DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Introductory note to s1930e

Akihiro Kanamori

In this note found in the *Nachlass*, Zermelo describes his ideas in 1930 on the construction of a model of set theory and, with it, the consistency of set theory. As such, the note provides details on the first two topics that Zermelo had listed in the appendix, “Synopsis of further investigations currently in preparation”, of his report *s1930d* to the Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft for the continuation of his fellowship into 1931. There are five carefully typed pages, the first four comprising a section “§ 1. The construction of the model” and dated 30 September 1930, and the last “On closed and open domains”. At least the first four pages were probably intended to be at the beginning of a publication.[1]

What is most notable about *s1930e* is that it shows Zermelo to be undoubtedly the first to provide an analysis of set theory and a motivation for its axioms based on what we now call the *iterative conception.* This is a way of thinking about the subject matter for set theory as stratified in layers, a set at a layer consisting of elements from former layers and the layers indexed with transfinite numbers. As sources for this one has referred to *Zermelo 1930a* and its adoption of the axiom of foundation and to Gödel's work on L. In Gödel's writings one sees the iterative conception as an underlying motivation in terms of an extension into higher types (cf. his publication *1947,* 518ff and his lecture *1933*). Specific articulations of the iterative conception as itself motivating the axioms of set theory appeared in the 1970s, e.g. *Scott 1971*, *Shoenfield 1977*, *Wang 1974*, and *Boolos 1971.* In Zermelo's *s1930e* one now sees how the initial axiomatizer of set theory had already traveled down this path.

Zermelo first sets out his set-theoretic model, and it is his cumulative hierarchy from *1930a* based on a totality Q of urelements serving as a basis:

$$P_1 = Q\,;\ P_{\alpha+1} = P_\alpha \cup \mathcal{P}(P_\alpha)\,;\ \text{and } P_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \text{ for limit ordinals } \alpha.$$

The difference here is that the presentation, with the goal of establishing the consistency of set theory, is more in the spirit of a schematic picture. In particular, Zermelo defines the “fundamental relation” $x \in y$ by first considering a subset M of a level P_α in an evidently informal sense, ascribing to it a corresponding member m of $P_{\alpha+1}$, and then specifying that $x \in m$ for all elements x of M. Zermelo himself did not take the linguistic turn, in that he did not develop an uninterpreted formalism, but here he comes closest in set theory to making a distinction between a semantic context and a syntactic counterpart.

[1] See *Ebbinghaus 2006* for historical details.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Zermelo goes on to argue for the axioms of set theory in terms of this schematic picture. As in his *1930a*, he argues for the separation axiom to be satisfied "in full generality and without the 'definiteness' restriction." He does not argue for the axiom of choice, for as in his *1930a* he takes it to be an underlying "general logical principle". Interestingly, he writes here "e.g., in the form of Hilbert's 'Aristides'." This refers to Hilbert's proof-theoretic τ operator, for which the scheme $A(\tau A) \to A(a)$ had been metaphorically described as: If Aristides the Just is corruptible, then everyone is corruptible. However antithetical Hilbert's finitary approach was for Zermelo, one finds him referring here explicitly to features of the former's proof theory. On the other hand, the connection between the τ operator and the axiom of choice is not a directly correlative one.

Zermelo's argument for the replacement axiom in terms of his schematic picture is weak—indeed, circular—in that he starts with a set m, replaces its members with sets from some P_{β}, and then argues that the result is a set, being in $P_{\beta+1}$. Zermelo writes: "Of course, the assumption that the replacing elements belong to a *segment* of the development, while being essential here, constitutes no real restriction." He however had emphasized in his *1930a* the importance of replacement in connection with cofinality, and so here he defeats its purpose by specifying in advance that the replacing members be from some fixed P_{β}. *Boolos 1971* pointed out how replacement is not well-motivated by the iterative conception.

Zermelo next gets to the question of when a P_{π} satisfies his axioms. He points out that the simpler axioms hold at any P_{α} and that the power set axiom holds at those with limit index α. He then focuses on the replacement axiom, and highlighting its import, argues that P_{π} satisfies all of the axioms exactly when π is a "boundary number [Grenzzahl]" in the sense of *1930a*, i.e. ω or a (strongly) inaccessible cardinal.

The last page of *s1930e* provides Zermelo's fullest articulation of his distinction between closed and open domains, broached at the end of *s1930d*. Zermelo begins:

> A "closed domain" is one which can be determined or ordered by means of a *categorical system of postulates*. It is precisely that which Cantor really meant by his well-known definition of "set".

Cantor 1895, 481 had "defined" a set as "any collection into a whole [Zusammenfassung zu einem Ganzen] of definite and separate objects of our intuition or our thought", and Zermelo is now specifying that sets are to be defined through a "categorical system of postulates". However, in what languages the definitions are to be given would never be adequately clarified.[2]

[2] See *Ebbinghaus 2003.*

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Zermelo continues:

An "open domain" is a *well-ordered sequence of domains successively comprising one another* constituted so that *every closed subdomain can always still be extended* in it. ... Furthermore, the *entire open domain can be well-ordered so that all elements of a preceding layer precede all elements of every subsequent one.*

Über das mengentheoretische Modell

s1930e

§1. Die Konstruktion des Modells

Es sei gegeben ein wohldefinierter "geschlossener" Bereich Q von Objekten "q", die wir als "Urelemente" bezeichnen, während der Bereich selbst die "Basis" der Konstruktion genannt werden soll. Wir bilden nun successive eine wohlgeordnete Reihe weiterer Bereiche, die wir "Schichten" nennen wollen, indem wir jeder Zahl α der transfiniten Zahlenreihe eine "Schicht" Q_α und einen zugehörigen "Abschnitt" P_α zuordnen nach der folgenden Vorschrift:

1) $P_1 = Q_0 = Q$
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$
   $P_\alpha = \lim P_\beta$, wenn α eine Limeszahl ist und β alle kleineren Zahlen durchläuft.

Jedes Q_α soll dabei nur "neue" Elemente enthalten, d. h. solche, die in P_α nicht vorkommen. Zwischen den Elementen aller dieser Schichten führen wir nun eine Relation ein, die "Grundrelation" $a \in b$ in folgender Weise: Ist M irgend eine Untermenge von P_α, welche keinem kleineren Abschnitte P_β angehört, so entspricht ihr ein und nur ein Element m in Q_α, welches zu allen Elementen x von M in der Beziehung $x \in m$ steht und nur zu diesen, also sicher auch zu keinem Elemente derselben Schicht oder einer höheren Schicht. (Die Schichten Q_α selbst sind durch diese Bedingung nur nach ihrer Mächtigkeit bestimmt und im Übrigen willkürlich.)[1] Jede Schicht ist von höherer Mächtigkeit als

[1] ⟦The word "willkürlich" is underlined by pencil with a question mark on the margin.⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

This alludes to the cumulative hierarchies of *1930a* and as there,

> Set theory *in its entirety can be completely* represented only in an "open model", and so it is in my "set-theoretic model" based on "absolute" or "canonical development".

While in *1930a* Zermelo had directly posited the set-theoretic universe as a sequence of domains given by an unending sequence of boundary numbers, here he is focusing on establishing the consistency of set theory through representing it with this "open model".

On the set-theoretic model*

s1930e

§1. The construction of the model

Assume a well-defined "closed" domain Q of objects "q", which we shall call "urelements", whereas the domain itself shall be called the "basis" of the construction. We now successively form a well-ordered sequence of further domains, which we shall call "layers", by correlating with each number α of the transfinite number series a "layer" Q_α and a "segment" P_α belonging to it according to the following instruction:

1) $P_1 = Q_0 = Q$
2) $P_{\alpha+1} = P_\alpha + Q_\alpha$
   $P_\alpha = \lim P_\beta$ where α is a limit number and β runs through all smaller numbers.

Each Q_α shall only contain "new" elements, that is, such ones that do not occur in P_α. We now introduce a relation among the elements of all these layers, the "fundamental relation" $\alpha \in \beta$, as follows: If M is some subset of P_α belonging to no smaller segment P_β, then to it there corresponds one and only one element m in Q_α such that the relation $x \in m$ holds for all elements x of M and only those, and hence certainly for no element of the same layer or a higher layer. (The layers Q_α themselves are determined by this condition only with respect to their cardinality. In any other regard, they are arbitrary.)

* ⟦The letters B, A, P, U, V, E, and F refer to the axioms of extensionality, separation, pairing, power set, union, replacement, and foundation, respectively. In his *1930a* Zermelo calls the system of these axioms, collectively referred to as BAPUVEF, the "supplemented *ZF*-system", or "*ZF'*-system".⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

alle vorangehenden. Ist nämlich $\alpha = \beta + 1$ von erster Art, so enthält Q_α die Potenzmenge von Q_β, ist also mächtiger als Q_β (nach Cantor). Ist aber α Limeszahl und M eine "konfinale" Untermenge von P_α (die keinem kleineren Abschnitt angehört),[2] so kann man jedes ihrer Elemente durch ein beliebiges anderes aus derselben Schicht ersetzen und die entstehende Produktmenge, die in Q_α enthalten sein muß, ist nach König mächtiger als ihre Summe und jede von ihnen, sofern der Satz für alle vorausgehenden Schichten bereits zutrifft. Er ist also bewiesen durch Induktion.

2 | Das so entstehende Modell, das *unbegrenzt* fortgesetzt freilich einen "offenen" Bereich, keine "Menge" darstellen würde, während jeder seiner Abschnitte Mengencharakter besitzt, genügt nun, wie gezeigt werden soll, sämtlichen mengentheoretischen Axiomen in Bezug auf die eingeführte $\in$-Relation.

1) Das Axiom der "Bestimmtheit" B) ist erfüllt durch die Definition, da die Zuordnung von M und m ein-eindeutig ist.

2) Das Axiom der "Fundierung" F) ist erfüllt durch die Wohlordnung der Schichten, weil alle "Elemente" x einer "Menge" m immer vorangehenden Schichten Q_β angehören.

3) Das Axiom der "Paarung" P) gilt, weil irgend zwei Elemente stets einem Abschnittte P_α angehören, also einen Unterbereich dieses Abschnittes darstellen, dem spätestens in Q_α eine "Menge" entspricht.

4) Ist m eine Menge in Q_α und M der entsprechende Unterbereich von P_α, so entspricht auch jedem Unterbereich N von M eine "Menge" n spätestens in Q_α. Das "Aussonderungsaxiom" A) ist also in voller Allgemeinheit und ohne "Definitheits"-Beschränkung erfüllt.

5) Ist wieder m eine Menge aus Q_α, so liegen ihre Untermengen n sicher in $P_{\alpha+1}$, also ihre "Potenzmenge" Um in $Q_{\alpha+1}$. Ferner liegen die Elemente ihrer Elemente alle in P_α, also ihre "Vereinigungsmenge" Vm sicher in $P_{\alpha+1}$, nämlich entweder in Q_α oder in der unmittelbar vorangehenden Schicht. Mithin sind auch die Axiome U) und V) erfüllt.

6) Es sei wieder m eine Menge aus Q_α, deren Elemente in P_α ersetzt werden sollen durch andere x', die sämtlich einem und demselben Abschnitte P_β angehören. Dann erscheint die "ersetzende" Menge m' spätestens in Q_β, und das Axiom E) ist gleichfalls erfüllt. Die Voraussetzung, daß die ersetzenden Elemente einem *Abschnitte* der Entwickelung angehören müssen, ist dabei natürlich wesentlich, aber keine eigentliche Beschränkung.

3 | 7) Das "Axiom des Unendlichen" wird bereits im ersten transfiniten Abschnitte P_ω erfüllt.

8) Das "Auswahlaxiom" soll hier als allgemeines logisches Prinzip, etwa in der Form des Hilbertschen "Aristides", allen unseren Deduktionen zu grunde

[2] ⟦The text in brackets is underlined by pencil with a question mark on the margin.⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

The cardinality of each layer is higher than that of any of its predecessors. For if $\alpha = \beta + 1$ is of the first kind, then Q_α contains the power set of Q_β, and hence is of a higher cardinality than Q_β (according to Cantor). If, however, α is a limit number and M a "cofinal" subset of P_α (belonging to no smaller segment), then we can replace each of its elements by an arbitrary different one from the same layer, and the resulting product set, which must be contained in Q_α, is, according to König, of a higher cardinality than both its sum and each of them, provided that the theorem already holds true for all preceding layers. It is therefore proved by induction.

The model so obtained, which, if it were continued *indefinitely*, would of course constitute an "open" domain, not a "set", while each of its segments possesses the character of sets, satisfies all set-theoretic axioms with respect to the introduced $\in$-relation, as shall be shown now.

1) The axiom of "definiteness" B) is satisfied by the definition since the correlation of M and m is one-to-one.

2) The axiom of "foundation" F) is satisfied by the well-ordering of the layers since all "elements" x of a "set" m always belong to preceding layers Q_β.

3) The axiom of "pairing" P) is valid since any two elements always belong to some segment P_α, and hence constitute a subdomain of this segment to which there corresponds a "set" no later than in Q_α.

4) If m is a set in Q_α and M the corresponding subdomain of P_α, then to each subdomain N of M there also corresponds a "set" n in no later layer than in Q_α. The "separation axiom" A) is therefore satisfied in full generality and without a "*definiteness*" restriction.

5) If m is again a set from Q_α, then its subsets n certainly lie in $P_{\alpha+1}$, and hence its "power set" Um in $Q_{\alpha+1}$. Furthermore, all elements of its elements lie in P_α, and hence its "union set" Vm certainly in $P_{\alpha+1}$, namely either in Q_α or in the immediately preceding layer. Thus, the axioms U) and V) are satisfied as well.

6) Again, let m be a set from Q_α whose elements are replaced in P_α by other x' all of which belong to one and the same segment P_β. The "replacing" set m' then appears in no later layer than in Q_β, and the axiom E) is satisfied as well. Of course, the assumption that the replacing elements belong to a *segment* of the development, while being essential here, constitutes no real restriction.

7) The "axiom of the infinite" is already satisfied in the first transfinite segment P_ω.

8) The "axiom of choice" shall underlie all our deductions as a general logical principle, e.g., in the form of Hilbert's "Aristides". Then, along with the

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

gelegt werden. Dann gilt also mit den übrigen Axiomen auch der Wohlordnungssatz und jede hier vorkommende "Menge" wie auch jeder "geschlossene" Bereich kann ohne Weiteres als *wohlgeordnet* angenommen werden.

Bezeichnen wir mit $f(\alpha)$ die Mächtigkeit des Abschnittes P_α oder genauer die Anfangszahl der entsprechenden Zahlenklasse, so erhalten wir eine "Normalfunktion" im Sinne von *Veblen* und *Hausdorff*. Nach unserer Konstruktion ist nämlich

$$f(\alpha + 1) > f(\alpha),$$

weil der Abschnitt $P_{\alpha+1}$ alle Untermengen von P_α enthält. Außerdem ist stets $f(\alpha) = \lim f(x)$ für $x < \alpha$, wenn α eine Limeszahl ist, da ja P_α als Summe aller kleineren P_x erklärt ist. Dann ist die Funktion auch "eigentlich *monoton*"; ihr Anfangswert ist $f(1) = \kappa$ ⟦und⟧ ist die Mächtigkeit der Basis Q. Wie jede Normalfunktion besitzt auch diese "Eigenwerte" d. h. "kritische Zahlen" von der Eigenschaft $\lambda = f(\lambda)$, während sonst immer $\alpha < f(\alpha)$ ist.

Nun stellen wir die Frage: Wie muß ein *Abschnitt* P_τ unserer Entwickelung beschaffen sein, damit *in ihm* alle "konstituierenden" Axiome BAPUVEF der Mengenlehre erfüllt sind?

Hier ergibt sich zunächst: Die Axiome BFPAV sind in *jedem* Abschnitte von selbst erfüllt, das Axiom U) wenigstens in jedem Abschnitte mit *Limes*-Index. Dagegen erfordert das "*Ersetzungs-Axiom*" eine nähere Untersuchung. Ihm zufolge müßten alle Elemente x', die den Elementen x einer Menge m aus P_τ zugeordnet sind, sofern sie selbst diesem Abschnitte sämtlich angehören, wieder die Elemente einer Menge m' in P_τ bilden, also einem *kleineren* Abschnitte angehören, nämlich P_β, wenn m' in der Schicht Q_β liegen soll.

4 | Hieraus folgt zunächst, daß keine wohlgeordnete Menge m in P_τ einen Ordnungstypus $m \geq \tau$ haben kann. Denn sonst ließe sich ein Abschnitt m_1 von m ähnlich abbilden auf die wohlgeordnete Folge der Elemente q_α, wo jedes q_α ein bevorzugtes Element der Schicht Q_α sein soll für alle $\alpha < \tau$, und dieser Folge könnte innerhalb P_τ keine Menge m_1' entsprechen. Es sind also in P_τ immer nur Mengen kleinerer Ordnungszahl und kleinerer Mächtigkeit vertreten als τ. Insbesondere gilt dies auch von jeder Menge p_α in P_τ, welche alle Elemente des Abschnittes P_α enthält und, wie wir sahen, die Mächtigkeit $f(\alpha)$ besitzt. Mithin ist mit $\alpha < \tau$ auch stets $f(\alpha) < \tau$ und durch unsere Funktion wird der zu τ gehörige Abschnitt Z_τ der Zahlenreihe auf sich selbst abgebildet, und $\tau = f(\tau)$ ist "Eigenwert" der Funktion. Es ist aber kein innerhalb des Abschnittes selbst konstruierbarer Eigenwert, sondern eine "Kernzahl", eine "reguläre Anfangszahl", und zwar eine solche "zweiter Art", eine "exorbitante" Zahl. Wäre nämlich τ einer kleineren $\rho < \tau$ konfinal, so gäbe es im Abschnitte P_τ eine Menge m von der gleichen Mächtigkeit wie ρ und ihren Elementen ein-eindeutig entsprechend eine Folge von Elementen q_α aus Q_α, die keinem kleineren Abschnitte P_β angehören, also auch keine Menge m' innerhalb P_τ bestimmen könnte. Wäre aber τ eine Anfangszahl erster Art und $\sigma < \tau$ die unmittelbar vorangehende Anfangszahl, so enthielte P_τ eine Menge m von der Mächtigkeit σ, deren Potenzmenge Um wegen

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

other axioms, the theorem of well-ordering holds as well, and we can assume without any further ado that every "set" occurring here is *well-ordered*, and every "closed" domain as well.

If we use $f(\alpha)$ to refer to the cardinality of the segment P_α or, more precisely, the initial number of the corresponding number class, then we obtain a "normal function" in the sense of *Veblen* and *Hausdorff*. For according to our construction

$$f(\alpha + 1) > f(\alpha),$$

since the segment $P_{\alpha+1}$ contains all subsets of P_α. Furthermore, we always have $f(\alpha) = \lim f(x)$ for $x < \alpha$, assuming that α is a limit number, since P_α has been defined as the sum of all smaller P_x after all. Then the function is also "strictly *monotonous*"; its initial value is $f(1) = \kappa$ ⟦and⟧ the cardinality of the basis Q. This normal function, like any other, also has "eigenvalues", that is, "critical numbers" with the property $\lambda = f(\lambda)$, whereas in any other case we always have $\alpha < f(\alpha)$.

We now ask the question: How must a *segment* P_τ of our development be constituted so that all "constitutive" axioms BAPUVEF of set theory are satisfied *in it*?

At first, we have the following: The axioms BFPAV are automatically satisfied in *every* segment, and the axiom U) at least in every segment with *limit*-index. The "replacement axiom", on the other hand, requires closer investigation. According to it, all elements x' correlated with the elements x of a set m from P_τ would again have to form the elements of a set m' in P_τ, provided that they themselves all belong to this segment. In other words, they would have to belong to a *smaller* segment, namely P_β, if m' were to lie in the layer Q_β.

From this, at first, it follows that no well-ordered set m in P_τ can have an order type $m \geq \tau$. For, otherwise, there would be a similarity mapping of a segment m_1 of m onto the well-ordered sequence of elements q_α, where each q_α is supposed to be a designated element of the layer Q_α for all $\alpha < \tau$, and this sequence could have no set m'_1 within P_τ corresponding to it. So the sets represented in P_τ are always only sets of smaller ordinal number and smaller cardinality than τ. In particular, this also holds true for every set p_α in P_τ, which contains all elements of the segment P_α and has, as we have seen, the cardinality $f(\alpha)$. Thus we always have $f(\alpha) < \tau$, if $\alpha < \tau$, and the segment Z_τ of the number series belonging to τ is mapped onto itself by virtue of our function, and $\tau = f(\tau)$ is an "eigenvalue" of the function. But it is not an eigenvalue that can be constructed within the segment itself. Rather, it is a "core number", or "regular initial number", and in particular one of the "second kind", an "exorbitant" number. For if τ were cofinal with a smaller $\rho < \tau$, then, in the segment P_τ, there would exist a set m of the same cardinality as ρ, and, corresponding to its elements one-to-one, a sequence of elements q_α from Q_α, which belong to no smaller segment P_β, and hence could determine no set m' within P_τ. But if τ were an initial number of the first kind and $\sigma < \tau$ the immediately preceding initial number, then P_τ would contain a set m of

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

ihrer Mächtigkeit $\geq \tau$ nicht mehr im Abschnitte P_τ enthalten wäre. Diese beiden Eigenschaften der “Grenzzahl” τ, gleichzeitig “Kernzahl” zu sein und “Eigenwert” der Funktion f, sind aber auch *hinreichend* für die Erfüllung des “Ersetzungsaxioms” in P_τ. Aus $\tau = f(\tau)$ folgt nämlich umgekehrt wieder, daß für jedes $\alpha < \tau$ auch $f(\alpha) < f(\tau) = \tau$ und daß daher jede in einer Schicht Q_α des Abschnittes P_τ enthaltene Menge m von kleinerer Mächtigkeit ist als τ. Ersetzt man nun die Elemente x_n einer solchen Menge m durch Elemente x'_n desselben Abschnittes P_τ, so liegen auch alle diese x'_n in einem kleineren Abschnitte P_β und bestimmen eine Menge m' in P_τ, weil sonst τ einer kleineren Zahl konfinal wäre gegen die Annahme.

5 | Über geschlossene und offene Bereiche

Ein “geschlossener” Bereich ist ein solcher, der durch ein *kategorisches Postulatsystem* bestimmt oder geordnet werden kann. Er ist genau das, was Cantor mit seiner bekannten Definition einer “Menge” eigentlich gemeint hat, und kann bei allen rein mathematischen Betrachtungen und Deduktionen überall und widerspruchsfrei als Menge behandelt werden. Jeder geschlossene Bereich kann wohlgeordnet werden und besitzt sowohl eine Mächtigkeit wie eine Ordinalzahl.

Ein “offener Bereich” ist eine *wohlgeordnete Folge successiv einander umschließender geschlossener Bereiche* von der Beschaffenheit, daß in ihm *jeder geschlossene Unterbereich noch erweitert werden kann.* Er kann also selbst gewiß kein “geschlossener” Bereich sein und durch kein *kategorisches* Postulatsystem geordnet werden. Dagegen ist jeder seiner *Abschnitte* geschlossen und wohlordnungsfähig, und auch der *ganze, offene Bereich* kann in der Weise *wohlgeordnet* werden, daß alle Elemente einer *vorangehenden Schicht* allen Elementen jeder folgenden vorangehen. Der offene Bereich hat *weder* eine Mächtigkeit *noch* eine Ordnungszahl.

Jeder *geschlossene* Bereich kann zu einem “Normalbereich” erweitert werden, er kann aber auch in einem passend gewählten Normalbereich als “Menge” erscheinen. Es gibt also *geschlossene* Bereiche, in denen die *klassische Mengenlehre* mit dem Axiomensystem BAPUVEF zur Darstellung kommt, darunter “finitistische” wie “infinitistische” Normalbereiche von beliebiger Charakteristik. Alle solchen Normalbereiche sind “geschlossene” Bereiche und gleichzeitig spezielle mengentheoretische “Modelle”, die sich wesentlich von einander unterscheiden und die Mengenlehre mehr oder weniger *unvollständig* darstellen. Die *ganze* Mengenlehre kann *vollständig* nur in einem *“offenen Modell”* dargestellt werden, und sie wird es in meinem auf “absolute” oder auf *“kanonische Entwickelung”* gegründeten “mengentheoretischen Modell”.

Die *unbegrenzte* Zahlenreihe ist ein *offener*, jeder ihrer *Abschnitte* ein *geschlossener* Bereich.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

cardinality σ whose power set Um, since its cardinality $\geq \tau$, would no longer be contained in the segment P_τ. But these two properties of the "boundary number" τ, to be both "core number" and "eigenvalue" of the function f, are also *sufficient* for the satisfaction of the "replacement axiom" in P_τ. For from $\tau = f(\tau)$ it again follows conversely that for each $\alpha < \tau$ we also have $f(\alpha) < f(\tau) = \tau$, and hence that every set m contained in some layer Q_α of the segment P_τ is of cardinality smaller than τ. If we now replace the elements x_n of such a set m by elements x'_n of the same segment P_τ, then all these x'_n also lie in a smaller segment P_β and determine a set m' in P_τ, since otherwise τ would be cofinal with a smaller number, contrary to the assumption.

On closed and open domains

A "closed" domain is one such which can be determined or ordered by means of a *categorical system of postulates*. It is precisely that which Cantor really meant by his well-known definition of "set", and it can be treated as a set everywhere and without contradiction in all purely mathematical considerations and deductions. Every closed domain can be well-ordered and possesses both a cardinality and an ordinal number.

An "open domain" is a *well-ordered sequence of domains successively comprising one another* constituted so that *every closed subdomain can always still be extended* in it. Therefore, it certainly cannot be a "closed" domain, and it cannot be ordered by means of a *categorical* system of postulates. Each of its *segments*, on the other hand, is closed and capable of being well-ordered. Furthermore, the *entire open domain* can be *well-ordered* so that all elements of a *preceding layer* precede all elements of every subsequent one. The open domain has *neither* a cardinality *nor* an ordinal number.

Every *closed* domain can be extended to a "normal domain", but it can also occur as "set" in a suitably chosen normal domain. So there exist *closed* domains, among them "finitistic" and "infinitistic" normal domains of arbitrary characteristic, in which *classical set theory* with the axiom system BAPUVEF finds its representation. All such normal domains are "closed" domains and, at the same time, special set-theoretic "models" that differ essentially from one another and represent set theory more or less *incompletely*. Set theory *in its entirety* can be *completely* represented only in an "*open model*", and so it is in my "set-theoretic model" based on "absolute" or "*canonical development*".

The *unlimited* number series is an *open* domain, and each of its *segments* is a *closed* domain.