguments ξ, and the conditions for normal functions are satisfied as well. For from $\alpha < \beta$ it always follows that $\alpha+1 \leq \beta$, and hence by transfinite induction

$$\psi(\alpha) < \psi(\alpha)^* = \psi(\alpha+1) \leq \psi(\beta)\,,$$

and from 3) that, in general, $\lim \psi(\alpha_\nu) = \psi(\lim \alpha_\nu)$, and hence that the function is also "continuous". But not only is the *entire* number series mapped similarly and continuously onto a part of itself by virtue of our function $\psi(\xi)$. Each *segment* Z_π corresponding to a normal domain is mapped onto a part of itself as well. For if $\alpha < \pi$, then also $\psi(\alpha) < \pi$, as we shall show by induction. Suppose that always $\psi(\xi) < \pi$ for all $\xi < \alpha$. Then $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)^* < \pi$, since the normal domain is supposed to contain the power set $\mathfrak{U}m$ of each of its sets m, hence $\psi(\alpha) < \pi$, if α is of the first kind. But if α is a limit number, then to the elements of the basic sequence g_α, which themselves are basic sequences g_ξ of smaller type, correspond uniquely the basic sequences $g_{\psi(\xi)} < g_\pi$. The latter are themselves, according to E), elements of a set in P, and their union $\Sigma g_{\psi(\xi)}$ is itself, according to 4), a basic sequence g_ϱ of the normal domain. But in this case $\varrho = \lim_{\xi<\alpha} \psi(\xi) = \psi(\alpha)$, and therefore

[4] Cf. *Baer 1929*, 382f. and footnote 8 on p. 382.

[5] *Hausdorff 1914,* chap. V, § 3, p. 114 [Zermelo erroneously writes "p. 130"]. With respect to the special normal function $\psi(\xi)$ used here, cf. also *Tarski 1925.*

[6] [Zermelo erroneously writes "$2^{\overline{\xi^*}}$" instead of "$2^{\overline{\xi}}$".]

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

und daher, wie behauptet, $\psi(\alpha) < \pi$. Wäre nun $\pi < \psi(\pi) = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$, so gäbe es bereits ein $\alpha < \pi$, für welches $\psi(\alpha) > \pi$ wäre, im Widerspruch mit dem Bewiesenen. Somit ergibt sich denn als *zweite Bedingung*:

II) Jede „Grenzzahl“ oder „Charakteristik“ eines Normalbereiches ist gleichzeitig ein „Eigenwert“ oder „kritische Zahl“ unserer oben definierten Normalfunktion $\psi(\xi)$.

Diese beiden Bedingungen, denen jede „Grenzzahl“ genügen muß, sind im Wesentlichen von einander unabhängig, sofern man | in I) ausschließlich den Kernzahl-Charakter postuliert. Daß es keine Kernzahl *erster Art* sein kann, folgt dann unmittelbar aus der zweiten Bedingung: für zwei auf einander folgende (transfinite) Anfangszahlen ω_ν und $\omega_{\nu+1}$ ist nämlich $\omega_\nu < \omega_\nu + 1 < \omega_{\nu+1}$ und daher

$$\omega_{\nu+1} \leq \omega_\nu^* \leq \psi(\omega_\nu)^* = \psi(\omega_\nu + 1) < \psi(\omega_{\nu+1}),$$

also $\omega_{\nu+1}$ gewiß kein Eigenwert der Normalfunktion. Dagegen wäre nach der Cantorschen Vermutung, für jede „exorbitante“ Zahl, jede „Kernzahl zweiter Art“ als solche schon die zweite Bedingung erfüllt[5]. Denn in diesem Falle wäre $\psi(\xi) = \omega_\xi$ für alle transfiniten ξ und mit $\xi < \pi$ auch immer $\omega_\xi < \pi$, die Normalfunktion ω_ξ hätte Eigenwerte $< \pi$, und π als Limes aller dieser Eigenwerte wäre selbst ein Eigenwert $\pi = \omega_\pi$. Muß auch diese Frage als vorläufig unentschieden gelten, so wird sich doch im Folgenden nachweisen lassen, daß die beiden für die „Grenzzahl“ aufgestellten Bedingungen auch *hinreichend* sind, daß nämlich jede beiden Bedingungen genügende Zahl π in der Tat als Charakteristik eines Normalbereiches auftreten kann.

§ 3. Die Entwickelung des Normalbereiches

Als „Normalbereich“ bezeichneten wir jeden den ZF'-Axiomen genügenden Bereich von „Mengen“ und „Urelementen“. Ein solcher Normalbereich kann auch Teilbereiche besitzen, die selbst schon in Bezug auf die zwischen ihren Elementen geltende ε-Relation den Axiomen genügen, also Normalbereiche sind. Hierüber gilt nun zunächst der folgende

Hilfssatz. *Ein Teilbereich M eines Normalbereiches P ist selbst ein Normalbereich, wenn er 1) mit jeder seiner Mengen m zugleich deren Elemente enthält, und wenn er 2) jede Menge m des Normalbereiches P enthält, deren sämtliche Elemente x in M liegen. Umfaßt M außerdem die ganze „Basis“ des Gesamtbereiches P, so ist er mit diesem identisch.*

[5] Vergl. *Baer* a. a. O. wie in [3]).

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

$\psi(\alpha) < \alpha$, just as asserted. Now, if $\pi < \psi(\pi) = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$, then there would already exist an $\alpha < \pi$, for which $\psi(\alpha) > \pi$, contrary to what has been proved. Thus we have as the *second condition*:

II) Every "boundary number", or "characteristic", of a normal domain is also an "eigenvalue", or "critical number", of the normal function $\psi(\xi)$ defined above.

These two conditions, which every "boundary number" must satisfy, are essentially independent of one another provided that only the character of a core number is postulated in I). It then follows immediately from the second condition that it cannot be a core number of the *first kind*: for, given two successive (transfinite) initial numbers ω_ν and $\omega_{\nu+1}$, we have $\omega_\nu < \omega_\nu + 1 < \omega_{\nu+1}$, and hence

$$\omega_{\nu+1} \leq \omega_\nu^* \leq \psi(\omega_\nu)^* = \psi(\omega_\nu + 1) < \psi(\omega_{\nu+1})\,.$$

Thus, $\omega_{\nu+1}$ is certainly not an eigenvalue of the normal function. According to Cantor's conjecture, on the other hand, every "exorbitant number", every "core number of the second kind", would already satisfy the second condition.[7] For, in this case, we would have $\psi(\xi) = \omega_\xi$ for all transfinite ξ, and $\omega_\xi < \pi$ whenever $\xi < \pi$. The normal function ω_ξ would have eigenvalues $< \pi$, and π itself, being the limit of all these eigenvalues, would be an eigenvalue $\pi = \omega_\pi$. Although this question must be considered undecided for the time being, it is still possible to show in what follows that the two conditions specified for "boundary numbers" are also *sufficient*; that is, that every number π satisfying both conditions can in fact occur as the characteristic of a normal domain.

§ 3. The development of the normal domain

We called a "normal domain" any domain of "sets" and "urelements" that satisfies the ZF'-axioms. Such a normal domain can also have partial domains that themselves already satisfy the axioms with respect to the ε-relation obtaining among its elements, and that therefore are normal domains. Now, these partial domains are subject to the following

Lemma. *A partial domain M of a normal domain P is itself a normal domain if* 1) *it contains, along with each of its sets m, also the elements of m, and if* 2) *it contains every set m of the normal domain P all of whose elements x are in M. If M also includes the whole "basis" of the total domain P, then M is identical to P.*

[7] Compare *Baer 1929*.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

In dem angenommen Falle sind nämlich die ZF'-Axiome, sofern sie für P gelten, auch für M erfüllt, namentlich wegen 2) auch U) und V). Das „Ersetzungsaxiom" E) muß dabei natürlich so verstanden werden, daß die Elemente x', welche die Elemente x ersetzen sollen, wieder dem Teilbereich
36 M angehören müssen. Im | besonderen Falle, wo M die ganzen Basis umfaßt, enthält der Restbereich $R = P - M$ kein einziges Urelement, und jedes seiner Elemente wäre eine Menge r, deren Elemente, da sie nach der Annahme nicht alle in M liegen, wenigstens teilweise wieder in R auftreten müssen — im Widerspruch mit dem Axiom F).

Dagegen kann sehr wohl ein Normalbereich mit kleinerer Basis $Q' \subset Q$ im größeren enthalten sein. Ein solcher entsteht aus P durch Beschränkung auf alle solchen Mengen, deren rückschreitende Elementeketten $m \square m_1 \square m_2 \square m_3 \ldots$ gemäß F) ausschließlich in Urelementen aus Q' enden.

Erstes Entwickelungstheorem. *Jeder Normalbereich P von der Charakteristik π läßt sich zerlegen in eine nach dem Typus π wohlgeordnete* □Folge□ *von nicht leeren und unter sich elementefremden „Schichten" Q_α von der Beschaffenheit, daß jede Schicht Q_α alle in keiner früheren vorkommenden Elemente von P umfaßt, deren Elemente dem zugehörigen „Abschnitte" P_α d. h. der Summe der vorangehenden Schichten angehören. Die erste Schicht Q_0 umfaßt dabei alle Urelemente.*

Die Teilbereiche *oder „Abschnitte"* P_α werden nämlich durch transfinite Induktion definirt vermöge der Festsetzungen:

1) $P_1 = Q_0 = Q$ umfasse die ganze Basis, die Gesamtheit der Urelemente.
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ soll alle in P_α „wurzelnden" Mengen von P enthalten d. h. alle diejenigen, deren Elemente in P_α liegen.
3) Ist α eine Limeszahl, so bedeute P_α die Summe oder Vereinigung aller vorangehenden P_β mit kleineren Indizes $\beta < \alpha$.

Vermöge dieser Festsetzungen ist jedes P_α und schließlich auch $P_\pi = \sum_{\alpha<\pi} P_\alpha$ eindeutig bestimmt durch die vorangehenden und genügt den Forderungen des Theorems, sofern sich nachweisen läßt, daß P_π mit P identisch ist. Dabei enthält jede Schicht $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ immer die Grundfolgen g_α vom gleichen Index, wie durch Induktion gezeigt werden kann. Denn $g_0 = u$ liegt in $Q_0 = P_1$, und gilt die Aussage für alle kleineren Indizes $\beta < \alpha$, so liegen alle Elemente von g_α, die ja selbst Grundfolgen g_β sind, in vorangehenden Schichten Q_β und damit auch in P_α, g_α selbst also jedenfalls in $P_{\alpha+1}$, aber nicht in P_α, da es sonst einer Schicht Q_β angehörte, die schon g_β, also ein Element von g_α enthält, im Widerspruch mit der Konstruktion. Also liegt auch g_α in Q_α, und diese Schicht ist nicht leer.

37 | Um nun den obigen „Hilfssatz" auf den Unterbereich P_π von P anzuwenden, betrachten wir eine Menge r des Normalbereiches, deren Elemente sämtlich in P_π, etwa r_ν in der Schicht Q_{α_ν} liegen mögen. Diese Ordnungszahlen a_ν, die nicht alle verschieden zu sein brauchen, bilden dann eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\varrho < \pi$, da ihre Mächtigkeit nicht größer als die

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

For, in the case assumed, the ZF'-axioms are satisfied also for M, provided that they hold for P; in particular, U) and V) are satisfied on account of 2). Of course, the "replacement axiom" E) is here to be understood as saying that the elements x' that are supposed to replace the elements x, must also belong to the partial domain M. As for the special case when M includes the whole basis, the remainder domain $R = P - M$ contains not a single urelement, and each of its elements would be a set r not all of whose elements are, by assumption, in M, and which, therefore, must have at least some elements occurring in R—in contradiction with axiom F).

On the other hand, it is quite possible that a normal domain with smaller base $Q' \subset Q$ is contained in the greater normal domain. Such a normal domain is obtained from P by a restriction to all those sets whose descending element chains m □m_1 □m_2 □$m_3 \ldots$ end exclusively in urelements from Q', in accordance with F).

First development theorem. *Each normal domain P of characteristic π can be decomposed into a well-ordered* □sequence□ *of type π of non-empty and disjoint "layers" Q_α, so that each layer Q_α includes all elements of P which occur in no earlier layer and whose elements belong to the corresponding "segment" P_α, that is, to the sum of the preceding layers. The first layer Q_α includes all the urelements.*

For the partial domains, *or "segments"*, P_α are defined by transfinite induction by virtue of the following stipulations:

1) $P_1 = Q_0 = Q$ shall include the whole basis, the totality of urelements.
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ shall contain all sets of P that are "rooted" in P_α, that is, all those sets whose elements lie in P_α.
3) If α is a limit number, then P_α shall be the sum or union of all preceding P_β with smaller indices $\beta < \alpha$.

It is by virtue of these stipulations that every P_α, and eventually also $P_\pi = \sum_{\alpha<\pi} P_\alpha$, is uniquely determined by the preceding ones and that it meets the demands of the theorem, provided that P_π can be shown to be identical to P. Here, each layer $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ always contains the basic sequences g_α of the same index, as can be shown by induction. For $g_0 = u$ lies in $Q_0 = P_1$, and if the same statement holds for all smaller indices $\beta < \alpha$, then all elements of g_α, being basic sequences g_β themselves, are in preceding layers Q_β, and hence also in P_α. Thus, g_α lies in $P_{\alpha+1}$, but not in P_α, since otherwise it would belong to a layer Q_β that already contains g_β and, therefore, an element of g_α, contrary to the construction. Hence g_α, too, lies in Q_α, and this layer is not empty.

Now, in order to apply the "lemma" stated above to the subdomain P_π of P, we consider a set r of the normal domain whose elements are all in P_π, say r_ν in layer Q_{α_v}. These ordinal numbers α_ν, not all of which have to be different, then form a well-ordered set of type $\varrho < \pi$, since its cardinality von r sein kann. Da aber π als „Grenzzahl“ nach I) keiner kleineren konfinal ist, so besitzen alle diese a_ν eine obere Schranke $\alpha < \pi$, und alle r_ν, die Elemente von r, sind schon in P_α enthalten, r selbst also in $P_{\alpha+1}$ und damit auch in P_π. Der Unterbereich enthält also alle in ihm „wurzelnden“ Mengen von P, sowie alle Elemente seiner Elemente und ist, da er zugleich die ganze Basis umfaßt, mit dem zu entwickelnden Normalbereich identisch, womit der Beweis unseres Satzes vollendet ist.

Bezeichnen wir als „Einheitsbereich“ einen Normalbereich mit der „Basiszahl 1“, d. h. einen solchen, der einem *einzigen* Urelement entstammt, so gilt über seine Entwickelung der folgende Satz:

Zweites Entwickelungstheorem. *Bei der Entwickelung eines Einheitsbereiches hat jeder Abschnitt P_α die Mächtigkeit von $\psi(\alpha)$, enthält aber nur Mengen von kleinerer Kardinalzahl, während die entsprechende Schicht Q_α bereits Mengen dieser Mächtigkeit enthält. Jeder Abschnitt erster Art $P_{\beta+1}$ enthält als Mengen alle Unterbereiche des unmittelbar vorangehenden P_β, jeder Abschnitt zweiter Art alle vorangehenden Abschnitte und deren Unterbereiche. Der Einheitsbereich selbst hat die Mächtigkeit seiner Charakteristik π und enthält als Mengen alle seine Unterbereiche von kleinerer Mächtigkeit.*

Der Beweis wird wieder geführt durch transfinite Induktion unter der Annahme, daß die über P_α aufgestellte Behauptung zutreffe für alle kleineren Indizes $\beta < \alpha$, was für $\beta = 1$, $P_1 = Q$, $\psi(1) = 1$ sicher der Fall ist. Es sei nun $\alpha = \beta + 1$ von erster Art und nach der Annahme habe P_β die Mächtigkeit von $\psi(\beta) < \psi(\pi) = \pi$ und enthalte nur Mengen von kleinerer Kardinalzahl als $\psi(\beta)$, nämlich alle kleineren Abschnitte und deren Untermengen. Dann enthält $P_\alpha = P_\beta + Q_\beta$ gewiß *alle* Untermengen von P_β und auch nur solche, da jede Untermenge eines kleineren auch Teil des größeren ist. Also ist $P_\alpha = P_{\beta+1}$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{p}_\alpha = 2^{\overline{\psi(\beta)}} = \overline{\psi}(\beta + 1) = \overline{\psi(\alpha)}$, enthält aber nur Mengen mit Kardinalzahlen $\leq \overline{\psi(\beta)} = \overline{\psi(\alpha)}$. Dagegen enthält die zugehö-
38 rige Schicht Q_α eine Menge von dieser | Kardinalzahl $\overline{\psi(\alpha)} < \overline{\pi}$, nämlich P_α selbst als Menge, die ja nach dem Ersetzungsaxiom in P vorhanden sein muß; aber auch keine größere, da Q_α nur aus Untermengen von P_α gebildet ist. Ist ferner α eine Limeszahl $< \pi$, also $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ die Summe aller kleineren Abschnitte P_β, die nach der Annahme die behaupteten Eigenschaften besitzen, so enthält auch P_α als Elemente nur Untermengen solcher Bereiche P_β und zwar *alle* diese Untermengen, da jede Untermenge von P_β schon im folgenden Abschnitte $P_{\beta+1}$ als Element enthalten ist. Alle diese Mengen haben dann Kardinalzahlen nicht größer als $\overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$, und die Mächtigkeit des Abschnittes P_α selbst ist gegeben durch

$$\mathfrak{p}_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \mathfrak{p}_\beta = \lim_{\beta<\alpha} \overline{\psi(\beta)} = \overline{\psi(\alpha)} \leq \overline{\pi}.$$

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

cannot be greater than that of r. But since the boundary number π, in accordance with I), is cofinal with no smaller number, all the α_ν possess an upper bound $\alpha < \pi$, and all the r_ν, the elements of r, are already contained in P_α. Hence, r itself lies in $P_{\alpha+1}$, and, therefore, also in P_π. Hence, the subdomain contains all sets of P that are "rooted" in it, as well as all elements of its elements, and it is identical to the normal domain to be developed, since it also includes the whole basis, which completes the proof of our theorem.

Let us call by "unit domain" a normal domain with "basis number 1", that is, a normal domain that issues from a *single* urelement. Its development is subject to the following theorem:

Second development theorem. *In the development of a unit domain, each segment P_α has the cardinality of $\psi(\alpha)$ but contains only sets of smaller cardinal number, whereas the corresponding layer Q_α already contains sets of this cardinality. Each segment of the first kind $P_{\beta+1}$ contains as sets all subdomains of the immediately preceding P_β, and each segment of the second kind contains all preceding segments and their subdomains. As for the unit domain itself, it has the cardinality of its characteristic π and contains as sets all its subdomains of smaller cardinality.*

In order to prove the theorem we again use transfinite induction under the assumption that the claim made about P_α is correct for all smaller indices $\beta < \alpha$, which surely is the case for $\beta = 1$, $P_1 = Q$, $\psi(1) = 1$. Now, let $\alpha = \beta + 1$ be of the first kind. According to the assumption, P_β shall have the cardinality of $\psi(\beta) < \psi(\pi) = \pi$ and shall contain only sets of smaller cardinal number than $\psi(\beta)$; namely, it shall contain all smaller segments and their subsets. Then $P_\alpha = P_\beta + Q_\beta$ surely contains *all* subsets of P_β and only such, since each subset of a smaller segment is also part of a larger one. Hence, $P_\alpha = P_{\beta+1}$ is of cardinality $\mathfrak{p}_\alpha = 2^{\overline{\psi(\beta)}} = \overline{\psi(\beta+1)} = \overline{\psi(\alpha)}$,[8] but contains only sets with cardinal numbers $\leq \overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$. On the other hand, the corresponding layer Q_α contains a set of this cardinal number $\overline{\psi(\alpha)} < \overline{\pi}$, namely P_α itself as a set which, after all, must be in P according to the replacement axiom, but none greater, since Q_α is formed only from subsets of P_α. If, furthermore, α is a limit number $< \pi$, and hence $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ the sum of all smaller segments P_β, which, by assumption, possess the stated properties, then P_α, too, contains as elements only subsets of those domains P_β, and indeed *all* such subsets, since each subset of P_β is already contained as an element in the following segment $P_{\beta+1}$. All these sets then have cardinal numbers not greater than $\overline{\psi(\beta)} < \overline{\psi(\alpha)}$, and the cardinality of the segment P_α itself is given by

$$\mathfrak{p}_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \mathfrak{p}_\beta = \lim_{\beta<\alpha} \overline{\psi(\beta)} = \overline{\psi(\alpha)} \leq \overline{\pi}\,.$$

[8] Zermelo erroneously writes "$\overline{\psi}(\beta + 1)$" instead of "$\overline{\psi(\beta + 1)}$".

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Für jedes $\alpha < \pi$ hat dann auch die Schicht Q_α die behauptete Eigenschaft, Mengen von der Kardinalzahl $\overline{\psi(\alpha)}$, aber keine größeren zu enthalten, nämlich P_α selbst und seine Untermengen. Für $\alpha = \pi$ aber ergibt sich ebenso als Mächtigkeit von P der Wert $\lim\limits_{\alpha<\pi} \overline{\psi(\alpha)} = \overline{\psi(\pi)} = \overline{\pi}$. Jedem Unterbereich von kleinerer Mächtigkeit als π entspricht dann in P eine äquivalente Grundfolge und daher nach E) auch eine Menge, die alle seine Elemente umfaßt. Für *Einheitsbereiche*, aber keineswegs für *beliebige* Normalbereiche gilt also das *v. Neumannsche* „Axiom", wonach *nur* solche Teilbereiche „zu groß" wären, um als „Mengen" auftreten zu können, welche von der gleichen Mächtigkeit sind wie der Gesamtbereich[6]. Durch die Beschränkung auf „Einheitsbereiche" würde aber die Mengenlehre ihre Anwendungsmöglichkeit zum größten Teile verlieren.

Aufgrund der gewonnenen Erkenntnis können wir jetzt die Entwickelung eines *beliebigen* Normalbereiches so abändern, daß in jede „Schicht" Q_α *nur* solche Mengen aus P aufgenommen werden, deren Kardinalzahl nicht größer ist als im Falle des Einheitsbereiches, nämlich $\leq \overline{\psi(\alpha)}$. Schließlich kommen sie doch alle an die Reihe, da für $\alpha < \pi$ auch immer $\psi(\alpha) < \psi(\pi) = \pi$ ist und wegen $\pi = \lim\limits_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$ jede Zahl $\varrho < \pi$ von einem Funktionswert $\psi(\alpha)$
39 über- | troffen wird. Die so entstehende „*kanonische*" Entwickelung hat nun den Vorzug, daß die Absonderung jeder einzelnen Schicht Q_α, unabhängig vom Gesamtbereiche und dessen Charakteristik, allein bestimmt wird durch ihren Index und durch die „Basis" des Normalbereiches, daß also bei gegebener Basis die Entwickelungen für die verschiedenen Grenzzahlen im Anfang immer übereinstimmen.

Drittes Entwickelungstheorem (Satz der „kanonischen" Entwickelung). *Jeder Normalbereich mit der Basis Q läßt sich zerlegen in eine mit Q beginnende wohlgeordnete Folge getrennter „Schichten" Q_α, wobei wieder jeder Schicht die Summe der vorangehenden als „Abschnitt" entspricht und jedes Q_α alle diejenigen Unterbereiche des zugehörigen Abschnittes P_α als Mengen enthält, die noch nicht im Abschnitte selbst liegen und keine größere Mächtigkeit haben als $\psi(\alpha)$. Diese letzte Einschränkung fällt weg im Falle des „Einheitsbereiches", wo „freie" und „kanonische" Entwickelung übereinstimmen. Bei der „kanonischen" Entwickelung ist jeder solche Abschnitt P_τ selbst ein Normalbereich, dessen Index τ den Bedingungen I, II einer „Grenzzahl" genügt.*

Der Beweis ist analog dem des ersten Entwickelungssatzes. Wie dort werden zunächst die Abschnitte P_α und Schichten Q_α induktiv definiert durch die Festsetzungen:

[6] *J. v. Neumann*, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschr. Bd. 26 S. 669–752. 1928. Hier handelt es sich um das Axiom IV. 2, das a. a. O. insbesondere auf S. 677 f. erörtert wird.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

For every $\alpha < \pi$, the layer Q_α has the stated property of containing sets of cardinal number $\overline{\psi(\alpha)}$ but none larger than that, namely P_α itself and its subsets. For $\alpha = \pi$, however, we likewise obtain as the cardinality of P the value $\lim\limits_{\alpha<\pi} \overline{\psi(\alpha)} = \overline{\psi(\pi)} = \overline{\pi}$. To each subdomain of smaller cardinality than π there corresponds then in P an equivalent basic sequence, and hence, by E), also a set that includes all its elements. *Unit domains*, but not by any means *arbitrary* normal domains, are then subject to *v. Neumann's* "axiom" according to which the *only* partial domains "too large" to occur as "sets" are those of the cardinality of the total domain.[9] Set theory, however, would lose most of its applicability if it were restricted to "unit domains".

The knowledge we have gained enables us now to so modify the development of an *arbitrary* normal domain that *only* those sets enter from P into each "layer" Q_α whose cardinal number is not greater than would be the case with the unit domain, namely $\leq \overline{\psi(\alpha)}$. But eventually every set from P has its turn, since for $\alpha < \pi$ we always have $\psi(\alpha) < \psi(\pi) = \pi$ and since, because $\pi = \lim_{\alpha<\pi} \psi(\alpha)$, each number $\varrho < \pi$ is overtaken by a function value $\psi(\alpha)$. Thus arises a "*canonical*" development whose advantage is that the separation of each individual layer Q_α is determined only by its index and by the "basis" of the normal domain independently of the total domain and its characteristic; and hence that, for a given basis, the developments for the different boundary numbers are always in agreement in the beginning.

Third development theorem (Theorem of the "canonical" development). *Every normal domain with basis Q can be decomposed into a well-ordered sequence of separated "layers" Q_α that begins with Q, where again the sum of the preceding layers corresponds to each layer as a "segment", and where each Q_α contains as sets all those subdomains of the corresponding segment P_α that do not yet lie in the segment itself and that are not of greater cardinality than $\psi(\alpha)$. This last restriction drops out in the case of the "unit domain", where "free" and "canonical" development are in agreement. For the "canonical" development, each such segment P_τ is itself a normal domain whose index τ satisfies conditions I and II of a "boundary number".*

The proof is analogous to the proof of the first development theorem. Once again, we first define the segments P_α and layers Q_α inductively, using the stipulations:

[9] *Von Neumann 1928d*. The axiom in question is axiom IV.2, discussed, in particular, in op. cit. pp. 677f.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

1) $P_1 = Q_0 = Q$.
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ umfasse alle Mengen des Normalbereiches P, deren Elemente in P_α liegen und deren Kardinalzahlen $\le \overline{\psi(\alpha)}$ sind.
3) Für jede Limeszahl α sei immer $P_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} P_\beta$ die Summe aller kleineren P_β.

Dann sind alle Abschnitte P_α und die entsprechenden Schichten $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ eindeutig bestimmt für alle Indizes $\alpha \le \pi$, und P_π ist ein wohlbestimmter Unterbereich von P, der wieder mit P identisch ist nach dem „Hilfssatze", weil er die ganze Basis, die Elemente seiner Elemente sowie alle in ihm „wurzelnden" Mengen von P enthält. Die letzte Bedingung ist auch hier erfüllt, da jede in P_α wurzelnde Menge r von der Kardinalzahl $\overline{\varrho} < \overline{\pi}$ spätestens in der Schicht Q_ϱ erscheint wegen $\varrho \le \psi(\varrho)$.

Nun sei $\tau \le \pi$ eine Zahl von Grenzzahl-Charakter und P_τ der ihr entsprechende Abschnitt der kanonischen Entwickelung von P. Dann enthält er nach
40 der Konstruktion lediglich Mengen mit Kar- | dinalzahlen $\overline{\varrho} \le \overline{\psi(\alpha)} < \overline{\psi(\tau)} = \overline{\tau}$, da jede doch einer Schicht Q_α für $\alpha < \tau$ angehören muß. Umgekehrt muß auch jede in P_τ wurzelnde Menge r mit einer Kardinalzahl $< \overline{\tau}$, weil τ eine „Kernzahl" ist, bereits in einem kleineren Abschnitte P_α wurzeln und einem höheren P_γ angehören, wo γ nicht größer zu sein braucht als der Ordnungstypus ϱ von r, da ja $\varrho \le \psi(\varrho)$ ist. Also enthält P_τ alle in ihm wurzelnden Mengen aus P, deren Kardinalzahlen kleiner sind als $\overline{\tau}$, insbesondere auch alle durch „Ersetzung" innerhalb P_τ gebildeten Mengen. Ist r eine beliebige Menge in P_τ und wohlgeordnet nach $\varrho < \tau$ so ist auch $\psi(\varrho) < \psi(\tau) = \tau$ sowie $2^{\overline{\varrho}} \le 2^{\overline{\psi(\varrho)}} = \overline{\psi}(\varrho{+}1) < \overline{\tau}$ und mit r ist auch $\mathfrak{U}r$ Element von P_τ. Ist endlich r_ν eine nach dem Typus $\sigma < \tau$ wohlgeordnete Folge von Kardinalzahlen $< \overline{\tau}$, so haben sie eine obere Schranke $\overline{\mathfrak{r}}' < \overline{\tau}$, weil sonst τ konfinal σ wäre und keine Kernzahl, und es ist auch $\sum_\nu \mathfrak{r}_\nu \le \overline{\sigma}\mathfrak{r}' < \overline{\tau}$, d. h. auch das Axiom V) ist erfüllt im Abschnitte P_τ und dieser ist in der Tat ein Normalbereich. Damit ist zugleich erwiesen, daß die beiden für die Charakteristik eines Normalbereiches im § 2 aufgestellten Bedingungen I und II zugleich auch *hinreichend* sind, daß nämlich jede diesen Bedingungen genügende Ordnungszahl τ als „Grenzzahl" eines Normalbereiches auftreten kann. Vorausgesetzt wird dabei allerdings, daß diese Zahl τ überhaupt einem Bereiche angehört, für den die ZF'-Axiome erfüllt sind.

§ 4. Isomorphie und Automorphie der Normalbereiche

Zwei Normalbereiche P, P' heißen „isomorph", wenn sich die Elemente des einen ein-eindeutig abbilden lassen auf die Elemente x' des anderen, sodaß jede Grundrelation $a \in b$ in dem einen die entsprechende $a' \in b'$ in dem anderen nach sich zieht und umgekehrt. In isomorphen Bereichen entspricht also jedem Urelement u wieder ein Urelement u', jeder Menge m eine äquivalen-

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

1) $P_1 = Q_0 = Q$.
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ shall include all those sets of the normal domain P whose elements lie in P_α and whose cardinal numbers are $\leq \overline{\psi(\alpha)}$.
3) For every limit number α, let $P_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} P_\beta$ the sum of all smaller P_β.

All segments P_α and the corresponding layers $Q_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha$ are then uniquely determined for all indices $\alpha \leq \pi$, and P_π is a well-determined subdomain of P, which, by the "lemma", is in turn identical to P, since it contains the whole basis, the elements of its elements, as well as all sets of P "rooted" in it. The last condition is also satisfied here since each set r of cardinal number $\overline{\varrho} < \overline{\pi}$ rooted in P_α appears in layer Q_ϱ at the latest, on account of $\varrho \leq \psi(\varrho)$.

Now let $\tau \leq \pi$ be a number of the character of a boundary number and let P_τ be the segment of the canonical development of P corresponding to it. According to the construction, it then contains only sets of cardinal numbers $\overline{\varrho} \leq \overline{\psi(\alpha)} < \overline{\psi(\tau)} = \overline{\tau}$, since, after all, each set must belong to some layer Q_α for $\alpha < \tau$. Conversely, every set r with a cardinal number $< \overline{\tau}$ rooted in P_τ must already be rooted in some smaller segment P_α since τ is a "core number", and it must belong to a higher P_γ, where γ does not need to be greater than the order type ϱ of r, since $\varrho \leq \psi(\varrho)$. Hence, P_τ contains all sets from P rooted in it and whose cardinal numbers are smaller than $\overline{\tau}$, particularly all those formed by means of "replacement" within P_τ. If r is an arbitrary set in P_τ well-ordered in type $\varrho < \tau$, then we have $\psi(\varrho) < \psi(\tau) = \tau$ as well as $2^{\overline{\varrho}} \leq 2^{\overline{\psi(\varrho)}} = \overline{\psi}(\varrho+1) < \overline{\tau}$, and, along with r, $\mathfrak{U}r$ is also an element of P_τ. If, finally, r_ν is a well-ordered sequence of cardinal numbers $< \overline{\tau}$ of type $\sigma < \tau$, then they have an upper bound $\overline{\mathfrak{r}}' < \overline{\tau}$, since otherwise τ would be cofinal with σ and it would not be a core number. And we also have $\sum\limits_\nu \mathfrak{r}_\nu \leq \overline{\sigma}\mathfrak{r}' < \overline{\tau}$; that is, axiom V), too, is satisfied in the segment P_τ, which is indeed a normal domain. Thus it is has also been demonstrated that the two conditions I and II stated for the characteristic of a normal domain in § 2 are also *sufficient* conditions, that is, that every ordinal number τ satisfying these conditions can occur as "boundary number" of a normal domain. What we assume here, however, is that this number τ belongs to some domain for which the ZF'-axioms are satisfied.

§ 4. Isomorphisms and automorphisms of the normal domains

Two normal domains P, P' are said to be "isomorphic" if the elements of the one can be mapped one-to-one onto the elements x' of the other such that each basic relation $a \epsilon b$ in the one gives rise to the corresponding basic relation $a' \epsilon b'$ in the other, and vice versa. Hence, in isomorphic domains there corresponds to each urelement u an urelement u', to each set m an equivalent

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

te Menge m', jeder Grundfolge g_α eine Grundfolge g'_α vom gleichen Index, der „Basis“ Q eine äquivalente Basis Q' und die „Grenzzahl“ oder „Charakteristik“ π sich selbst. Daß aber diese beiden letzten Bedingungen für die Isomorphie auch *hinreichend* sind, besagt das folgende Theorem.

Erster Isomorphiesatz. *Zwei Normalbereiche mit gleicher Charakteristik und äquivalenten Basen sind isomorph, und zwar ist die isomorphe Abbildung der bei den Bereiche auf einander* eindeutig *bestimmt durch die Abbildung ihrer Basen.*

41 | Zum Beweise bedienen wir uns der „Entwickelungssätze“, wobei wir beliebig die „freie“ oder die „kanonische Entwickelung“ zugrunde legen können. Wir denken uns also die Basen Q und Q' der beiden Normalbereiche eineindeutig auf einander abgebildet, so daß jedem Urelement u ein bestimmtes u' entspricht, und zeigen durch Induktion, daß auch jedem *Abschnitte* P_α der Entwickelung von P ein isomorpher Abschnitt P'_α in der Entwickelung des anderen zugeordnet werden kann, und zwar *eindeutig* für alle $\alpha \leq \pi$. Zwei Abschnitte P'_α, P'_β mit verschiedenen Indizes können schon deshalb nicht isomorph sein, weil der größere immer Grundfolgen enthält, denen im kleineren keine ähnlichen entsprechen. Nun nehmen wir an, es sei P_α isomorph abgebildet auf P'_α, was für $P_1 = Q$, $P'_1 = Q'$ vorausgesetzt ist. Dann werden gleichzeitig alle kleineren Abschnitte mit abgebildet auf solche von P', und bei allen diesen Abbildungen wird ein bestimmtes Element x immer auf *dasselbe* Element x' von P' abgebildet. Ist nun r irgend eine Menge aus Q_α, so liegen ihre Elemente r_ν alle in P_α, und die ihnen entsprechenden Elemente r'_ν in P'_α sind nach E) wieder die Elemente einer äquivalenten Menge r', da wegen $\pi = \pi'$ der Normalbereich P' Mengen dieser Mächtigkeit sicher enthält. Diese Menge r' muß auch im Falle der „kanonischen Entwickelung“ in $P_{\alpha+1}$ vorkommen, aber nicht schon in P'_α, da sonst wegen der Isomorphie auch die entsprechende Menge r schon in P_α läge und nicht in Q_α. Also entspricht jedem Element r von Q_α eindeutig ein solches r' von Q'_α und umgekehrt, und auch der Abschnitt $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$ ist eindeutig-isomorph abgebildet auf den Abschnitt $P'_{\alpha+1}$ des anderen Normalbereiches. Jetzt sei α eine Limeszahl, und es werde angenommen, daß für jedes kleinere $\beta < \alpha$ der Abschnitt P_β eindeutig-isomorph sei dem Abschnitte P'_β. Da hier jedes Element x von P_α sicher einem P_β angehört, so entspricht ihm bei allen diesen Abbildungen P_β, P'_β immer ein ganz bestimmtes Element x' von P'_α, und jedesmal, wo $a \in b$ ist, ist auch $a' \in b'$, da es stets einen Abschnitt P_β gibt, der beide Elemente enthält. Somit ist auch P_α eindeutig-isomorph P'_α für beliebige Limeszahlen $\alpha \leq \pi$, und wegen $P_\pi = P$, $P'_\pi = P'$ sind wie behauptet, die beiden Normalbereiche selbst eindeutig-isomorph.

Zweiter Isomorphiesatz. *Von zwei Normalbereichen mit äquivalenten Basen und verschiedenen Grenzzahlen π, π' ist stets der eine isomorph einem kanonischen Abschnitte des anderen.*

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

set m', to each basic sequence g_α a basic sequence g'_α with the same index, to the "basis" Q an equivalent basis Q', and to the "boundary number", or "characteristic", π there corresponds π itself. But that these last two conditions for the isomorphism are also *sufficient* is stated by the following theorem.

First isomorphism theorem. *Two normal domains with the same characteristic and with equivalent bases are isomorphic. In fact, the isomorphic mapping of the two domains onto one another is* uniquely *determined by the mapping of their bases.*

In order to prove this theorem we use the "development theorems", choosing as a starting point either the "free" or the "canonical development". We thus imagine the bases Q and Q' of the two normal domains mapped one-to-one onto one another such that there corresponds to each urelement u a particular u', and we show by induction that it is possible to associate with each *segment* P_α of the development of P an isomorphic segment P'_α in the development of the other, and that, in fact, it is possible to associate them *uniquely* for all $\alpha \leq \pi$. Two segments P'_α, P'_β with different indices cannot very well be isomorphic because the greater segment always contains basic sequences to which no similar basic sequences correspond in the smaller segment. Now let us assume that P_α is mapped isomorphically onto P'_α. This is presupposed for $P_1 = Q$, $P'_1 = Q'$. Then, at the same time, all smaller segments are also mapped onto such segments of P', and a given element x is always mapped onto the *same* element x' of P' under all these mappings. If now r is some set from Q_α, then all its elements r_ν are in P_α. According to E), the elements r'_ν in P'_α corresponding to the r_ν are, in turn, elements of an equivalent set r' since the normal domain P' certainly contains sets of this cardinality because $\pi = \pi'$. This set r' must also appear in $P'_{\alpha+1}$[10] in the case of the "canonical development", but not already in P'_α, since otherwise the corresponding set r would already lie in P_α, on account of the isomorphism, and not in Q_α. Thus to each element r in Q_α there corresponds uniquely such an r' in Q'_α, and vice versa, and the segment $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$, too, is uniquely-isomorphically mapped onto the segment $P'_{\alpha+1}$ of the other normal domain. Now let α be a limit number and let us assume that for each smaller $\beta < \alpha$ the segment P_β is uniquely-isomorphic to the segment P'_β. Since each element x in P_α certainly belongs to some P_β, there always corresponds to it under all these mappings P_β, P'_β a particular element x' in P'_α and whenever we have $a \,\epsilon\, b$, we also have $a' \,\epsilon\, b'$, since there always is a segment P_β containing both elements. Thus P_α, too, is uniquely-isomorphic to P'_α for arbitrary limit numbers $\alpha \leq \pi$, and, because $P_\pi = P$, $P'_\pi = P'$, the two normal domains themselves are uniquely-isomorphic, as was claimed.

Second isomorphism theorem. *Given two normal domains with equivalent bases and different boundary numbers π, π', one is always isomorphic to a canonical segment of the other.*

[10] Zermelo erroneously writes "$\mathsf{P}_{\alpha+1}$" instead of "$\mathsf{P}'_{\alpha+1}$".

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

42 | Ist nämlich $Q \sim Q'$ und $\pi' > \pi$, so ist nach dem „dritten Entwickelungstheorem" S. 39, der „kanonische Abschnitt" P'_π, da π eine Grenzzahl ist, ein Normalbereich, der mit P die gleiche Charakteristik und eine äquivalente Basis hat, also nach dem vorigen Satze mit P isomorph.

Dritter Isomorphiesatz. *Von zwei Normalbereichen mit gleicher Charakteristik ist immer einer isomorph einem (echten oder unechten) Unterbereich des anderen.*

Es sei P ein Normalbereich und $Q' \subset Q$ ein Teil seiner Basis. Dann betrachten wir die Gesamtheit aller solchen Elemente von P, bei denen jede rückschreitende Kette von Elementen $m \square m_1 \square m_2 \square m_3 \ldots$ entsprechend dem Axiom F) mit einem Urelement in Q' endet, so erfüllt dieser Teilbereich P' von P alle Bedingungen unseres „Hilfssatzes" im § 3. Er ist also selbst ein Normalbereich mit der gleichen Charakteristik π, weil er alle aus Q' entspringenden Grundfolgen von P enthält, und ist isomorph jedem Normalbereiche P'' von gleicher Charakteristik π, dessen Basis Q'' mit Q' äquivalent ist. Aus der vorausgesetzten Vergleichbarkeit beliebiger Mengen Q, Q'' folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Die „Struktur" eines Normalbereiches, d. h. das, was er mit allen isomorphen gemeinsam hat, oder sein „Modell-Typus" wird nach dem hier Bewiesenen bestimmt durch *zwei* Zahlen, durch die Mächtigkeit seiner Basis $\mathfrak{q}$ und durch seine Charakteristik π, von denen die erste, die „Breite" des Normalbereiches *beliebig* gewählt werden kann, während die andere, seine „Höhe" die im § 2 angegebenen Eigenschaften einer „Grenzzahl" besitzen muß. Diese „Modelltypen" bilden also eine *zweifach wohlgeordnete Mannigfaltigkeit* von der Beschaffenheit, daß ein Modelltypus immer dann einem Bestandteile eines anderen isomorph ist, $\mu \leq \mu'$, wenn gleichzeitig $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}'$ und $\pi \leq \pi'$ d. h. wenn *beide* bestimmenden Zahlen des einen kleiner oder gleich denen des anderen sind.

Da die isomorphe Abbildung zweier Normalbereiche auf einander, wo sie existiert, nach dem „ersten Isomorphiesatze" *eindeutig* bestimmt ist durch die Abbildung ihrer Basen, so folgt, daß eine isomorphe Abbildung eines Normalbereiches auf sich *selbst*, also ein „Automorphismus" nur möglich ist durch „Permutation" seiner Basis, für „Einheitsbereiche", die nur ein einziges
43 Urelement | enthalten, daher *unmöglich* ist. Ebenso entsteht eine isomorphe Abbildung eines Normalbereiches P auf einen *Teil* P' von sich aus jeder äquivalenten Abbildung der Basis Q auf einen ihrer Teile Q', wenn die Basis selbst *unendlich* ist. Es entspricht nämlich, wie wir beim Beweise des letzten Satzes sahen, jeder Teilbasis auch ein normaler Teilbereich P' von gleicher Charakteristik π, insbesondere auch jedem einzelnen Urelement u ein zugehöriger „Einheitsbereich", und äquivalenten Teilbasen entsprechen isomorphe Teilbereiche, die man in Analogie mit der Körpertheorie als „konjugierte" bezeichnen kann. Somit ergibt sich der folgende

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

For if $Q \sim Q'$ and $\pi' > \pi$, then, according to the "third development theorem" on p. 39, the "canonical segment" P'_π is a normal domain that shares the same characteristic and an equivalent basis with P since π is a boundary number. P'_π is therefore, according to the previous theorem, isomorphic to P.

Third isomorphism theorem. *Given two normal domains with the same characteristic, one always is isomorphic to a (proper or improper) subdomain of the other.*

Let P be a normal domain and let $Q' \subset Q$ be a part of its basis. We now consider the totality of all elements of P for which each descending chain of elements $m \square m_1 \square m_3 \square \ldots$ ends in an urelement in Q' in accordance with axiom F). This partial domain P' of P then satisfies all the conditions of our "lemma" in § 3. Thus P' is itself a normal domain with the same characteristic π since it contains all basic sequences of P arising from Q', and it is isomorphic to every normal domain P'' with the same characteristic π whose basis Q'' is equivalent to Q'. The claim follows then immediately from the comparability of arbitrary sets Q, Q'', which we assumed.

According to what has been proved here, the "structure" of a normal domain, that is, what it has in common with all isomorphic normal domains, or its "model type", is determined by *two* numbers: the cardinality of its basis $\mathfrak{q}$ and its characteristic π. The first number, the "breadth" of the normal domain, can be chosen *arbitrarily*, whereas the second number, its "height", must possess the properties of a "boundary number" stated in § 2. These "model types" thus form a *doubly well-ordered manifold* such that one model type is isomorphic to a component of another, $\mu \leq \mu'$, whenever both $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}'$ and $\pi \leq \pi'$, that is, whenever *both* determining numbers of the one are smaller than or equal to those of the other.

Since, according to the "first isomorphism theorem", the isomorphic mapping of two normal domains onto one another is, where it exists, *uniquely* determined by the mapping of its bases, it follows that an isomorphic mapping of a normal domain onto *itself*, that is, an "automorphism", is possible only by "permutation" of its basis, and, hence, *impossible* for "unit domains", which contain only one single urelement. Likewise, we obtain an isomorphic mapping of a normal domain P onto a *part* P' of itself from each equivalent mapping of the basis Q onto one of its parts Q', provided that the basis itself is *infinite*. For, as we have seen in the proof of the last theorem, there corresponds to each partial basis also a normal partial domain P' with the same characteristic π, and, in particular, to each individual urelement u also the associated "unit domain", and to equivalent partial bases correspond isomorphic partial domains, which may be called "conjugated" in analogy with field theory. Thus we obtain the following

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Automorphiesatz. *Automorphismen d. h. isomorphe Abbildungen eines Normalbereiches auf sich selbst entsprechen eineindeutig den äquivalenten Abbildungen der Basis auf sich selbst und sind daher nur möglich bei einer Basiszahl* $\mathfrak{q} > 1$*; alle Einheitsbereiche sind „monomorph". Die Gruppe aller Automorphismen ist isomorph der zur Basis gehörenden Permutationsgruppe. Auch „Meromorphismen" d. h. isomorphe Abbildungen des Normalbereiches auf einen Teil von sich entsprechen den eineindeutigen Abbildungen der (unendlichen) Basis auf äquivalente Teile.*

§ 5. Existenzfragen, Widerspruchslosigkeit und Kategorizität

Unsere bisherigen Betrachtungen setzen die Existenz von „Normalbereichen" verschiedener Beschaffenheit voraus und gründen sich jedenfalls auf die Annahme von der Widerspruchlosigkeit der mengentheoretischen Axiome. Diese Widerspruchslosigkeit logisch-formal zu *beweisen*, soll auch hier nicht versucht werden. Dagegen soll unter der allgemeinen *Voraussetzung* dieser Widerspruchsfreiheit für die Mengenlehre überhaupt die (mathematische d. h. ideelle) *Existenz* der verschiedenen hier in Betracht kommenden Modelltypen geprüft werden. Wir setzen also die Existenz von Mengenbereichen, die den ZF-Axiomen genügen, für eine beliebige Basis voraus. Dann gibt es jedenfalls auch solche, die außerdem noch das „Fundierungsaxiom" F) erfüllen. Denn ist etwa M ein Mengenbereich von der vorausgesetzten Beschaffenheit, so bilden alle Elemente dieses Bereiches, die außerdem noch F) erfüllen, darunter natürlich auch alle Urelemente, einen wohldefinierten Unterbereich
44 | N von M, der für sich schon allen ZF'-Axiomen genügt und damit einen „Normalbereich" mit der gegebenen Basis Q darstellt.

Daß durch Verkleinerung der *Basis* wieder Normalbereiche als Teilbereiche des ersten entstehen, haben wir bereits im vorigen § 4 beim Beweise des „dritten Isomorphiesatzes" gezeigt. Dagegen ist noch nicht ohne weiteres klar, ob auch durch Verkleinerung oder Vergrößerung der *Charakteristik* neue Typen von Normalbereichen gewonnen werden können. Denn jede „Grenzzahl" muß ja den Bedingungen I) und II) des § 2 genügen und es steht noch in Frage, ob es überhaupt solche Zahlen von „Grenzzahl-Charakter" und wieviele solche es gibt. Nun ist aber ω, die Anfangszahl der zweiten Zahlenklasse, gewiß eine solche Zahl: ein „Eigenwert" der Funktion $\psi(\xi)$ und keiner kleineren konfinal. Und ω ist in der Tat auch die Charakteristik des niedersten Normalbereiches, der folgendermaßen entsteht: Wir lassen aus dem gegebenen Normalbereiche M alle diejenigen Mengen weg, für welche irgend eine gemäß F) gebildete „rückschreitende Elementenkette" der Form $m \square m_1 \square m_2 \square m_3 \dots$ eine „unendliche" Menge enthält. Dieser Bereich, der selbst nur noch *endliche* Mengen enthält, erfüllt alle Bedingungen eines Normalbereiches und ist zugleich der dem Index ω entsprechende Abschnitt P_ω der „kanonischen Entwickelung" des ursprünglichen Normalbereichs. Dieser „finitistische" Bereich, gegen den

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Automorphism theorem. *Automorphisms, that is, isomorphic mappings of a normal domain onto itself, correspond one-to-one to the equivalent mappings of the basis onto itself, and are therefore possible only for basis number* $\mathfrak{q} > 1$*; all unit domains are "monomorphic". The group of all automorphisms is isomorphic to the group of permutations that belongs to the basis. Likewise, "meromorphisms", that is, isomorphic mappings of the normal domain onto a part of itself, correspond to the one-to-one mappings of the (infinite) basis onto equivalent parts.*

§ 5. Existence questions, consistency and categoricity

So far, our considerations have assumed the existence of different "normal domains" and have always been based on the assumption of the consistency of the set-theoretic axioms. We shall not attempt here to provide a logical formal *proof* of such consistency. Rather, making the general assumption of the consistency of set theory, we shall examine the (mathematical, that is, ideal) existence of the different model types relevant here. We therefore assume for an arbitrary basis the existence of domains of sets that satisfy the ZF-axioms. There then certainly also exist domains of sets that, in addition, satisfy the "foundation axiom" F). For if M is a domain of sets of the assumed constitution, then all those elements of this domain that also satisfy F), among them of course all urelements, form a well-defined subdomain N of M that already satisfies all ZF'-axioms and that therefore is a "normal domain" with the given basis Q.

Reducing the *basis* of a normal domain yields a normal domain which is a partial domain of the first, as was already shown in the proof of the "third isomorphism theorem" in § 4 above. By contrast, it is not clear yet, at least not without further ado, whether it is possible to obtain new types of normal domains by decreasing or increasing the *characteristic*. For after all, every "boundary number" must satisfy conditions I) and II) of § 2, and the question still remains to be answered whether such numbers of the "character of a boundary number" exist at all and if so, how many. Now ω, the initial number of the second number-class, certainly is such a number: it is an "eigenvalue" of the function $\psi(\xi)$ and cofinal with no smaller number. In fact, ω is also the characteristic of the lowest normal domain that arises as follows: we remove from a given normal domain M all those sets for which some "descending chain of elements", $m \ni m_1 \ni m_2 \ni m_3 \ni \ldots$, formed in accordance with F), contains an "infinite" set. This domain, which contains only *finite* sets, satisfies all conditions of a normal domain and is, at the same time, that segment P_ω of the "canonical development" of the original normal domain that corresponds to the index ω. This "finitistic" domain, against which even the "intuitionists"

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

trotz seiner eigenen Unendlichkeit selbst die „Intuitionisten" kaum etwas einzuwenden hätten, kann wenigstens dazu dienen, durch seine bloße Existenz die Widerspruchslosigkeit der ZF'-Axiome zu erweisen. Dagegen kann er, eben weil er keine unendlichen Mengen enthält, *nicht* als wahres „Modell" der Cantorschen Mengenlehre in Anspruch genommen werden. Aus ihm heraus führt erst mein früheres „Axiom des Unendlichen", das die Existenz wenigstens einer „unendlichen" Menge postuliert. Der *niederste* Normalbereich, der dieser Bedingung genügt und den ich als den „Cantorschen" bezeichnen möchte, hätte dann die Charakteristik π_1, nämlich den kleinsten Eigenwert der ψ-Funktion von Kernzahl-Charakter, also jedenfalls eine „reguläre Anfangszahl zweiter Art", wenn auch nicht notwendig die *kleinste* „exorbitante" Zahl überhaupt — wenigstens solange die Cantorsche Vermutung nicht bewiesen ist.

Aber gibt es überhaupt hinter ω solche Zahlen mit „Grenzzahl-Charak-
45 ter"? Gewiß, sofern es überhaupt eine „infinitistische" Men-| genlehre d. h. überhaupt Normalbereiche mit unendlichen Mengen gibt. Denn die *Gesamtheit* aller in einem solchen Bereiche vorkommenden „Grundfolgen" *hat* eben einen solchen Ordnungstypus π, wenn auch *innerhalb* des Bereiches keine Menge von diesem Typus π vorkommen kann. Und gibt es überhaupt „Grenzzahlen" $\pi > \omega$, so gibt es unter ihnen auch eine *kleinste* π_1. Freilich „beweisen" d. h. aus den allgemeinen ZF'-Axiomen ableiten läßt sich weder ihre Existenz noch ihre Nicht-Existenz, eben weil z. B. die Grenzzahl ω zwar im „Cantorschen" Bereich existiert, aber nicht im „finitistischen", weil m. a. W. die Frage in den verschiedenen „Modellen" der Mengenlehre *verschieden* beantwortet wird, also durch die Axiome allein noch nicht entschieden ist. Unser Axiomensystem ist eben *nicht-kategorisch*, was in diesem Falle kein Nachteil, sondern ein *Vorzug* ist. Denn gerade auf dieser Tatsache beruht die ungeheure Bedeutung und unbegrenzte Anwendbarkeit der Mengenlehre überhaupt. Natürlich kann man immer durch Hinzufügung weiterer „Axiome" die gewünschte Kategorizität künstlich *erzwingen*, aber immer nur auf Kosten der Allgemeinheit. Solche neuen Postulate, wie sie z. B. von *Fraenkel*[7], *Finsler*[8], *Neumann*[9], u. a. vorgeschlagen wurden, betreffen eben gar nicht die Mengenlehre *an sich*, sondern charakterisieren lediglich ein ganz spezielles vom jeweiligen Autor gewähltes *Modell*. In der Regel sind es „Einheitsbereiche", die bevorzugt werden — wodurch eigentlich, wie schon S. 38 bemerkt, die *Anwendbarkeit* der Mengenlehre preisgegeben würde. Außerdem pflegt man sich gewöhnlich auf den *niedersten* infinitistischen Bereich, den „Cantorschen" zu beschränken, worin ich ebenso wenig einen Vorteil erblicken kann. Vielmehr

[7] *Fraenkel*, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. § 18. 5. S. 355. „Axiom der Beschränktheit".

[8] *Finsler*, Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 25, S. 683–713.
Hierüber vergl. auch *R. Baer*, Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. Math. Zeitschr. Bd. 27, S. 536–539, 1928.

[9] *J. v. Neumann* wie oben [6]).

would hardly raise any objections, its infiniteness notwithstanding, may at least serve to demonstrate the consistency of the ZF'-axioms by dint of its mere existence. On the other hand, just because it does not contain infinite sets, it can *not* be claimed to be a true "model" of Cantorian set theory. It is only my previous "axiom of infinity", which postulates the existence of at least one "infinite" set, that leads us beyond this domain. The *lowest* normal domain satisfying this condition, which I shall call the "Cantorian" normal domain, would then have the characteristic π_1, namely the smallest eigenvalue of the ψ-function with the character of a core number, and thus certainly a "regular initial number of the second kind", even if not necessarily the *smallest* "exorbitant" number—at least as long as Cantor's conjecture has not been proved.

But are there any such numbers after ω that have the character of "boundary numbers"? The answer is certainly yes, provided that there is an "infinitistic" set theory at all, that is, provided that there are normal domains with infinite sets. For the *totality* of all "basic sequences" occurring in such domains simply *has* such an order type π, even though no set of this order type π can occur *within* the domain. And if there are any "boundary numbers" $\pi > \omega$ at all, then among them there is also a *smallest* one, π_1. It is of course not possible to "prove", that is, to deduce from the general ZF'-axioms, either its existence or its non-existence, simply because, for instance, the boundary number ω, even though it exists in the "Cantorian" domain, does not exist in the "finitistic" domain; because, in other words, the question receives *different* answers in different "models" of set theory, and is thus not decided merely by the axioms alone. Our axiom system is *non-categorical* after all, which, in this case, is not a disadvantage, but an *advantage*. For the enormous significance and unlimited applicability of set theory rests precisely on this fact. It is of course always possible to artificially *force* the desired categoricity by adding further "axioms", but only at the expense of generality. For new postulates such as those proposed by *Fraenkel*,[11] *Finsler*,[12] *Neumann*,[13] and others, simply do not concern set theory *as such* at all. They only characterize the special *model* chosen by the respective author. "Unit domains" are usually the preferred choice—which, in fact, would amount to sacrificing the *applicability* of set theory, as we have already noted on p. 38. Moreover, it is customary to restrict oneself to the *lowest* infinitistic domain, the "Cantorian" domain, which I find equally disadvantageous. Instead, set theory as a *science*

[11] *Fraenkel 1919*, 3rd ed., § 18.5. p. 355. "Axiom of restriction".
[12] *Finsler 1926*.
On this, cf. also *Baer 1928*.
[13] *Von Neumann 1928d*.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

muß die Mengenlehre als *Wissenschaft* zunächst in vollster Allgemeinheit entwickelt werden, worauf die vergleichende Untersuchung der einzelnen *Modelle* als besonderes Problem vorgenommen werden kann.

46 Wodurch unterscheiden sich nun in der Mengenlehre tatsächlich | die verschiedenen Modelle mit gemeinsamer Basis, insbesondere die verschiedenen „Einheitsbereiche"? Wie wir sahen, durch ihre „Charakteristik", d. h. durch die Gesamtheit der in ihnen durch „Mengen" vertretenen Ordnungszahlen, oder durch die Gesamtheit der in ihnen enthaltenen „Grundfolgen" des nämlichen Urelementes. Da aber nur „Grenzzahlen" als „Charakteristik" dienen können, so ist jedes „Einheitsmodell" schon eindeutig bestimmt durch die Gesamtheit der in ihm vorhandenen (oder nicht vorhandenen) *Grundfolgen mit Grenzzahl-Typus*. Durch ihre Angabe, die in den verschiedenen Fällen mit Hilfe geeigneter Postulate erfolgen kann, ist dann der Modelltypus auch „kategorisch" festgelegt und zugleich mit seiner Charakteristik π (nach dem zweiten Entwickelungssatze des § 3) auch die Mächtigkeit $\overline{\pi}$ des entsprechenden Einheitsbereiches. Machen wir nun die allgemeine Hypothese, daß *jeder kategorisch bestimmte Bereich irgendwie auch als „Menge" aufgefaßt werden*, d. h. als Element eines (geeignet gewählten) Normalbereiches auftreten kann, so ergibt sich, daß jedem Normalbereiche ein höherer mit gleicher Basis, jedem Einheitsbereich ein höherer Einheitsbereich und damit auch jeder „Grenzzahl" π eine größere Grenzzahl π' entspricht. Ebenso entsteht aber auch aus jeder unendlichen Folge verschiedener Normalbereiche mit gemeinsamer Basis, die immer einer den andern als kanonische Abschnitte enthalten, durch Vereinigung und Verschmelzung ein kategorisch bestimmter Bereich von Mengen, der dann wieder zu einem Normalbereich von höherer Charakteristik ergänzt werden kann. Jeder kategorisch bestimmten Gesamtheit von „Grenzzahlen" folgt also wieder eine größere, und die Reihe „aller" Grenzzahlen ist ebenso unbegrenzt wie die Zahlenreihe selbst, sodaß auch jedem transfiniten Index eine bestimmte Grenzzahl ein-eindeutig zugeordnet werden kann. „Beweisbar" aus den ZF'-Axiomen ist das natürlich wieder *nicht*, da das behauptete Verhalten aus jedem einzelnen Normalbereiche herausführt. Es muß vielmehr die *Existenz einer unbegrenzten Folge von Grenzzahlen* als neues *Axiom* für die „Meta-Mengenlehre" postuliert werden, wobei noch die Frage der „Widerspruchslosigkeit" einer näheren Prüfung bedarf. Wenn ich mich aber auch hier noch auf diese vorläufige Skizze beschränken und auf ihre spätere Ausführung verweisen muß, so dürfte doch Folgendes bereits ein-
47 leuchten, was als | das wesentliche Ergebnis der vorliegenden Untersuchung angesehen werden kann:

Die „ultrafiniten Antinomien der Mengenlehre", auf die sich wissenschaftliche Reaktionäre und Anti-Mathematiker in ihrem Kampfe gegen die Mengenlehre so eifrig und liebevoll berufen, diese scheinbaren „Widersprüche" beruhen lediglich auf einer Verwechselung der durch ihre Axiome nichtkategorisch bestimmten *Mengenlehre selbst* mit den einzelnen sie darstellenden *Modellen*: was in einem Modelle als „ultrafinite Un- oder Übermenge"

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

must first be developed in greatest generality. The comparative investigation of individual *models* may then be approached as a special problem.

How, now, do the various models with a common basis, and in particular the various "unit domains", actually differ from one another in set theory? As we have seen, they differ with respect to their "characteristic", that is, the totality of ordinal numbers represented in them by "sets", or with respect to the totality of those "basic sequences" starting with the same urelement that are contained in them. But since only "boundary numbers" can serve as "characteristics", every "unit model" is uniquely determined already by the totality of the *basic sequences of boundary number type* that are (or are not) contained in it. Its specification then, which, in the different cases, can be effected by suitable postulates, "categorically" determines the model type and, together with its characteristic π (in accordance with the second development theorem of § 3) also the cardinality $\overline{\pi}$ of the corresponding unit domain. Let us now put forth the general hypothesis that *every categorically determined domain can also be conceived of as a "set" in one way or another*; that is, that it can occur as an element of a (suitably chosen) normal domain. It then follows that there corresponds to any normal domain a higher one with the same basis, to any unit domain a higher unit domain, and therefore also to any "boundary number" π a greater boundary number π'. Likewise, a categorically determined domain of sets arises through union and fusion from every infinite sequence of different normal domains with common basis, where one always contains the other as a canonical segment. This categorically determined domain of sets can then again be supplemented so as to become a normal domain of higher characteristic. Thus, to every categorically determined totality of "boundary numbers" there follows a greater one, and the sequence of "all" boundary numbers is as unlimited as the number series itself, allowing for the possibility of associating to every transfinite index a particular boundary number in one-to-one fashion. Once again, this is of course *not* "provable" on the basis of the ZF'-axioms, since the asserted behavior leads us beyond any individual normal domain. Rather, we must postulate the *existence of an unlimited sequence of boundary numbers* as a new axiom for the "meta-theory of sets", where the question of "consistency" still requires closer examination. While I have to confine myself here to this preliminary sketch and refer to its later elaboration, the following, which may be considered the essential result of the present investigation, should already be evident:

The "ultrafinite antinomies of set theory", to which scientific reactionaries and anti-mathematicians appeal in their fight against set theory with such eager passion, are only apparent "contradictions", due only to a confusion between *set theory itself*, which is non-categorically determined by its axioms, and the individual *models* representing it: what in one model appears as "ultrafinite non- or superset", is already a fully valid "set" with cardinal number

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

erscheint, ist im nächsthöheren bereits eine vollgültige „Menge“ mit Kardinalzahl und Ordnungstypus und bildet selbst den Grundstein zum Aufbau des neuen Bereiches. Der unbegrenzten Reihe der Cantorschen Ordnungszahlen entspricht eine ebenso unbegrenzte Doppelreihe von wesentlich verschiedenen mengentheoretischen Modellen, in deren jedem die ganze klassische Theorie zum Ausdrucke kommt. Die beiden polar entgegengesetzten Tendenzen des denkenden Geistes, die Idee des schöpferischen *Fortschrittes* und die des zusammenfassenden *Abschlusses*, die auch den Kantischen „Antinomien“ zugrunde liegen, finden ihre symbolische Darstellung und ihre symbolische Versöhnung in der auf den Begriff der Wohlordnung gegründeten transfiniten Zahlenreihe, die in ihrem schrankenlosen Fortschreiten keinen wahren Abschluß, wohl aber relative Haltpunkte besitzt, eben jene „Grenzzahlen“, welche die höheren von den niederen Modelltypen scheiden. Und so führen auch die mengentheoretischen „Antinomien“, richtig verstanden, statt zu einer Verengung und Verstümmelung vielmehr zu einer jetzt noch unübersehbaren Entfaltung und Bereicherung der mathematischen Wissenschaft.

Beim Abschluß dieser Arbeit ist es mir Bedürfnis, meinem Kollegen Herrn Dr. *Arnold Scholz*, der mich bei der Ausarbeitung dieser Untersuchung sowie bei den Korrekturen durch wertvolle Ratschläge auf das freundlichste unterstützte, meinen herzlichen Dank zu sagen.

Freiburg i. Br. den 13-ten April 1930.

Über die logische Form der mathematischen Theorien

1930b

Es wird der Begriff eines vollständigen Satzsystems eingeführt, d. i. eines Satzsystems, welches sämtliche logische Konsequenzen seiner Sätze enthält. Die Betrachtung derartiger Systeme kann in gewissen Fragen der axiomatischen Formulierung vorgezogen werden.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

and ordinal type in the next higher model and, in turn, serves itself as the bed-stone in the construction of the new domain. To the unlimited series of Cantorian ordinal numbers there corresponds a likewise unlimited double series of essentially different set-theoretic models in each of which the entire classical theory finds its expression. The two diametrically opposed tendencies of the thinking mind, the ideas of creative *progress* and summary *completion*, which form also the basis of Kant's "antinomies", find their symbolic representation as well as their symbolic reconciliation in the transfinite number series, which rests upon the notion of well-ordering and which, though lacking in true completion on account of its boundless progressing, possesses relative way stations, namely those "boundary numbers", which separate the higher from the lower model types. Thus, instead of leading to constriction and mutilation, the set-theoretic "antinomies" lead, when understood correctly, to an as yet unforeseeable development and enrichment of the mathematical science.

In conclusion, I would like to express my sincere gratitude to my colleague Dr. *Arnold Scholz* for his kind support and valuable advice during the writing of this paper and the proof-reading of the manuscript.

Freiburg i. Br., on the 13th of April 1930.

On the logical form of mathematical theories

1930b

The introductory note just before *s1929b* also addresses *1930b*.

The concept of a complete propositional system is introduced, that is, of a propositional system containing all logical consequences of its propositions. The consideration of such systems may be preferred to the axiomatic formulation with respect to certain questions.