DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Introductory note to s1931e and s1933b

Akihiro Kanamori

In this series of short notes found in the *Nachlass*, Zermelo articulates his late views on and approach to the ordinal numbers. These views encompass the boundary numbers of *1930a* and are related to his project of making evident the consistency of set theory "by means of the systematic construction of a 'set-theoretic model' using 'the unlimited number series'", as stated at the end of his *s1930d*. Like his *s1930e* "On the set-theoretic model", the notes here are carefully typed. On the other hand, they are disparate sketches with redundancies and different emphases.[1] Although Zermelo had sketched the rudiments of the von Neumann ordinals perhaps as early as 1913[2] and had applied this specific representation of the Cantorian ordinal numbers in his *1930a*, he does not appeal to this reduction but pursues the ordinal numbers *ab initio* as autonomous concept.

Note 1 establishes the existence of exorbitant numbers based on the existence of normal domains satisfying ZF. The exorbitant numbers are the uncountable, regular limit cardinal numbers, now also called the weakly inaccessible cardinals. The term "exorbitant" derives from *Hausdorff 1914*, 131, where these cardinals were first considered and so regarded. As for normal domains, these are the models of set theory described in *1930a*. The argument is based on uncountable boundary numbers, now called the (strongly) inaccessible cardinals, being exorbitant numbers. The least boundary number of a normal domain satisfying ZF is uncountable, as the axiom of infinity is included in ZF; the domain is "categorically determined" by minimality and hence a set (cf. *1930a*); and consequently, its cardinality is an exorbitant number, being the boundary number. Zermelo here is focusing on exorbitant numbers, which he gets as boundary numbers, and he is well aware of the difference. He notably points that "t[T]here is something to be said" for the hypothesis that the cardinality of the continuum is an exorbitant number—a hypothesis antithetical to Hausdorff's original description as "exorbitant".

[1] See *Ebbinghaus 2006* for historical details.
[2] See *Ebbinghaus 2007b*, 133.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Note 2 discusses a property of the ultrafinite number series. The term is distinctive and refers to Zermelo's extension of the ordinal numbers as in *1930a*. As he begins:

> The "ultrafinite number series" is characterized by the fact that every "set", that is, every *categorically defined domain* of numbers, is always succeeded by yet other ones. The "transfinite" number series already ends with the "boundary number" of the "Cantor domain".

However, in succeeding notes "ultrafinite" is not used again; there is "unlimited", a reversion to "transfinite", and also, "open". The property discussed in the note involves cofinality, but is not separately distinctive nor further pursued.

Note 3 is an incisive, axiomatic presentation of the ordinal numbers as sets, much as one would see nowadays with the von Neumann ordinals. Proceeding in terms of "Z-segments" and "Z-elements" Zermelo however does not actually specify extensionally what these sets are. He could have worked with the representative basic sequences of *1930a* built from an urelement, but maintains a certain abstraction. The totality of all Z-elements is not a set but an open domain (cf. *s1930e*).

Note 4 specifies, for "an (open) domain Z" as in the previous note, the "fundamental relation" $a < b$. This specification is in the spirit of that of the membership relation $x \in y$ in *s1930e*, Zermelo's closest approach in set theory to making a distinction between a semantic context and a syntactic counterpart.

Note 5 takes a synthetic approach to the boundary numbers. The domain of all ordinal numbers is confronted by the Burali-Forti paradox, and so "we must proceed *differently* in order to get 'set domains' that we can use." To this end the replacement axiom serves, together with closure under power sets, to get boundary numbers. Zermelo thus approaches boundary numbers axiomatically without appeal to the normal domains of *1930a*.

Note 6 motivates having arbitrarily large boundary numbers, again in terms of replacement and categorical determination. Note 7 is similar, but proceeds more locally in terms of an axiomatization of boundary numbers.

The fragment *s1933b* seems to be a final, succinct statement about the ordinal numbers, one that puts together several features of the *s1931e* notes.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Sieben Noten über Ordinalzahlen und große Kardinalzahlen *

s1931e

Note 1: Beweis für die Existenz der exorbitanten Zahlen

Angenommen, es gäbe keine "regulären Anfangszahlen zweiter Art", aber es gäbe eine (widerspruchsfreie) Mengenlehre, welche die ZF'-Axiome erfüllt, es gäbe also "Normalbereiche" N auf einer gegebenen "Basis" Q. Dann kann kein Teilbereich N' von N, welcher Q enthält, ebenfalls ein Normalbereich sein, weil er dann ein "kanonischer Abschnitt" in der Entwickelung von N wäre und eine Grenzzahl $\pi > \omega$ zur "Charakteristik" hätte. Der Bereich N enthielte also Mengen N' von "Grenzzahl-Mächtigkeit" — gegen unsere Annahme. Also bestimmt unser Axiomensystem zusammen mit der Basis Q *kategorisch* den Bereich N, dieser wäre ein *geschlossener Bereich*, d. h. eine *Menge*, und der Ordnungstypus der "Entwickelung" von N wäre selbst eine "Grenzzahl" und mithin auch eine "exorbitante Zahl".

Noch einfacher geht der Beweis folgendermaßen: Es sei N ein beliebiger Normalbereich und u ein Element seiner Basis. Dann enthält N als Unterbereich einen "Einheitsbereich" E mit u als Basis, der dann wieder, sofern er keine Abschnitte von "exorbitantem" Index besitzt, eindeutig und kategorisch bestimmt, also eine *Menge* ist, deren Mächtigkeit als Charakteristik eines Normalbereiches notwendig *exorbitant* ist.

Die *kleinste exorbitante Zahl* braucht *nicht* notwendig eine Grenzzahl zu sein; sie könnte sogar schon *unter* der Mächtigkeit des *Kontinuums* liegen oder gerade *selbst* von dieser Mächtigkeit sein, eine Hypothese, die manches für sich zu haben scheint. Hierüber ließe sich vielleicht noch einiges feststellen — nachdem ein mal die Existenz exorbitanter Zahlen überhaupt gesichert ist.

Note 2: Eine Eigenschaft der ultrafiniten Zahlenreihe

Die "ultrafinite Zahlenreihe" ist dadurch ausgezeichnet, daß auf jede "Menge" d. h. auf jeden *kategorisch definierten Bereich* von Zahlen immer noch weitere folgen. Die *"transfinite"* Zahlenreihe endet bereits mit der "Grenzzahl" des "Cantorschen Bereiches". Sie ist dadurch charakterisiert, daß 1) auf jede Zahl noch eine solche von der Mächtigkeit ihrer Potenzmenge folgt, und daß 2) jeder Abschnitt, der einem kleineren konfinal ist, noch fortsetzbar ist.

Ein *"Zahlenabschnitt"* d. h. ein Abschnitt der Zahlenreihe heiße *"abgeschlossen"*, wenn er ein letztes Element enthält, also von "erster Art" ist, sonst heißt er *"offen"*.

---

* ⟦The notes are written on separate pages and unnumbered.⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Seven notes on ordinal numbers and large cardinals

s1931e

Note 1: Proof of the existence of exorbitant numbers

Suppose that "regular initial numbers of the second kind" did not exist, but that there existed a (consistent) set theory satisfying the ZF'-axioms, and hence that there existed "normal domains" N on a given "basis" Q. Then no partial domain N' of N containing Q can also be a normal domain, since otherwise it would then be a "canonical segment" in the development of N and would have a boundary number $\pi > \omega$ as its "characteristic". Hence, the domain N would contain sets N' of "boundary-number-cardinality"—contrary to our assumption. Together with the basis Q, our axiom system therefore *categorically* determines the domain N, which would be a *closed* domain, that is, a *set*, and the order type of the "development" of N would itself be a "boundary number", and hence also an "exorbitant number".

An even simpler proof runs as follows: Let N be an arbitrary normal domain and u an element of its basis. Then N contains as subdomain a "unit domain" E with u as basis, which then, provided it has no segments of "exorbitant" index, is again uniquely and categorically determined, that is, it is a *set* whose cardinality must be *exorbitant* because it is the characteristic of a normal domain.

The *smallest exorbitant number* need *not* necessarily be a boundary number; it could even already lie *below* the cardinality of the *continuum*, or it could *itself* be of this cardinality. There is something to be said for this hypothesis, or so it seems. A thing or two could be stated about this matter—after the existence of an exorbitant number has been ascertained in the first place.

Note 2: A property of the ultrafinite number series

The "ultrafinite number series" is characterized by the fact that every "set", that is, every *categorically defined domain* of numbers, is always succeeded by yet other ones. The "*transfinite*" number series already ends with the "boundary number" of the "Cantor domain". It is characterized by the fact that 1) every number is succeeded by one with the cardinality of its power set, and that 2) every segment cofinal with a smaller one is still capable of being continued.

A "*number segment*", that is a segment of the number series, is said to be "*closed*" if it contains a last element, and hence is of the "first kind". Otherwise, it is said to be "*open*".

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Eine Teilmenge M eines Zahlenabschnittes A heiße *"konvergent"*, wenn sie einem kleineren Abschnitte, einem *echten* Abschnitte B von A angehört; im anderen Falle heißt sie *"divergent"*. Eine Teilmenge M von A heiße *"abgeschlossen"*, wenn sie mit jeder in A konvergenten Teilfolge M' von M auch deren Limeszahl enthält. Sie braucht aber, wenn A selbst "offen" ist, selbst kein letztes Element zu besitzen, da sie dann selbst in A divergieren kann. Eine *divergente abgeschlossene* Teilmenge M *ohne letztes Element* kann keinem *echten* Abschnitte A' von A ähnlich sein, weil sie dann auch das Limes-Element enthielte, das diesem Abschnitte entspräche, und damit wieder doch ein letztes Element hätte. Eine solche Teilfolge ist also dem *ganzen* Abschnitte A ähnlich, und diese Abbildung ist nichts anderes als eine *"Normalfunktion"* $g(x)$, welche der ursprünglichen Funktion $f(x) = x'$ zugeordnet ist, die jedes Element von M auf das nächstfolgende abbildet. Jede "Normalfunktion" besitzt aber *"Eigenwerte"* oder "Fixzahlen", die dann selbst wieder eine divergente Teilfolge M' bilden und eine neue Normalfunktion bestimmen, u. s. f. ins Unbegrenzte.

Ein Zahlenabschnitt heiße *"reduzibel"*, wenn er eine divergente Teilfolge von kleinerem Ordnungstyp enthält, oder m. a. W. wenn ein kleinerer Ab-
2 schnitt einer divergenten Teilfolge ähnlich ist. Im anderen | Falle heißt der
Abschnitt *"irreduzibel"* oder ein *"Kern-Abschnitt"*. Ein Abschnitt ist "reduzibel" oder "irreduzibel", je nachdem seine Ordnungszahl einer kleineren *"konfinal"* ist oder nicht; zu den irreduziblen Abschnitten gehören *"Kernzahlen"* oder *"reguläre Anfangszahlen"* als Ordnungstypen. Alle *"Anfangszahlen erster Art"* sind bekanntlich *"regulär"*; dagegen war es bisher noch zweifelhaft, ob es außer der ersten transfiniten Zahl ω noch weitere "Anfangszahlen zweiter Art", oder *"exorbitante Zahlen"* gibt.

Note 3: Konstruktion der Zahlenreihe Z

Gegeben sei ein System von "Z-Abschnitten" von folgender Beschaffenheit:

1) Jeder "Z-Abschnitt" ist eine *wohlgeordnete Menge*.
2) Von je zwei "Z-Abschnitten" ist immer der eine ein *Abschnitt* des anderen.
3) Jeder "Menge" von "Z-Abschnitten" entspricht ein "Z-Abschnitt", der sie alle als Abschnitte enthält.
4) Jeder Abschnitt eines "Z-Abschnittes" ist selbst ein "Z-Abschnitt".

Hieraus folgt nun, wie leicht zu sehen:

5) Jedem Z-Abschnitt A entspricht ein und nur ein weiterer A', der genau *ein* Element mehr enthält, das auf A "unmittelbar folgende" Element a.
6) Jeder Menge T von Z-Abschnitten entspricht als weiterer Z-Abschnitt seine "Vereinigung" ST, der alle Elemente von T zu Abschnitten hat, der auf T "unmittelbar folgende" Z-Abschnitt.

A partial set M of a number segment A is said to be "convergent" if it belongs to a smaller segment, a *proper* segment B of A; otherwise, it said to be "divergent". A partial set M of A is said to be "closed" if along with every partial sequence M' of M convergent in A it also contains its limit number. However, if A itself is "open", it does not need to contain a last element itself since it then can itself diverge in A. A *divergent closed* partial set M *lacking a last element* cannot be similar to any *proper* segment A' of A, since otherwise it would also contain the limit element corresponding to this segment, and hence it would possess a last element after all. Such a partial sequence is therefore similar to the *entire* segment A, and this mapping is but a "*normal function*" $g(x)$ assigned to the original function $f(x) = x'$, which maps each element of M onto its immediate successor. But every "normal function" possesses "*eigenvalues*" or "fixed numbers", which themselves again form a divergent partial sequence M' and determine a new normal function, and so on indefinitely.

A number segment is said to be "*reducible*" if it contains a divergent partial sequence of smaller order type, or, in other words, if a smaller segment is similar to a divergent partial sequence. Otherwise, the segment is said to be "*irreducible*" or a "*core segment*". A segment is "reducible" or "irreducible", depending on whether or not its ordinal number is "*cofinal*" with a smaller one; to the irreducible segments there belong as order types "*core numbers*", or "*regular initial numbers*". All "*initial numbers of the first kind*" are "*regular*", as is well-known; up to now it has, however, been uncertain whether there exist, besides the first transfinite number ω, further "initial numbers of the second kind", or "*exorbitant numbers*".

Note 3: Construction of the number series Z

Suppose a system of "Z-segments" is constituted as follows:

1) Every "Z-segment" is a *well-ordered set*.
2) Of any two "Z-segments" one is always a *segment* of the other.
3) To every "set" of "Z-segments" there corresponds a "Z-segment" containing them all as segments.
4) Every segment of a "Z-segment" is itself a "Z-segment".

From this, as can be seen easily, it nows follows that:

5) To every Z-segment A there corresponds one and only one further A' containing exactly *one* more element, the element a "immediately succeeding" A.
6) To every set T of Z-segments there corresponds as a further Z-segment its "union" ST which has all elements of T as segments, the Z-segment "immediately succeeding" T.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

7) Jede *Menge* M von Elementen aus Z-Abschnitten ist *wohlgeordnet*. Denn ihr entspricht die Menge T der Z-Abschnitte, denen sie angehören, und M ist dann Untermenge von ST.
8) Die Gesamtheit *aller* Z-Elemente (d. h. *aller* Ordnungszahlen) ist gewiß *keine Menge*, da *jeder* Z-Menge M nach 7) ein sie alle enthaltender Z-Abschnitt A entspricht und nach 5) ein auf sie alle "folgendes" Element a.
9) Dieser *"offene Bereich"* aller Z-Elemente ist gleichwohl *"wohlgeordnet"* in dem Sinne, daß jeder Teilbereich Z_1 von Z ein *erstes* Element besitzt, nämlich das erste Element a_1 unter allen denen, die einem gegebenen a vorangehen und die als Abschnitt eines Z-Abschnittes selbst eine Menge bilden.
10) In diesem "offenen Bereiche" sind "Quantifikationen", d. h. "universale" und "partikulare" Aussagen sinnvoll, sofern sie auf Quantifikationen in *"geschlossenen"* Teilbereichen, d. h. in "Mengen" zurückgeführt werden können.

Note 4: Axiomatik der Ordinalzahlen in der unbegrenzten Zahlenreihe

In einem (offenen) Bereiche Z von Elementen $a, b, c, \ldots$ gelten für die "Grundrelation" $a < b$ die Postulate:

1) Jedes Element a außer e bestimmt als "Abschnitt" ein-eindeutig eine "Menge" d. h. einen "geschlossenen" Unterbereich A, welcher alle Elemente $x < a$ umfaßt und a selbst nicht enthält.
2) Jede Menge T von Abschnitten enthält einen "kleinsten" Abschnitt d. h. einen solchen, der in allen übrigen als (echter) Teil enthalten ist. Insbesondere gilt dies auch von je zwei Elementen a, b und es ist immer $a < b$, wenn A der "kleinere" Abschnitt ist. Das "Anfangselement" e, das keinen Abschnitt bestimmt, geht allen übrigen voran⟦:⟧ $e < a$.
3) Jede Menge T von Abschnitten erzeugt durch "Vereinigung" wieder einen Abschnitt ST, der alle diese Abschnitte als Teile enthält, mithin auch ein zugehöriges Element s, dem alle Elemente $a < s$ "vorangehen".

Aus 1) und 2) folgt bereits, daß die Relation $a < b$ eine *Wohlordnung* darstellt: denn unter beliebig vielen Abschnitten ist immer einer der "kleinste", und diese Eigenschaft überträgt sich dann auf die zugehörigen "bestimmenden" Elemente. Daß alle diese Abschnitte A selbst eine "Menge" bilden, braucht dabei nicht vorausgesetzt zu werden; denn diese Bedingung ist wegen 1) erfüllt für alle $b < a$, die einem gegebenen a vorangehen, und das kleinste Element unter diesen ist wegen der "Transitivität" unserer Relation zugleich das kleinste unter allen des Teilbereiches T.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

7) Every *set* M of elements from Z-segments is *well-ordered*. For to it there corresponds the set T of the Z-segments to which they belong, and M then is a subset of ST.
8) The totality of *all* Z-elements (that is, *all* ordinal numbers) is certainly *no set*, since to *each* Z-set M there corresponds, according to 7), a Z-segment A containing them all and an element a "succeeding" them all, according to 5).
9) This "*open domain*" of all Z-elements is nevertheless "*well-ordered*" in the sense that every partial domain Z_1 of Z possesses a *first* element, namely the first element a_1 among all those preceding a given a which themselves, as a segment of a Z-segment, form a set.
10) In this "open domain", "quantifications", that is, "universal " and "particular" assertions, are meaningful, provided they can be reduced to quantifications in "*closed*" partial domains, that is, in "sets".

Note 4: Axiomatics of the ordinal numbers in the unlimited number series

In an (open) domain Z of elements $a, b, c, \ldots$, the "fundamental relation" $a < b$ is subject to the postulates:

1) Every element a, besides e, determines one-to-one as a "segment" a "set", that is, a "closed" subdomain A that comprises all elements $x < a$ and that does not contain a itself.
2) Every set T of segments contains a "smallest" segment, that is, one contained as (proper) part in all others. In particular, this holds true also for any two elements a, b, and we always have $a < b$, if A is the "smaller" segment. The "initial element" e, which does not determine any segments, precedes all others⟦:⟧ $e < a$.
3) Every set T of segments in turn generates a segment ST by means of "union", which contains as parts all these segments, and hence also a corresponding element s "preceded" by all elements $a < s$.

From 1) and 2) it already follows that the relation $a < b$ constitutes a *well-ordering*: for among an arbitrary number of segments there is always a "smallest" one, and this property is then passed on to the corresponding "determining" elements. We need not assume here that all these segments A themselves form a "set"; for this condition is satisfied, on account of 1), for all $b < a$ which precede a given a, and the smallest element among these is also the smallest among all those of the partial domain T because of the "transitivity" of our relation.

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7   Date 1.12.2009   Proof Number 3

Aus 3) folgt weiter, daß jeder Abschnitt A sowie jede “Summe” S von Abschnitten, die einer *“Menge”* entspricht, noch *“fortsetzbar”* ist, der *ganze* Bereich Z, d. h. die *unbegrenzte Zahlenreihe* gewiß *keine Menge* sein kann. Sie ist vielmehr der Prototyp eines *“offenen Bereiches”*.

Note 5: Über die transfinite Zahlenreihe und die Antinomie der Ordnungszahlen

Ein *“Bereich”* von Ordnungszahlen muß folgende Eigenschaften haben:

I) Er muß *wohlgeordnet* sein, d. h. jeder Unterbereich M von B muß ein *erstes* Element haben.
II) Er muß *fortsetzbar* sein, also etwa
   a) Jedem Element a folgt ein weiteres $a + 1$, *nächstfolgendes*,
   b) auf jede *“Menge”* von Ordnungszahlen folgt eine weitere: $\lim a_n = b$.

Wollte man nun, um den Bereich *aller* Ordnungszahlen zu erhalten, die Bedingung IIb) so auffassen, daß auf jeden *Unterbereich* noch weitere Zahlen folgen sollen, so gälte dies auch von B selbst, und es käme ein *Widerspruch*. Wir müssen also *anders* verfahren, um zu brauchbaren “Mengenbereichen” zu kommen. Hierzu dient am besten das *“Ersetzungsprinzip”*. Als *“Menge”* soll jeder solche Unterbereich M von B gelten, der einem *echten Abschnitte* von B *äquivalent* ist. Nur auf *solche* Unterbereiche brauchen weitere Elemente zu folgen, also auch nicht mehr auf B selbst, sofern der Ordnungstypus von B eine *“Anfangszahl”* ist. Es darf aber auch keine Anfangszahl sein, die einer kleineren *konfinal* ist, sondern es muß eine *“reguläre Anfangszahl”*, eine *“Kernzahl”* sein. Dieser Bedingung genügte jede “Anfangszahl *erster Art”*, die eine unmittelbar vorangehende hat. Solche werden aber *ausgeschlossen* durch die weitere Bedingung

III) Jedem (echten) Abschnitte von B entspricht ein solcher von größerer *Mächtigkeit*, er enthält keine Ordnungszahl von *größter Mächtigkeit*:
   a) mit jeder Zahlenklasse enthält er auch die *nächstfolgende*,
   b) mit jedem Abschnitt enthält der Bereich auch einen von der Mächtigkeit seiner *Potenzmenge*.

Aus III a) folgt unmittelbar, daß der O-Typus von B eine *Kernzahl zweiter Art*, eine *“exorbitante Zahl”* sein muß, aus III b) aber weiter, daß er außerdem eine *Fixzahl der Normalfunktion* $g(x)$, also eine *“Grenzzahl”* sein muß.

From 3), furthermore, it follows that each segment A as well as each "sum" S of segments corresponding to a "*set*" is still "*capable of being continued*", ⟦that⟧ the *entire* domain Z, that is, the *unlimited number series*, can certainly be *no set*. Rather, it is the prototype of an "*open domain*".

Note 5: On the transfinite number series and the antinomy of the ordinal numbers

A "*domain*" of ordinal numbers must have the following properties:

I) It must be *well-ordered*, that is, each subdomain M of B must have a *first* element.
II) It must be *capable of being continued*, that is, e.g.,
   a) Each element a is *immediately succeeded* by a further $a + 1$,
   b) each "*set*" of ordinal numbers is succeeded by a further one: $\lim a_n = b$.

If now, in order to obtain the domain of *all* ordinal numbers, we were to understand the condition IIb) so that each *subdomain* is supposed to be succeeded by still further numbers, then this would hold true also for B itself, and we would have a *contradiction*. Thus, we must proceed *differently* in order to get "set domains" that we can use. For this purpose the "*principle of replacement*" serves us best. Every subdomain M of B *equivalent* to a *proper segment* of B shall be considered a "*set*". It is only *such* subdomains that need to be succeeded by further elements, and hence no further elements need to succeed B itself any longer, provided that the order type of B is an "*initial number*". On the other hand, it must not be an initial number that is *cofinal* with a smaller one either. Instead, it must be a "*regular initial number*", a "*core number*". This condition is satisfied by every "initial number *of the first kind*" that is immediately preceded by such a number. Those, however, are *excluded* by the further condition

III) To each (proper) segment of B there corresponds one such with *greater cardinality*, it does not contain an ordinal number with the *greatest cardinality*:
   a) along with every number class it also contains its *immediate successor*,
   b) along with every segment the domain also contains one with the cardinality of its *power set*.

From III a) it immediately follows that the o⟦rder⟧ type of B must be a *core number of the second kind*, an "*exorbitant number*", but from III b), furthermore, that it also must be a *fixed number of the normal function* $g(x)$, and hence a "*boundary number*".

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Note 6: Die Grundeigenschaft der offenen Zahlenreihe

Ersetzt man jedes Element eines echten *Abschnittes* der Zahlenreihe durch ein anderes, so gehören alle diese Zahlen x' wieder einem *Abschnitte* der Zahlenreihe an, d. h. auf ihre Gesamtheit folgen immer noch weitere Zahlen. Nehmen wir insbesondere eine solche Ersetzung an, daß der kleineren Zahl $x < y$ auch immer die kleinere $x' < y'$ entspricht, so haben wir eine *ähnliche Abbildung* auf einen *Teil* eines *größeren Abschnittes*. Also:

Jeder *Teil* der Zahlenreihe, der einem *Abschnitte* (oder einem Teil eines solchen) *ähnlich* ist, gehört immer selbst (als Teil) einem (echten) *Abschnitte* an. Oder: jede Limeszahl ist *konfinal* einer *größeren*, während umgekehrt bekanntlich *nicht* jede Ordnungszahl einer *kleineren konfinal* zu sein braucht, z. B. die *"regulären Anfangszahlen erster Art"*, nämlich die Anfangszahlen aller Zahlenklassen vom Index $n + 1$, wie überhaupt alle *Kernzahlen*. Ist nun aber A ein Zahlenabschnitt von *Kernzahl-Typus*, also keinem kleineren konfinal, so gilt für *ihn* bereits die *gleiche Grundeigenschaft* wie für die *ganze* Zahlenreihe, aber auch *nur* für solche Abschnitte. Gäbe es keine Kernzahlen, so wäre ein unserer Bedingung genügender Zahlenabschnitt *kategorisch* bestimmt, es wäre eine *Menge* vom *Kernzahlypus*. Es muß also jedenfalls Kernzahlen geben, und zwar in *jedem Reste* der Zahlenreihe und *hinter* jeder gegebenen Kernzahl. Da aber jede Kernzahl zugleich eine *Anfangszahl* ist, so gibt es auch immer *höhere Zahlenklassen* d. h. höhere *Mächtigkeiten (Alefs)* zu jeder gegebenen. Gäbe es hinwieder nur *Kernzahlen erster Art*, so wäre ein Zahlenabschnitt von der genannten Eigenschaft, der *mit* jeder Anfangszahl die *nächstfolgende* enthielte, wieder *kategorisch bestimmt*, also eine *Menge*, und sein Ordnungstypus wäre eine *Kernzahl zweiter Art*; also gibt es auch *exorbitante Zahlen*. Soll außerdem der Abschnitt mit jeder Mächtigkeit auch die der *Potenzmenge* enthalten, so folgt ebenso die *Existenz der Grenzzahlen*.

Note 7: Die "Hauptabschnitte" der Zahlenreihe

Ein "Hauptabschnitt" H hat folgende Eigenschaften:

1) Jedem Abschnitte A von H entspricht ein anderer A' von der Mächtigkeit seiner Potenzmenge UA.
2) Jede Teilmenge M von H, die einem *echten Abschnitte* H_1 von H *äquivalent* ist, gehört selbst einem *echten Abschnitte* von H an.

Ein solcher Abschnitt ist z. B. der kleinste transfinite Abschnitt vom Typus ω, und im übrigen alle durch *"Grenzzahlen"* gebildeten Abschnitte. Gäbe es außer ω keine weiteren Grenzzahlen, so wäre außer Z_ω die *ganze* Zahlenreihe der *einzige* "Hauptabschnitt" und wäre durch unser Postulatsystem *kategorisch*

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

Note 6: The basic property of the open number series

If each element of a proper *segment* of the number series is replaced by another one, then all these numbers x' again belong to a *segment* of the number series, that is, its totality is always succeeded by still further numbers. In particular, if we assume a replacement such that to the smaller number $x < y$ there always also corresponds a smaller one $x' < y'$, then we have a *similar mapping* onto a part of a *greater segment*. Hence:

Every *part* of the number series *similar* to a *segment* (or a part of one such) always belongs itself (as a part) to a (proper) *segment*. Or: every limit number is *cofinal* with a *greater one*, whereas conversely, as is well-known, *not* every ordinal number needs to be *cofinal* with a *smaller one*, e.g., the "*regular initial numbers of the first kind*", namely the initial numbers of all number classes of index $n + 1$, and all *core numbers* in general. But now if A is a number segment of the *type of core numbers*, and hence cofinal with no smaller one, then the *same basic property* holding of the *entire* number series already holds of *it*, but *only* of such segments. If there were no core numbers, then a number segment satisfying our condition would be *categorically* determined, it would be a *set* of *the type of core numbers*. Hence, there have to be core numbers in any case, namely in *every remainder* of the number series and *after* every given core number. But since every core number is also an *initial number*, then there always are also *higher number classes*, that is, higher *cardinalities (alephs)* for each given one. If, on the other hand, there only existed *core numbers of the first kind*, then a number segment with the specified property containing *along with* each initial number its *immediate successor* would again be *categorically determined*, and hence a set, and its order type would be a *core number of the second kind*; so there are also *exorbitant numbers*. If, furthermore, the segment is to contain along with each cardinality also that of the *power set*, then the *existence of the boundary numbers* follows as well.

Note 7: The "principal segments" of the number series

A "principal segment" H has the following properties:

1) To every segment A of H there corresponds another A' with the cardinality of its power set UA.
2) Every partial set M of H *equivalent* to a *proper segment* H_1 of H belongs itself to a *proper segment* of H.

The smallest transfinite segment, of type ω, for instance, is a segment of this kind and, incidentally, all segments formed by means of "*boundary numbers*". If there were no further boundary numbers, besides ω, then, besides Z_ω, the number series *in its entirety* would be the *only* "principal segment", and

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

bestimmt, also ein "*geschlossener Bereich*", eine "*Menge*" und daher nach der Grundeigenschaft der *"offenen"* Zahlenreihe doch noch *fortsetzbar*, und ihr Ordnungstypus π wäre in der Tat eine *Grenzzahl*. Also gibt es in der Zahlenreihe *"tatsächlich"* Hauptabschnitte *oberhalb* ω sowie auch oberhalb *jeder weiteren* Grenzzahl.

Durch die Normalfunktion $\psi(x)$, welche der Bedingung $\psi(x+1) = 2^{\psi(x)}$ genügt,[1] wird wegen der Eigenschaft 1) jeder Hauptabschnitt auf *sich selbst* abgebildet, und daher ist jede Grenzzahl eine *Fixzahl*, ein *Eigenwert* unserer Normalfunktion. Zugleich darf wegen 2) kein Hauptabschnitt einem kleineren *"konfinal"* sein, jede Grenzzahl muß eine *"Kernzahl"* und zwar wegen 1) eine solche "zweiter Art", eine *"exorbitante Zahl"* sein. Aus unserer Betrachtung folgt also unter anderem auch die *Existenz der exorbitanten Zahlen*, und zwar *oberhalb* jeder Grenze.

[1] ⟦The ψ-formula is only in a carbon copy and written there in pencil.⟧

DOI 10.1007/978-3-540-79384-7 Date 1.12.2009 Proof Number 3

it would be *categorically determined* by means of our system of postulates. Hence, it would be a "*closed domain*", a "*set*", and it would therefore, according to the basic property of the "*open*" number series, yet still be *capable of being continued*, and its order type π would indeed be a *boundary number*. So there "*really*" are principal segments *above* ω in the number series, as well as above *any further* boundary number.

Every principal segment is mapped *onto itself* by means of the normal function $\psi(x)$ satisfying the condition $\psi(x+1) = 2^{\psi(x)}$ because of property 1). Hence, every boundary number is a *fixed number*, an *eigenvalue* of our normal function. At the same time, because of 2), no principal segment can be "*cofinal*" with a smaller one, every boundary number must be a "*core number*" and, in particular, because of 1), one such of the "second kind", an "*exorbitant number*". So from our consideration also follows, among other things, the *existence of the exorbitant numbers*, and in particular ⟦their existence⟧ *above* every limit.