DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Introductory note to s1930d

Akihiro Kanamori

For the three years 1929 through 1931 Zermelo was supported by a fellowship provided by the Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, the Emergency Association of German Science. This association was founded in 1920 by the leading German academies and scientific organizations in order to avert a collapse of research in the economically disastrous time after the First World War. With a Swiss pension meager and inadequate, Zermelo had in 1929 applied for the fellowship with a research project "On the Nature and Foundations of Pure and Applied Mathematics and the Significance of the Infinite in Mathematics", and surely the fellowship was a significant factor in his return to the fray of foundational work. *s1930d* was a report, dated 3 December 1930, to the Notgemeinschaft for the continuation of the fellowship into 1931.[1]

Written for the purpose of apprising and explaining, the report is an informal account, well worth reading, of Zermelo's early career as well as of his *1930a* work and what was to be subsequent investigations (cf. *s1930e*). In what follows, we selectively make a few of the several possible points that can be made.

Zermelo makes informative remarks about the two axioms newly adopted in *1930a*. About the replacement axiom Zermelo writes: "... [the *1908b* axiom system] has received a valuable addition only once in the form of the 'replacement axiom' proposed by *Fraenkel*. On the other hand, it was only the concept of 'cofinality' introduced by *Hausdorff* that made possible a fruitful application of the new axiom." How Hausdorff had first ventured beyond Cantor into the higher uncountable is suitably noted; today however, one would mainly regard replacement as the provenance of formalized definitions by transfinite recursion and the sets they provide. As for the axiom of foundation, after articulating the problems "posed and solved" in his *1930a,* Zermelo newly highlights the axiom: "Using the new axiom it was possible to carry out a decomposition into layers, the 'development' of a 'normal domain' (that is, of a domain of sets satisfying the axiom system), and to answer the decisive main question in the 'isomorphism theorems'."

Having described how, in his *1930a* context, normal domains with equivalent bases are isomorphic to initial segments of each other, Zermelo writes: "From this already follows ... that *Cantor's* (generalized) conjecture [the generalized continuum hypothesis] ... does *not* depend on the choice of the model, but that it is decided (as true or false) once and for all by means of our axiom system." As Zermelo was evidently proceeding in second-order terms, this distinctly anticipates Georg Kreisel's observation (cf. *Kreisel 1971*) that

[1] See *Ebbinghaus 2007b* for the foregoing historical details.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

the continuum hypothesis is not independent of second-order ZF although which way it is decided is not known.

Zermelo goes on to describe his *1930a* sequence of normal domains and their boundary numbers. The smallest boundary number is ω and the next, the least inaccessible cardinal, which for Zermelo corresponds to "'Cantor's domain', in which all of Cantor's set theory including the infinity axiom already finds it representation." But this, like any other normal domain, is capable of being extended to a higher domain, and so forth. With this, Zermelo draws the following distinction vis-à-vis Skolem:

> We thus arrive at a kind of "set-theoretic relativism", which, however, differs essentially from *Skolem's* "relativism", in which even the concepts of "partial sets" and that of "cardinalities" are being relativized: *Skolem* wishes to restrict the formation of subsets to special classes of defining functions, while I, in keeping with the true spirit of set theory, allow for the *free* division and postulate the existence of all partial sets formed in any arbitrary way. For *Skolem*, it is supposed to be possible to represent set theory *in its entirety* already in a *countable* model, and, e.g., the problem of the cardinality of the continuum already loses its real significance for him.

Concluding, Zermelo writes:

> The questions of the "existence" or "consistency" of the "higher" normal domains are of course not entirely settled in the present paper ⟦*1930a*⟧; but I believe to have found a procedure of making evident the consistency by means of the systematic construction of a "set-theoretic model" using "the unlimited number series".

The first would be described in *s1930e* and the second, in the notes *s1931e*. Zermelo continues with remarks that have a modern resonance in terms of reflection heuristics and large cardinal postulations:

> To this end, I need the "metamathematical" concept of "closed domains", which, e.g., corresponds to *Cantor's* "concept of sets" and which can be reduced to that of "categorical systems of postulates". Every "normal domain" is a "closed domain" and can therefore also be conceived of as a "set" in a "higher" ⟦normal domain⟧. . . . No (closed) normal domain can represent set theory in its entirety since every "boundary number" corresponds to a segment of the number series, and hence no normal domain contains all boundary numbers. Set theory in its entirety is only representable in the "open" domain of all normal domains.

This distinction between open and closed domains would become the major demarcation for Zermelo's subsequent work in set theory (cf. *s1930e*).

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Bericht an die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft über meine Forschungen betreffend die *Grundlagen der Mathematik*

s1930d

Schon vor 30 Jahren, als ich Privatdozent in Göttingen war, begann ich unter dem Einflusse *D. Hilbert*s, dem ich überhaupt das meiste in meiner wissenschaftlichen Entwickelung zu verdanken habe, mich mit den Grundlagenfragen der Mathematik zu beschäftigen, insbesondere aber mit den grundlegenden Problemen der *Cantor*schen *Mengenlehre*, die mir in der damals so fruchtbaren Zusammenarbeit der Göttinger Mathematiker erst in ihrer vollen Bedeutung zum Bewußtsein kamen. Es war damals die Zeit, wo die "Antinomien", die scheinbaren "Widersprüche" in der Mengenlehre, die allgemeinste Aufmerksamkeit auf sich zogen und berufene wie unberufene Federn zu den kühnsten wie zu den ängstlichsten Lösungsversuchen veranlaßten. In der Überzeugung, daß in diesem Komplexe von Fragen auch die tiefsten Einblicke in das Wesen der Mathematik überhaupt zu gewinnen seien, wandte ich mich diesen Problemen zu in einer Reihe von Arbeiten, die u. a. die damals noch sehr umstrittene Möglichkeit der "Wohlordnung" betrafen und im Jahre 1907–8 in der Abhandlung "Über die Grundlagen der Mengenlehre" in den Mathematischen Annalen Bd. 65 zum vorläufigen Abschlusse kamen. Das von mir damals eingeführte Axiomen-System ist seitdem für die axiomatische Forschung auf diesem Gebiete im Wesentlichen maßgebend geblieben und hat inzwischen nur einmal durch das von *Fraenkel* vorgeschlagene "Ersetzungs-Axiom" eine wertvolle Erweiterung erfahren, während andererseits der von *Hausdorff* eingeführte Begriff der "Konfinalität" eine fruchtbare Anwendung des neuen Axioms erst ermöglichte. Mittlerweile war aber auch die Frage nach den "Grundlagen" aufs Neue wieder in Fluß gekommen durch das etwas geräuschvolle Auftreten der "Intuitionisten", die in temperamentvollen
2 Streitschriften eine | "Grundlagen-Krisis" der Mathematik verkündeten und so ziemlich der ganzen modernen Wissenschaft den Krieg erklärten — ohne selbst etwas Besseres an ihre Stelle setzen zu können. "Eine Mengenlehre als besondere mathematische Disziplin wird es nicht mehr geben," dekretierte einer ihrer eifrigsten Adepten — während gleichzeitig die neuen Lehrbücher der Mengenlehre nur so ins Kraut schossen. Diese Sachlage veranlaßte auch mich damals, den Grundlagen-Problemen wieder meine forschende Tätigkeit zuzuwenden, nachdem ich durch langwierige Krankheit und geistige Isolierung im Auslande der wissenschaftlichen Produktion schon fast entfremdet war. Ohne in dem proklamierten Streite zwischen "Intuitionismus" und "Formalismus" Parteigänger zu werden — ich halte diese Alternative überhaupt für eine logisch unzulässige Anwendung des "Tertium non datur" — glaubte ich doch zu einer Klärung der einschlägigen Fragen beitragen zu können: nicht als "Phi-

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Report to the Emergency Association of German Science about my reasearch concerning the *foundations of mathematics*

s1930d

Already thirty years ago, as a *Privatdozent* in Göttingen, I began to concern myself with the foundational questions in mathematics under the influence of *D. Hilbert* to whom I owe the most for my scientific development. In particular, however, I concerned myself with the basic problems of *Cantor*'s *set theory* whose full significance I only realized during the so fruitful collaboration with the mathematicians in Göttingen. This was the time when the "antinomies", the apparent "contradictions" in set theory, attracted the widest attention and elicited attempts, both bold and timid, at their resolution from pens both skilled and not so skilled. Convinced that the deepest insights into the nature of mathematics altogether were to be found in this area of questions, I turned to these problems in a series of papers, which were concerned with, among other things, the possibility of "well-ordering", then still much-disputed, and which came to a preliminary conclusion in the 1907–8 paper "On the foundations of set theory" in the Mathematische Annalen vol. 65.[1] The axiom system I introduced at the time has essentially remained the standard for the axiomatic investigation in this field ever since. It received a valuable addition only once, in the form of the "replacement axiom" proposed by *Fraenkel*. On the other hand, it was only the concept of "cofinality" introduced by *Hausdorff* that made possible a fruitful application of the new axiom. In the meantime, however, the question about the "foundations" had gathered momentum once again as the "intuitionists" stridently proclaimed a "foundational crisis" in mathematics in fiery pamphlets and declared war on essentially all of modern science—without being able to substitute something better for it. "Set theory as a special mathematical discipline will no longer exist," decreed one of its most ardent disciples—when, at the same time, the new textbooks on set theory were springing up like mushrooms. At the time, this situation prompted me as well to take up my research on foundational problems after long illness and intellectual isolation abroad had almost estranged me from scientific production. While remaining neutral in the proclaimed dispute between "intuitionism" and "formalism"—a choice of alternatives, which, in my opinion, is but a logically illegitimate application of the "tertium non datur"—I believed that I could after all contribute to a clarification of the relevant questions: not as a "philosopher" who pronounces

[1] ⟦*Zermelo 1908b*⟧.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

losoph" durch Verkündung "apodiktischer" Prinzipien, welche durch Vermehrung der bestehenden Meinungen die Verwirrung nur noch zu steigern pflegen, sondern als Mathematiker durch Aufweisung objektiver mathematischer Zusammenhänge, die erst eine gesicherte Grundlage für alle philosophischen Theorien abgeben können. In der besonderen Frage der Mengenlehre nun, wo es sich vor allen Dingen um die Aufklärung der "Antinomien" handelt, stellte ich mir jetzt, dem aufgestellten Grundsatze entsprechend, die entscheidende Vorfrage: Wie muß ein "Bereich" von "Mengen" und "Urelementen" beschaffen sein, um den "allgemeinen" Axiomen der Mengenlehre zu genügen? Ist unser Axiomen-System "kategorisch" oder gibt es eine Vielheit wesentlich verschiedener "mengentheoretischer Modelle"? Ist der Begriff einer "Menge" im Gegensatz zu einer bloßen "Klasse" ein absoluter, durch logische Merkmale bestimmbarer oder nur ein relativer, abhängig von dem jeweils zugrunde geleg-
3 ten mengentheoretischen Modell? | Dieses Problem ist es, das ich mir in meiner 1930 erschienenen Fundamenta-Arbeit "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche" gestellt und gelöst habe. Um es aber erfolgreich in Angriff nehmen zu können, ergab sich zunächst die Notwendigkeit, das "Zermelo-Fraenkel'sche Axiomensystem" durch ein weiteres, das "Fundierungs-Axiom" [[,]] zu ergänzen, das u. a. "sich selbst enthaltende" und "zirkelhafte Mengen" ausschließt und in allen praktisch wichtigen Fällen tatsächlich erfüllt ist. Mit Hilfe des neuen Axioms konnte eine schichtenförmige Zerlegung, die "Entwickelung" eines "Normalbereiches" (d. h. eines dem Axiomensystem genügenden Mengenbereiches) durchgeführt und in den "Isomorphie-Sätzen" die entscheidende Hauptfrage beantwortet werden. Zwei Normalbereiche sind dann und nur dann "isomorph", wenn 1) ihre "Basen" (d. h. die Gesamtheit ihrer Ur-Elemente) einander äquivalent und 2) ihre "Charakteristiken" (d. h. die oberen Grenzen der vorkommenden Alefs) einander gleich sind, wenn also auch jeder Menge des einen Bereiches mindestens eine äquivalente im anderen entspricht. Von zwei Bereichen mit äquivalenten Basen (aber verschiedenen Charakteristiken) ist immer der eine isomorph einem "kanonischen" Entwickelungs-Abschnitte des anderen. Hieraus folgt u. a. bereits, daß die (verallgemeinerte) *Cantor*sche Vermutung (wonach die Potenzmenge jeder Menge immer gerade die nächstfolgende Mächtigkeit haben soll) *nicht* von der Wahl des Modells abhängt, sondern durch unser Axiomensystem ein für allemal (als wahr oder als falsch) entschieden ist. Ein "Normalbereich" ist (bis auf isomorphe Abbildungen) bestimmt durch zwei Alefs, durch seine "Breite" (d. h. die Mächtigkeit seiner Basis) und durch seine "Höhe" (d. h. seine Charakteristik), und die Gesamtheit aller möglichen "Modell-Typen" wird also dargestellt durch eine (zweifach wohlgeordnete) Doppel-Reihe von Alefs, in welcher die "Breite" sämtliche Alefs durchläuft, die "Höhe" aber auf die Reihe der "Grenzzahlen" beschränkt ist. Um "Grenzzahl" oder "Charakteristik eines
4 | Normalbereiches" zu sein muß eine (transfinite) "Anfangszahl" zwei charakteristische Eigenschaften haben: sie muß "Eigenwert" oder "kritische Zahl" einer gewissen "Normalfunktion" sein, darf aber keiner kleineren Ordnungszahl "konfinal", muß vielmehr immer eine "reguläre Anfangszahl zweiter Art" im

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

"apodeictic" principles, which often add to the confusion by introducing yet another opinion, but as a mathematician who finds objective mathematical connections, which can, in turn, serve as a secure foundation for any philosophical theory. Considering the special question of set theory, where what matters most is the resolution of the "antinomies", I posed for myself the decisive preliminary question in accordance with the specified principle: How does a "domain" of "sets" and "urelements" have to be constituted so that it satisfies the "general" axioms of set theory? Is our axiom system "categorical" or are there a multitude of essentially different "set-theoretic" models? Is the concept of "set", as opposed to that of mere "class", an absolute one, capable of being determined by means of logical characteristics, or is it only a relative concept, dependent on the set-theoretic model upon which it happens to be based? This is the problem I posed for myself and solved in my paper "On boundary numbers and domains of sets" published in Fundamenta in 1930.[2] In order to tackle it successfully, however, I first had to supplement the "Zermelo-Fraenkel axiom system" by adding a further axiom, the "foundation axiom", which excludes, among other things, "self-containing" and "circular sets" and which, in all cases of practical significance, is in fact satisfied. By using the new axiom it was possible to carry out a decomposition into layers, the "development" of a "normal domain" (that is, of a domain of sets satisfying the axiom system), and to answer the decisive main question in the "isomorphism theorems". Two normal domains are "isomorphic" if and only if 1) their "bases" (that is, the totality of their urelements) are equivalent to one another and 2) their "characteristics" (that is, the upper limits of the occurring alephs) are equal, if, in other words, to each set of one domain there corresponds at least one equivalent one in the other domain. Of two domains with equivalent bases (but different characteristics) one is always isomorphic to a "canonical" development segment of the other. From this it already follows, among other things, that *Cantor*'s (generalized) conjecture (according to which the power set of any set is supposed to always be of the immediately succeeding cardinality) does *not* depend on the choice of the model, but that it is decided (as true or as false) once and for all by means of our axiom system. A "normal domain" is determined (up to isomorphic mappings) by two alephs, by its "breadth" (that is, the cardinality of its basis) and by its "height" (that is, its characteristic), and the totality of all possible "model types" is thus represented by a (doubly well-ordered) double sequence of alephs in which the "breadth" runs through all the alephs, but in which the "height" is restricted to the sequence of the "boundary numbers". For a (transfinite) "initial number" to be a "boundary number", or "characteristic of a normal domain" it must have the following two characteristic properties: it must be "eigenvalue" or "critical number" of a certain "normal function", but it must not be "cofinal" with any smaller ordinal number. Rather, it must

[2] ⟦*Zermelo 1930a.*⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Sinne *Hausdorff* s, eine "exorbitante" Zahl sein. Die *Existenz* solcher "Grenzzahlen" kann nun freilich nicht aus dem Axiomensystem erwiesen sondern, weil sie eben nicht für *alle* Normalbereiche gilt, nur (für die höheren Bereiche metamathematisch) postuliert werden. Die (absolut) kleinste Grenzzahl ω begrenzt den "finitistischen Bereich", der nur endliche Mengen enthält, die nächstfolgende π_1 den "Cantorschen Bereich", in welchem bereits die ganze Cantorsche Mengenlehre einschließlich des Unendlichkeits-Axioms zur Darstellung gelangt. Aber auch dieser Bereich ist (wie jeder andere Normalbereich) noch erweiterungsfähig zu einem "höheren" Bereiche, welcher u. a. auch "Mengen" von der Mächtigkeit π_1 enthält. Ganz allgemein gesprochen lösen sich die "ultrafiniten Antinomien" bei dieser Betrachtungsweise dadurch, daß jeder Normalbereich N zwar Teilbereiche M besitzt, die "zu groß" sind, um in ihm "Mengen" zu sein, daß aber alle solchen Teilbereiche M wie auch N selbst bereits im nächstfolgenden Normalbereiche N' durch vollgültige "Mengen" vertreten sind. Jeder Normalbereich selbst ist "Menge" in allen höheren Bereichen, aber es gibt keinen höchsten Normalbereich, welcher *alle* Normalbereiche als Mengen enthielte. Charakterisiert wird der einzelne Normalbereich (abgesehen von seiner Basis) durch die in ihm vorkommenden "Mengen von Grenzzahl-Mächtigkeit", der "Cantorsche" z. B. durch die Eigenschaft, außer den abzählbaren *keine* weiteren Mengen von Grenzzahl-Mächtigkeit zu enthalten. So gelangen wir also zu einer Art von "mengentheoretischem Relativismus", der sich aber von dem Skolemschen "Relativismus", in wel-
5 chem sogar die Begriffe von | "Teilmenge" und "Mächtigkeit" relativiert werden, grundsätzlich unterscheidet: *Skolem* will die Bildung der Untermengen auf besondere Klassen definierender Funktionen einschränken, während bei mir, dem wahren Geiste der Mengenlehre entsprechend, die *freie* Teilung zugelassen und die Existenz aller irgendwie gebildeten Teilmengen postuliert wird. Bei *Skolem* soll schon in einem *abzählbaren* Modell die *ganze* Mengenlehre dargestellt werden können, und für ihn verliert z. B. auch schon das Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums seine eigentliche Bedeutung. Die Fragen nach der "Existenz" oder "Widerspruchslosigkeit" der "höheren" Normalbereiche sind freilich in der gedruckt vorliegenden Arbeit noch nicht völlig erledigt; aber ich glaube ein Verfahren gefunden zu haben, durch systematischen Aufbau eines "mengentheoretischen Modelles" und mit Hilfe der "unbegrenzten Zahlenreihe" diese Widerspruchslosigkeit einsichtig machen zu können. Ich brauche dazu den "metamathematischen" Begriff eines "geschlossenen Bereiches", der etwa dem *Cantor*schen "Mengenbegriffe" entspricht und auf den eines "kategorischen Postulatsystems" zurückgeführt werden kann. Jeder "Normalbereich" ist ein "geschlossener Bereich" und kann daher in einem "höheren" auch als "Menge" aufgefaßt werden. Jeder *Abschnitt* der (transfiniten) Zahlenreihe ist ein geschlossener Bereich, aber auf jede "Menge", jeden "geschlossenen" Bereich von Ordnungszahlen folgen immer noch weitere Ordnungszahlen: die "unbegrenzte" Zahlenreihe selbst ist ein "offener Bereich". Kein (geschlossener) Normalbereich kann die ganze Mengenlehre darstellen, da jede "Grenzzahl" einem Abschnitt der Zahlenreihe entspricht und daher

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

always be a "regular initial number of the second kind" in *Hausdorff*'s sense, an "exorbitant" number. The *existence* of such "boundary numbers" cannot of course be shown from the axiom system but it can only be postulated (metamathematically for the higher domains) since it just does not hold for *all* normal domains. The (absolutely) smallest boundary number ω delimits the "finitistic domain", which only contains finite sets, the immediate successor π_1 ⟦delimits⟧ "Cantor's domain", in which all of Cantor's set theory including the infinity axiom already finds its representation. But (like any other normal domain) this domain, too, is still capable of being extended to a "higher" domain, which, among other things, also contains "sets" of cardinality π_1. Generally speaking, the "ultrafinite antinomies" are resolved on this view by the fact that, while every normal domain N possesses partial domains M which are "too big" to figure as "sets" in it, all such partial domains M as well as N itself are already represented in the immediately succeeding normal domain N' by fully valid "sets". Every normal domain is itself a "set" in all higher domains, but there is no highest normal domain containing *all* normal domains as sets. The individual normal domain is characterized (aside from its basis) by the "sets with boundary number cardinality" occurring in it; e.g., "Cantor's domain" by the property of containing *no* further sets of boundary number cardinality other than the countable ones. We thus arrive at a kind of "set-theoretic relativism", which, however, essentially differs from *Skolem*'s "relativism", in which even the concepts of "partial set" and that of "cardinality" are being relativized: *Skolem* wishes to restrict the formation of subsets to special classes of defining functions, while I, in keeping with the true spirit of set theory, allow for the *free* division and postulate the existence of all partial sets formed in any arbitrary way. For *Skolem*, it is supposed to be possible to represent set theory *in its entirety* already in a *countable* model, and, e.g., the problem of the cardinality of the continuum already loses its real significance for him. The questions of the "existence" or "consistency" of the "higher" normal domains are of course not entirely settled in the published paper; but I believe to have found a procedure of making evident this consistency by means of the systematic construction of a "set-theoretic model" and the "unlimited number series". To this end, I need the "metamathematical" concept of "closed domain", which, e.g., corresponds to *Cantor*'s "concept of sets" and can be reduced to the concept of "categorical system of postulates". Every "normal domain" is a "closed domain" and can therefore also be conceived of as a "set" in a "higher" ⟦normal domain⟧. Each *segment* of the (transfinite) number series is a closed domain, but each "set", each "closed" domain of ordinal numbers is always succeeded by still further ordinal numbers: the "unlimited" number series is itself an "open domain". No (closed) normal domain can represent set theory in its entirety, since every "boundary number" corresponds to a segment of the number series, and hence

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

kein Normalbereich alle Grenzzahlen enthält. Die ganze Mengenlehre ist allein darstellbar in der “offenen” Gesamtheit aller Normalbereiche.

6 | Anhang I

Zusammenstellung meiner bisherigen Fortschritte und Resultate zum Neuaufbau der Mengenlehre

1) Unterscheidung der allgemeinen Mengenlehre von den verschiedenen sie darstellenden Modellen, den “Normalbereichen”.
2) Ausscheidung “zirkelhafter” und ähnlicher Mengen durch Hinzufügung des “Fundierungs-Axioms”.
3) Einführung einer “Basis” von “Urelementen” anstelle der “Nullmenge”.
4) Vermeidung des *Skolem*schen “Relativismus” durch freie Bildung von Untermengen *ohne* “Definitheits-Beschränkung”.
5) Schichtenförmige “Entwickelung” eines “Normalbereiches” aus gegebener “Basis” mit Hilfe der Wohlordnung.
6) Begriff der “Grenzzahl” als “Charakteristik” eines Normalbereiches. “Finitistische” und “infinitistische” Normalbereiche.
7) Eigenschaften der “Grenzzahlen”: Sie sind “Eigenwerte” oder “kritische Zahlen” einer gewissen “Normalfunktion”, die gleichzeitig “Kernzahlen” d. h. “reguläre Anfangszahlen zweiter Art” sind.
8) “Isomorphie-Sätze” über Normalbereiche: jeder Modell-Typus ist bestimmt durch zwei Alefs, ⟦durch⟧ die Mächtigkeit seiner Basis und durch seine “Charakteristik” d. h. die obere Grenze der als Mengen vorkommenden Mächtigkeiten. Die Modelltypen bilden eine zweifach wohlgeordnete Doppelreihe. Die Gültigkeit der “*Cantor*schen Vermutung” ist *unabhängig* vom gewählten Modell.
9) Aufklärung der “ultrafiniten Antinomien” durch Unterscheidung der Modelltypen: Relativismus des Mengenbegriffs — in einem anderen als dem *Skolem*schen Sinne.

7 | Anhang II

Zusammenstellung weiterer in Vorbereitung begriffener Untersuchungen

1) Über die Konstruktion eines mengentheoretischen Modells und die Widerspruchslosigkeit der Mengenlehre.
2) Über “geschlossene” und “offene Bereiche” und den *Cantor*schen absoluten Mengenbegriff.
3) Über den mengentheoretischen Relativismus bei *Skolem* und mir und seine Bedeutung für das Kontinuum-Problem.
4) Über die Mathematik als die “Logik des Unendlichen” und die Unmöglichkeit einer “finitistischen Mathematik”.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

no normal domain contains all boundary numbers. Set theory in its entirety is only representable in the "open" totality of all normal domains.

Appendix I

Synopsis of my previous advances and results concerning the new construction of set theory

1) Distinction between general set theory and the different models representing it, the "normal domains".
2) Exclusion of "circular" and similar sets by adding the "foundation axiom".
3) Introduction of a "basis" of "urelements" instead of the "null set".
4) Avoidance of *Skolem*'s "relativism" by means of the free formation of subsets *without* "definiteness restriction".
5) "Development" of a "normal domain" in layers from a given "basis" by means of well-ordering.
6) Concept of the "boundary number" as "characteristic" of a normal domain. "Finitistic" and "infinitistic" normal domains.
7) Properties of the "boundary numbers": They are "eigenvalues" or "critical numbers" of a certain "normal function" which are also "core numbers", that is, "regular initial numbers of the second kind".
8) "Isomorphism theorems" on normal domains: every model type is determined by two alephs: the cardinality of its basis and its "characteristic", that is, the upper limit of the cardinalities occurring as sets. The model types form a doubly well-ordered double sequence. The validity of "*Cantor*'s conjecture" is *independent* of the chosen model.
9) Resolution of the "ultrafinite antinomies" by distinguishing among the different model types: Relativism of the concept of set—in a sense other than *Skolem*'s.

Appendix II

Synopsis of further investigations currently in preparation

1) On the construction of a set-theoretic model and the consistency of set theory.
2) On "closed" and "open domains" and *Cantor*'s absolute set concept.
3) On the set-theoretic relativism in *Skolem*'s work and in my work, and its significance for the continuum problem.
4) On mathematics as the "logic of the infinite" and the impossibility of a "finitistic mathematics".

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

5) Über das Verhältnis der Mathematik zur *Anschauung*: erst mit der infinitistisch-logischen Verarbeitung eines anschaulich gegebenen Materiales beginnt die mathematische Wissenschaft und kann daher selbst *nicht* auf "Anschauung" gegründet werden. Auch in der Geometrie beruht der Vorzug der "Euklidischen Geometrie" *nicht* auf ihrer "anschaulichen Gegebenheit" sondern lediglich auf ihrer logisch-mathematischen Einfachheit.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

5) On the relation of mathematics to *intuition*: mathematics begins only with the infinitistic-logical processing of material given in intuition. Thus it can *not* itself be based on "intuition". In geometry, too, the advantage of "Euclidean geometry" is *not* based on its "being given in intuition", but merely on its logico-mathematical simplicity.