

COURBES ET FIBRÉS VECTORIELS EN THÉORIE DE HODGE p -ADIQUE

LAURENT FARGUES ET JEAN-MARC FONTAINE

TABLE DES MATIÈRES

1. Courbes	1
2. Fibrés vectoriels sur les courbes	7
3. Filtrations de Harder-Narasimhan	9
4. Classification de fibrés	15
5. Anneaux de Fontaine	28
6. Étude de certains idéaux et valuations des vecteurs de Witt	46
7. Les espaces de Banach $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$	65
8. Espaces vectoriels formels et spectraux	86
9. L'algèbre graduée $P_{E,\pi}$	99
10. La courbe	104
11. Deux résultats sur les périodes des groupes p -divisibles	107
12. Fibrés vectoriels	110
13. φ -modules et fibrés	122
14. Fibrés Galois équivariants	131
15. Fibrés équivariants de de Rham	139
16. Fibrés cristallins et log-cristallins : faiblement admissible implique admissible	146
17. De Rham implique potentiellement log-cristallin	158
18. Simple connexité de la courbe	169
Références	170

1. COURBES

1.1. **Généralités.** Nous adopterons la définition suivante dans ce texte.

Définition 1.1. *Une courbe est un couple formé de la donnée d'un schéma noethérien régulier X connexe de dimension 1 séparé sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et pour tout point fermé $x \in X$ d'un entier $\deg(x) \geq 1$.*

Les courbes sont donc les schémas connexes séparés sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ obtenus par recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind munis d'une fonction degré sur leurs idéaux maximaux. Si X est une courbe nous noterons $|X|$ l'ensemble de ses points fermés, η son point générique et $F(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ son « corps des fonctions rationnelles ». On vérifie que si X est une courbe alors les ouverts non-vides de X sont exactement les complémentaires des ensembles finis de points fermés de X . Tout $x \in |X|$ définit une valuation

$$v_x : F(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

normalisée de telle manière à ce que la fonction v_x soit surjective. Si U est un ouvert non vide de X ,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f \in F(X) \mid \forall x \in |U|, v_x(f) \geq 0\}.$$

Définition 1.2. Si X est une courbe on note $\text{Div}(X)$ le groupe abélien libre sur $|X|$. Pour $D = \sum_{x \in |X|} m_x[x] \in \text{Div}(X)$ on note

$$\deg(D) = \sum_{x \in |X|} m_x \deg(x).$$

Comme d'habitude, $\text{Div}(X)$, le groupe des diviseurs de Weil, s'identifie aux classes d'isomorphismes de couples (\mathcal{L}, s) où \mathcal{L} est un fibré en droites sur X et $s \in \mathcal{L}_\eta \setminus \{0\}$ une section rationnelle de \mathcal{L} génériquement non nulle, le groupe des diviseurs de Cartier. La loi de groupe sur les diviseurs de Cartier est donnée par $(\mathcal{L}, s) \cdot (\mathcal{L}', s') = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}', s \otimes s')$. Le diviseur de Weil associé au couple (\mathcal{L}, s) est $\text{div}(\mathcal{L}, s) = \sum_x m_x[x]$ où m_x est l'ordre d'annulation ou l'opposé de l'ordre du pôle de la section s en x . Si $D \in \text{Div}(X)$ on note $\mathcal{O}_X(D)$ le fibré en droite tel que pour tout ouvert U ,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in F(X)^\times \mid \text{div}(f|_U) + D_U \geq 0\} \cup \{0\}$$

où si $D = \sum_x m_x[x]$, $D_U = \sum_{x \in U} m_x[x] \in \text{Div}(U)$. Il est muni de la section rationnelle donnée par $1 \in F(X)$ et définit donc un diviseur de Cartier. L'application $D \mapsto (\mathcal{O}_X(D), 1)$ définit un inverse à l'application $(\mathcal{L}, s) \mapsto \text{div}(\mathcal{L}, s)$.

Si $f \in F(X)^\times$ on pose

$$\text{div}(f) = \text{div}(\mathcal{O}_X \cdot f, 1) = \sum_{x \in |X|} v_x(f) \in \text{Div}(X).$$

Cela définit un morphisme de groupes

$$\text{div} : F(X)^\times \longrightarrow \text{Div}(X).$$

On dispose alors de la suite exacte usuelle

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \longrightarrow F(X)^\times \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(X) \longmapsto \text{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

$$D \longmapsto [\mathcal{O}_X(D)].$$

Définition 1.3. Une courbe complète est une courbe X telle que

$$\forall f \in F(X)^\times, \deg(\text{div}(f)) = 0.$$

Exemple 1.4. Si k est un corps et X est une courbe projective lisse sur k au sens usuel, posant $\forall x \in |X|, \deg(x) = [k(x) : k]$, cela définit une courbe complète au sens précédent.

Si X est une courbe complète la fonction degré d'un diviseur définit une fonction degré, $\deg : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Le lemme qui suit ne pose pas de problème.

Lemme 1.5. Si X est une courbe complète, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous-corps de $F(X)$.

Définition 1.6. Si X est une courbe complète on appelle corps de définition de X le corps $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Exemple 1.7. Reprenons l'exemple 1.4. Le corps de définition de X au sens précédent est la clôture algébrique de k dans $k(X)$.

1.2. Construction de courbes.

1.2.1. *Anneaux presque euclidiens.* Rappelons qu'un stathme euclidien sur un anneau B est une fonction $\deg : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ vérifiant :

- (1) $\deg(a) = -\infty$ si et seulement si $a = 0$,
- (2) si $a \in B \setminus \{0\}, b \in B \setminus \{0\}$ alors $\deg(a) \leq \deg(ab)$.

Rappelons également qu'un anneau euclidien est un anneau intègre B muni d'un stathme euclidien vérifiant : $\forall x, y \in B$ avec $y \neq 0$, il existe $a, b \in B$ tels que

$$x = ay + b \text{ et } \deg(b) < \deg(y).$$

Remarquons que dans un anneau euclidien les éléments de degré 0 sont inversibles.

Définition 1.8. *Un anneau presque euclidien est un anneau intègre B muni d'un stathme euclidien \deg vérifiant :*

- (1) *tout élément de degré 0 dans B est inversible,*
- (2) *$\forall x, y \in B$ avec $\deg(y) \geq 1$, il existe $a, b \in B$ tels que $x = ay + b$ et $\deg(b) \leq \deg(y)$.*

Bien sûr, tout anneau euclidien est presque euclidien.

Proposition 1.9. *Soit (B, \deg) un anneau presque euclidien dont le stathme est multiplicatif, $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$. L'anneau B est principal si et seulement si pour tout $x, y \in B \setminus \{0\}$ de même degré, il existe $a, b \in B$ vérifiant*

- *soit $-\infty \neq \deg(ax + by) < \deg(x)$,*
- *ou bien $ax + by = 0$ et $b \in B^\times$.*

Démonstration. Supposons B principal. Soient $x, y \in B$ non nuls de même degré. Si $(x) = (y)$ il existe $b \in B^\times$ tel que $x = by$ est le résultat est clair. Sinon, écrivons $x = \delta x'$ et $y = \delta y'$ avec x' et y' premiers entre eux. Si l'on avait $\deg(\delta) = \deg(x)$, cela impliquerait que $\deg(x') = \deg(y') = 0$ et donc $x', y' \in B^\times$. Cela est impossible puisque l'on suppose $(x) \neq (y)$. On a donc $\deg(\delta) < \deg(x)$. Si $a, b \in B$ sont tels que $ax' + by' = 1$ on obtient alors $ax + by = \delta$.

Montrons la réciproque. Soit I un idéal non nul de B . Soit $x \in I$ de degré minimal parmi les éléments de $I \setminus \{0\}$. Montrons que $I = (x)$. Si $y \in I \setminus \{0\}$, écrivant $y = ax + b$ avec $\deg(b) \leq \deg(x)$, quitte à remplacer y par b si b est non nul on est ramené au cas où $\deg(y) = \deg(x)$. Par minimalité de $\deg(x)$, il n'existe pas $a, b \in B$ tels que $ax + by \neq 0$ et $\deg(ax + by) < \deg(x)$. Il existe donc $a \in B$ et $b \in B^\times$ tels que $ax + by = 0$ et donc $y \in (x)$. \square

1.2.2. *Construction de courbes affines.* Soit B un anneau intègre de corps des fractions K . Le lemme suivant ne pose aucun problème.

Lemme 1.10. *Les données suivantes sont équivalentes :*

- *Un sous-anneau de valuation discrète $A \subset K$ tel que $A \cap B$ soit un corps.*
- *Une valuation $v_\infty : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ vérifiant $v_\infty(K^\times) = \mathbb{Z}$, $\forall b \in B \setminus \{0\}$, $v_\infty(b) \leq 0$ et $v_\infty(b) = 0$ implique $b \in B^\times$.*

Soit donc une donnée telle que dans le lemme précédent. Notons F le corps $B \cap A$. Remarquons que $B^\times = F^\times$. Posons

$$\deg = -v_{\infty|B} : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

qui est un stathme euclidien. Notons $(\text{Fil}_i B)_{i \in \mathbb{Z}}$ la filtration croissante

$$\text{Fil}_i B = \{b \in B \mid \deg(b) \leq i\}.$$

Ainsi, $\text{Fil}_0 B = F$ et $\text{Fil}_i B = 0$ lorsque $i < 0$. Faisons l'hypothèse suivante : pour $i \geq 1$, l'application

$$\text{Fil}_i B / \text{Fil}_{i-1} B \longrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i} / \mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

est surjective où \mathfrak{m}_A désigne l'idéal maximal de A .

Proposition 1.11. *Sous l'hypothèses précédente (B, \deg) est presque euclidien.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'étant donnés $x, y \in B$ avec $\deg(x) \geq \deg(y) \geq 1$, il existe $a, b \in B$ tels que $x = ay + b$ et $\deg(b) \leq \deg(y)$. On procède pour cela par récurrence sur $\deg(x) - \deg(y)$, le cas où $\deg(x) = \deg(y)$ étant évident. Soient $i = \deg(x)$ et $j = \deg(y)$. Notons $\bar{x} \in \mathfrak{m}_A^{-i} / \mathfrak{m}_A^{-i+1}$ et $\bar{y} \in \mathfrak{m}_A^{-j} / \mathfrak{m}_A^{-j+1}$. Puisque (A, \mathfrak{m}_A) est un anneau de valuation discrète, il existe $c \in \mathfrak{m}_A^{-(i-j)} / \mathfrak{m}_A^{-(i-j+1)}$ tel que $\bar{x} = c\bar{y}$. D'après l'hypothèse faite, il existe $\alpha \in \text{Fil}_{i-j} B$ tel que $\bar{\alpha} = c$. Posons $\beta = x - \alpha y$. On a donc $\deg(\beta) < \deg(x)$. Si $\deg(\beta) \leq \deg(y)$ on a terminé. Sinon, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au couple (β, y) pour conclure. \square

Supposons maintenant B principal et notons $X = \text{Spec}(B)$. Posons pour $x \in X$ un point fermé, $\deg(x) = \deg(f)$ si $f \in B$ est un élément irréductible associé à x . On a donc défini une courbe que l'on aimerait compactifier en une courbe complète en ajoutant la valuation v_∞ et en posant $\deg(\infty) = 1$. Dans la section qui suit on va voir un procédé permettant de construire naturellement une telle compactification.

Exemple 1.12. Soit K un corps valué complet, de valuation discrète à corps résiduel parfait, extension de \mathbb{Q}_p . Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Notons $C = \widehat{\bar{K}}$. Soit B_{cris}^+ l'anneau de Fontaine des périodes cristallines associé et $B_{cris} = B_{cris}^+[\frac{1}{t}]$ ([19]). Notons $B_e = B_{cris}^{\varphi=Id}$. Considérons l'anneau de valuation discrète B_{dR} d'uniformisante t . Le plongement $B_e \subset B_{cris} \subset B_{dR}$ composé avec la valuation de B_{dR} définit une valuation v_∞ sur B_e . La filtration par le degré sur B_e induite par v_∞ est alors $Fil_i B_e = B_e \cap Fil^{-i} B_{cris}$. Il résulte alors de la suite exacte fondamentale ([19], th. 5.3.7) que $Fil_0 B_e = \mathbb{Q}_p$ pour tout $i \geq 1$,

$$Fil_i B_e / Fil_{i-1} B_e \xrightarrow{\sim} t^{-i} B_{dR}^+ / t^{-i+1} B_{dR}^+ = C(-i).$$

La condition (1) précédente est donc vérifiée. On verra plus tard qu'en fait un tel anneau est principal presque euclidien et que de plus ses éléments irréductibles sont les éléments de degré 1.

1.2.3. *Construction de courbes complètes.* Supposons nous donné un anneau gradué intègre

$$P = \bigoplus_{i \geq 0} P_i$$

tel que P_0 soit un corps que nous noterons également F . On suppose que $\dim_F P_1 \geq 2$. Posons maintenant

$$X = \text{Proj}(P),$$

un F -schéma.

Théorème 1.13. *Faisons les hypothèses suivantes :*

(1) *Le monoïde multiplicatif*

$$\left(\bigcup_{d \geq 1} P_d \setminus \{0\} \right) / F^\times$$

est libre sur les éléments de P_1 / F^\times .

(2) *Pour tout $t \in P_1 \setminus \{1\}$, il existe un corps C extension de F tel que*

$$P/Pt \simeq \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$$

comme F -algèbres graduées.

On a alors les propriétés suivantes :

a) *Pour tout $t \in P_1 \setminus \{0\}$, le lieu d'annulation de la « section hyperplane t », $V^+(t)$, est constitué d'un seul point $\{\infty_t\}$.*

b) *Si $|X|$ désigne les points fermés de X , l'application $t \mapsto \infty_t$ induit une bijection*

$$(P_1 \setminus \{0\}) / F^\times \xrightarrow{\sim} |X|$$

c) *Posons pour tout point fermé x de X , $\deg(x) = 1$. Alors, munie de cette fonction degré, X est une courbe complète.*

d) *Pour tout point fermé $\infty \in X$, $X \setminus \{\infty\}$ est un ouvert affine $\text{Spec}(B)$ avec B principal, i.e. $\text{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$, et l'anneau $(B, -v_\infty)$ est presque euclidien.*

Démonstration. Soit $t \in P_1 \setminus \{0\}$ et $C|F$ tel que

$$P/Pt \simeq \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}.$$

Notons D l'algèbre de droite dans l'isomorphisme précédent. On a alors

$$V^+(t) = \text{Proj}(P/Pt) \simeq \text{Proj}(D)$$

qui d'après le lemme 1.14 qui suit est réduit à un seul point, l'idéal premier homogène nul de D . Notons $V^+(t) = \{\infty\}$. Soit maintenant $B = P[\frac{1}{t}]_0$, $X \setminus \{\infty\} = \text{Spec}(B)$. On vérifie immédiatement que B est un anneau factoriel d'éléments irréductibles les $\frac{x}{t}$ lorsque x parcourt $P_1 \setminus Ft$. Pour un tel x il y a une identification

$$B/B \cdot \frac{x}{t} = (P/Px)[\frac{1}{t}]_0$$

où $\bar{t} \in P/Px$ désigne la réduction de t . Mais si

$$P/Px \simeq \{f \in C'[T] \mid f(0) \in F\}$$

où C' est un corps extension de F , on vérifie que pour tout élément homogène de degré 1 non nul y dans l'algèbre graduée $D' = \{f \in C'[T] \mid f(0) \in F\}$,

$$D'[\frac{1}{y}]_0 \simeq C'.$$

L'idéal engendré par $\frac{x}{t}$ dans B est donc maximal. L'anneau B est factoriel, les idéaux engendrés par les éléments irréductibles sont maximaux; il est donc principal.

Montrons maintenant que l'anneau B satisfait aux hypothèses de la section 1.2.2 et que donc, d'après la proposition 1.11, il est presque euclidien. Il est muni de la filtration $(\text{Fil}_i B)_{i \geq 0}$ où

$$\text{Fil}_i B = \left\{ \frac{x}{t^i} \mid x \in P_i \right\}.$$

En particulier, $\text{Fil}_0 B = F$. Soit

$$\text{deg} : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

la fonction degré associé à cette filtration. Notons K le corps des fractions de B . À l'élément irréductible t de l'anneau factoriel P est associé une valuation v_∞ sur $\text{Frac}(P)$. On vérifie facilement qu'en restriction à $B \subset \text{Frac}(B) \subset \text{Frac}(P)$,

$$v_\infty = -\text{deg} : B \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}.$$

Soit S la partie multiplicative de P/tP formée des éléments homogènes non-nuls. Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ graduons le P/tP -module $t^i P/t^{i+1} P$ en posant que $t^i P_j/t^{i+1} P_{j-1}$ est de degré $i+j$. Cela munit $t^i P/t^{i+1} P$ d'une structure de P/tP -module gradué sur l'anneau gradué P/tP . Il y a alors un isomorphisme naturel d'anneaux gradués

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{m}_{K, v_\infty}^i / \mathfrak{m}_{K, v_\infty}^{i+1} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} [S^{-1}(t^i P/t^{i+1} P)]_0.$$

Celui-ci se décrit de la façon suivante. Un élément de $\mathfrak{m}_{K, \infty}^i$ s'écrit sous la forme

$$t^i \frac{x}{y}$$

avec $x, y \in P$ homogènes, $x \in P_a$ et $y \in P_{a+i} \setminus tP_{a+i-1}$ pour un entier a . On associe alors à un tel élément

$$y^{-1} \cdot \overline{t^i x} \in S^{-1}(t^i P/t^{i+1} P).$$

De plus, via cet isomorphisme l'application naturelle

$$\text{Fil}_i B \longrightarrow \mathfrak{m}_{K, v_\infty}^{-i} / \mathfrak{m}_{K, v_\infty}^{-i+1}$$

est donnée par, si $x \in P_i$,

$$\frac{x}{t^i} \longmapsto \overline{t^{-i} x} \in [t^{-i} P/t^{-i+1} P]_0 \text{ placé en degré } -i.$$

Pour vérifier que la condition de la section 1.2.2 est vérifiée il suffit donc de vérifier que pour $i > 0$, l'application naturelle

$$P_i/tP_{i-1} \longmapsto [S^{-1}(P_i/tP_{i-1})]_0$$

est surjective. Par un calcul explicite on vérifie que c'est le cas pour l'algèbre graduée $\{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$. \square

Lemme 1.14. *Soit $C|F$ une extension de corps et $D = \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$, une F -algèbre graduée. Alors, $\text{Proj}(D)$ est réduit à un seul point, l'idéal premier homogène nul.*

Démonstration. Soit $D^+ = TC[T]$ l'idéal d'augmentation de D et \mathfrak{p} un idéal premier homogène non nul de D . Soit $aT^i \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Si $i = 0$, $a \in F^\times$ et donc $\mathfrak{p} = D$. Sinon, la relation $aT^i \in \mathfrak{p}$ couplée à la primalité de \mathfrak{p} implique que soit $a \in \mathfrak{p}$ auquel cas $a \in F^\times$ et donc $\mathfrak{p} = D$, soit $a \notin \mathfrak{p}$ auquel cas $a \in C \setminus F$. Supposons donc $a \in C \setminus F$. La relation $aT.T^{i-1} \in \mathfrak{p}$ implique alors que soit $aT \in \mathfrak{p}$, soit $T \in \mathfrak{p}$. Dans les deux cas, on a immédiatement que $T^2C[T] \subset \mathfrak{p}$. On a donc que $\forall \lambda \in C$, $(\lambda T)^2 \in \mathfrak{p}$ duquel on déduit que $\lambda T \in \mathfrak{p}$. On obtient donc au final que $D^+ \subset \mathfrak{p}$. \square

Exemple 1.15. Reprenons les notations de l'exemple 1.12. Soit $h \geq 1$ un entier. Nous montrerons plus loin que l'algèbre graduée $\bigoplus_{d \geq 0} (B_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^d}$ satisfait aux hypothèses du théorème précédent.

1.2.4. *L'algèbre graduée P est quadratique.* Rappelons qu'un anneau commutatif gradué $D = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i$ est quadratique s'il vérifie les conditions suivantes :

- comme D_0 -algèbre, D engendré par ses éléments de degré 1,
- les relations associées sont engendrées par des relations de degré 2, c'est à dire l'idéal homogène noyau de la surjection d'anneaux gradués

$$\text{Sym}_{D_0} D_1 \longrightarrow D$$

est engendré par des éléments de degré 2 dans l'algèbre symétrique.

Lemme 1.16. Soit $D = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i$ un anneau commutatif gradué et $t \in D_1$ un élément régulier. Si l'anneau gradué D/tD est quadratique alors D l'est également.

Démonstration. Soit $i \geq 2$ et $x \in D_i$. Par hypothèse il existe des éléments $y_1, \dots, y_n \in D_1$, un polynôme homogène de degré i , f , à coefficients dans D_0 ainsi que $z \in D_{i-1}$ tels que $x = f(y_1, \dots, y_n) + tz$. On en déduit facilement par récurrence sur i que D_i est engendré par les éléments de degré 1.

Notons $\pi : \text{Sym}_{D_0} D_1 \longrightarrow D$. Montrons par récurrence sur $i \geq 2$ que si $a \in \text{Sym}^i D_1$ vérifie $\pi(a) = 0$ il existe alors un ensemble fini I , une collection $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\text{Sym}^2 D_1$ telle que pour tout i , $\pi(x_i) = 0$, et une collection $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\text{Sym}^{i-2} D_1$ telle que $a = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. Le cas $i = 2$ est évident. Soit donc $i > 2$ et $a \in \text{Sym}^i D_1$ vérifiant $\pi(a) = 0$. Il y a un isomorphisme canonique $(\text{Sym}_{D_0} D_1)/(t) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_{D_0}(D_1/tD_0)$. Puisque D/tD est quadratique, la relation $\pi(a) = 0$ projetée dans D/tD montre qu'il existe un ensemble fini J , une collection $(y_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\text{Sym}^2 D_1$ vérifiant $\pi(y_j) = \pi(tz_j)$ pour des $(z_j)_{j \in J}$ dans D_1 , des éléments $(\mu_j)_{j \in J}$ dans $\text{Sym}^{i-2} D_1$ et enfin $w \in \text{Sym}^{i-1} D_1$ tels que

$$a = \sum_{j \in J} \mu_j y_j + tw.$$

La relation $\pi(a) = 0$ fournit

$$\sum_{j \in J} \pi(\mu_j y_j) + t\pi(z) = t \left(\sum_{j \in J} \pi(\mu_j z_j) + \pi(w) \right) = 0$$

et donc puisque t est régulier,

$$\pi \left(\sum_{j \in J} \mu_j z_j + w \right) = 0.$$

Notons $b = \sum_{j \in J} \mu_j z_j + w$. Appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient une égalité

$$b = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

où pour tout i , $\lambda_i \in \text{Sym}^{i-3} D_1$ et $x_i \in \text{Sym}^2 D_1$ vérifie $\pi(x_i) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} a &= tb + \sum_{j \in J} \mu_j (y_j - tz_j) \\ &= \sum_{i \in I} (t\lambda_i) x_i + \sum_{j \in J} \mu_j (y_j - tz_j), \end{aligned}$$

relation qui fournit l'hypothèse de récurrence au cran i . \square

Proposition 1.17. *Sous les hypothèses de la section 1.2.3 précédente, la F -algèbre graduée P est quadratique.*

Démonstration. D'après le lemme 1.16 précédent il suffit de vérifier que si C est un corps extension de F alors $\{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$ est quadratique, ce qui ne pose pas de problème. \square

2. FIBRÉS VECTORIELS SUR LES COURBES

Soit X une courbe de corps de définition F et de corps de fonctions rationnelles K . On note Fib_X la catégorie des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang fini sur X que l'on appelle encore fibrés vectoriels.

2.1. Classification par recollement. Soit $U \subsetneq X$ un ouvert non vide et $X \setminus U = \{x_1, \dots, x_r\}$. Considérons les catégories suivantes. Tout d'abord,

$$\mathcal{C} = \{(\mathcal{E}, (M_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r})\}$$

où $\mathcal{E} \in Fib_U$, pour $1 \leq i \leq r$, M_i est un \mathcal{O}_{X, x_i} -module libre de rang fini et

$$u_i : M_i \otimes_{\mathcal{O}_{X, x_i}} K \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\eta.$$

Puis,

$$\widehat{\mathcal{C}} = \{(\mathcal{E}, (M_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r})\}$$

où $\mathcal{E} \in Fib_U$, pour $1 \leq i \leq r$, M_i est un $\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}$ -module libre de rang fini et

$$u_i : M_i \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}} \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\eta \otimes_K \widehat{K}_{x_i}.$$

La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ consiste en la donnée d'un fibré sur U , de fibrés sur les « disques formels » $(\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}))_{1 \leq i \leq r}$ et de données de recollement sur les « disques formels époinés » $(\text{Spec}(\widehat{K}_{x_i}))_{1 \leq i \leq r}$. La proposition qui suit ne pose pas de problème (on renvoie à [2] pour un énoncé beaucoup plus général).

Proposition 2.1. *Les foncteurs*

$$\begin{aligned} Fib_X &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \mathcal{E} &\longmapsto (\mathcal{E}|_U, (\mathcal{E}_{x_i})_{1 \leq i \leq r}, (\text{can}_i)_{1 \leq i \leq r}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Fib_X &\longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \\ \mathcal{E} &\longmapsto (\mathcal{E}|_U, (\widehat{\mathcal{E}}_{x_i})_{1 \leq i \leq r}, (\text{can}_i)_{1 \leq i \leq r}) \end{aligned}$$

sont des équivalences de catégories.

Corollaire 2.2. *Supposons U affine et $\text{Pic}(U)$ trivial. Soit $B = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. La catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à celle des triplets*

$$(M, N, (u_i)_{1 \leq i \leq r})$$

où :

- M est un B -module libre de rang fini,
- N est un $\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}$ -module libre de rang fini,
- $u_i : M \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}} \widehat{K}_{x_i}$.

Il en est de même en remplaçant \widehat{K}_{x_i} par K et $\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}$ par \mathcal{O}_{X, x_i} .

En particulier, les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang n sur X s'identifient à l'ensemble

$$GL_n(B) \setminus \left(\prod_{i=1}^r GL_n(\widehat{K}_{x_i}) / GL_n(\widehat{\mathcal{O}}_{X, x_i}) \right).$$

2.2. Opérations sur les fibrés en termes de données de recollement. Supposons maintenant que U soit affine, $\text{Pic}(U) = 0$ et $X \setminus U = \{\infty\}$. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur X et (M, N, u) , resp. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$, la donnée correspondante comme dans le corollaire 2.2, c'est à dire

$$M = \Gamma(U, \mathcal{E}), \quad N = \mathcal{E}_\infty \text{ et } \widehat{N} = \widehat{\mathcal{E}}_\infty.$$

On vérifie aisément la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Il y a des identifications canoniques*

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{E}) &= u(M) \cap N = \widehat{u}(M) \cap \widehat{N}, \\ H^1(X, \mathcal{E}) &= N \otimes K/u(M) + N = N \otimes \widehat{K}_\infty/\widehat{u}(M) + \widehat{N}. \end{aligned}$$

Plus généralement, $R\Gamma(X, \mathcal{E})$ est isomorphe au complexe

$$\begin{aligned} M \oplus N &\longrightarrow N \otimes K \\ (x, y) &\longmapsto u(x) - y \end{aligned}$$

ou encore au même complexe obtenu en remplaçant N par \widehat{N} , K par \widehat{K}_∞ et u par \widehat{u} .

On a également :

Proposition 2.4. *Pour $k \in \mathbb{Z}$, si t_∞ désigne une uniformisante de $\mathcal{O}_{X, \infty}$, si le fibré \mathcal{E} correspond aux données (M, N, u) , resp. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$, alors le fibré tordu $\mathcal{E}(k\infty)$ correspond aux données*

$$(M, t_\infty^{-k}N, u), \quad \text{resp. } (M, t_\infty^{-k}\widehat{N}, \widehat{u}).$$

2.3. Sur quelques courbes particulières. Bien que facile à démontrer la proposition qui va suivre est importante pour comprendre la différence entre la courbe que nous allons étudier en théorie de Hodge p -adique et la droite projective usuelle sur un corps. Plaçons nous dans la situation suivante. Soit X une courbe complète possédant un point $\infty \in X$ tel que

- $\deg(\infty) = 1$
- $X \setminus \{\infty\}$ est affine.

On vérifie aussitôt le lemme qui suit.

Lemme 2.5. *Sont équivalents :*

- $\text{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$
- la fonction degré induit un isomorphisme $\deg : \text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Nous supposons dans la suite que X vérifie les hypothèses équivalentes du lemme précédent. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{O}_X(k) = \mathcal{O}_X(k\infty)$. Soit $X \setminus \{\infty\} = \text{Spec}(B)$ où l'anneau B est donc principal. On note

$$\deg = -v_\infty : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}.$$

Puisque associé au diviseur de Weil $[\infty]$, le fibré en droites $\mathcal{O}_X(1)$ est canoniquement muni d'une section génériquement non nulle. Le produit avec cette section fournit des injections

$$F = H^0(\mathcal{O}_X) \subset H^0(\mathcal{O}_X(1)) \subset \dots \subset H^0(\mathcal{O}_X(k)) \subset H^0(\mathcal{O}_X(k+1)) \subset \dots$$

qui correspondent à la filtration par le degré sur B ,

$$F = B^{\deg \leq 0} \subset B^{\deg \leq 1} \subset \dots \subset B^{\deg \leq k} \subset B^{\deg \leq k+1} \subset \dots$$

On a de plus bien sûr que $H^0(\mathcal{O}_X(k)) = 0$ si $k < 0$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ le cup-produit avec cette section de $\mathcal{O}_X(1)$ induit une surjection

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(k+1)).$$

Si $A = \mathcal{O}_{X, \infty}$ d'uniformisante t , $K = F(X)$, cette surjection s'identifie à la surjection canonique

$$K/B + t^{-k}A \longrightarrow K/B + t^{-k-1}A.$$

Ainsi, si $H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$, alors pour tout $k \geq d$, $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$. Notons $i : \{\infty\} \hookrightarrow X$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(k-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(k) \longrightarrow i_* (\mathfrak{m}_A^{-k}/\mathfrak{m}_A^{-k+1}) \longrightarrow 0.$$

De celle-ci on déduit que si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ alors pour tout $k \geq 1$, l'application

$$B^{\deg \geq k} / B^{\deg \geq k-1} \rightarrow \mathfrak{m}_A^{-k} / \mathfrak{m}_A^{-k+1}$$

est surjective i.e. la condition (1) de la section 1.2.2 est vérifiée.

Lorsque $X = \text{Proj}(P)$ comme dans le théorème 1.13, $t \in P_1$ est distingué et $V^+(t) = \{\infty\}$ il y a des identifications pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P_k &= B^{\deg \leq k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) \\ b &\longmapsto \frac{b}{t^k}. \end{aligned}$$

On a donc

$$X = \text{Proj} \left(\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)) \right)$$

et la suite d'inclusions précédentes est donnée par le produit par $t \in H^0(\mathcal{O}_X(1))$,

$$P_0 \xrightarrow{\times t} P_1 \xrightarrow{\times t} \dots \xrightarrow{\times t} P_k \xrightarrow{\times t} P_{k+1} \xrightarrow{\times t} \dots$$

On remarquera de plus que pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X(d) \simeq \widetilde{P}[d]$.

Revenons aux hypothèses précédentes, avant les digressions sur le cas $X = \text{Proj}(P)$.

Proposition 2.6.

(1) *Sont équivalents :*

- (B, \deg) est euclidien
- $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$.

Si c'est le cas alors, $\forall k \geq -1$, $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

(2) *Sont équivalents :*

- (B, \deg) est presque euclidien
- $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

Si c'est le cas alors, $\forall k \geq 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

Démonstration. Notons $A = \mathcal{O}_{X, \infty}$ d'uniformisante t et $K = F(X)$. On a

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = K/B + tA, \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = K/B + A,$$

égalités desquelles on déduit facilement la proposition. □

3. FILTRATIONS DE HARDER-NARASIMHAN

3.1. Formalisme général. Rappelons le formalisme suivant des filtrations de Harder-Narasimhan utilisé dans [17], formalisme qui se déduit lui-même du formalisme plus général de [1].

Supposons que l'on dispose d'une catégorie exacte \mathcal{C} munie de deux « fonctions » degré et rang sur les classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \deg &: \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \text{rg} &: \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}, \end{aligned}$$

additives sur les suites exactes de \mathcal{C} . On fait l'hypothèse qu'il existe une catégorie abélienne \mathcal{A} ainsi qu'un foncteur « fibre générique »

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$$

vérifiant :

- F est exacte et fidèle,

- il induit une bijection

$$F : \{\text{sous-objets stricts de } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-objets de } F(X)\}.$$

où par sous-objet strict on entend ceux pouvant s'insérer dans une suite exacte. On aime à penser à l'inverse de la bijection précédente comme une opération « d'adhérence schématique ».

Ce sera le cas dans les exemples que nous avons en vue.

On suppose également que la fonction rang sur \mathcal{C} provient par composition avec F d'une fonction additive $\text{rg} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$\text{rg}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Enfin, on fait l'hypothèse cruciale suivante : si $u : X \rightarrow X'$ est un morphisme dans \mathcal{C} tel que $F(u)$ soit un isomorphisme alors $\text{deg}(X) \leq \text{deg}(X')$, avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.

Une telle catégorie est quasi-abélienne au sens de André ([1]) ; tout morphisme possède un noyau et un conoyau. Plus précisément, si $u : X \rightarrow Y$, $\ker u$ est l'unique sous-objet strict X' de X tel que $F(X') = \ker(F(u))$, $\text{Im } u$ est l'unique sous-objet strict X'' de X tel que $F(X'') = \text{Im}(F(u))$ et $\text{coker } u = X/\text{Im}(u)$. Néanmoins elle n'est pas abélienne en général, il peut exister des morphismes dans \mathcal{C} de noyaux et conoyaux triviaux qui ne sont pas des isomorphismes. On remarquera que le morphisme

$$X/\ker u \rightarrow \text{Im } u,$$

bien que n'étant pas en général un isomorphisme, en est un « en fibre générique » i.e. après application du foncteur F . Ainsi, c'est un isomorphisme si et seulement si $\text{deg}(X/\ker u) = \text{deg}(\text{Im } u)$.

Pour $X \in \mathcal{C}$, $X \neq 0$, on pose

$$\mu(X) = \frac{\text{deg}(X)}{\text{rg}(X)} \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.1. *Un objet non nul X de \mathcal{C} est semi-stable si pour tout sous-objet strict non nul X' de X*

$$\mu(X') \leq \mu(X).$$

On a alors le théorème suivant dont la preuve consiste à suivre celle de Harder-Narasimhan pour les fibrés vectoriels ([25]). On renvoie à [1] pour plus de détails.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses précédentes tout objet X de \mathcal{C} possède une unique filtration dans la catégorie exacte \mathcal{C}*

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$$

telle que :

- pour $1 \leq i \leq r$, X_i/X_{i-1} est semi-stable,
- la suite des pentes $(\mu(X_i/X_{i-1}))_{1 \leq i \leq r}$ est strictement décroissante.

Pour X comme dans l'énoncé précédent on note $\text{HN}(X)$ l'unique polygone concave d'origine $(0, 0)$ et ayant pour pentes $(\mu(X_i/X_{i-1}))_{1 \leq i \leq r}$ avec multiplicités respectives $(\text{rg}(X_i/X_{i-1}))_{1 \leq i \leq r}$.

Théorème 3.3. *Si $X' \subset X$ est un sous-objet strict, le point $(\text{deg}(X'), \text{rg}(X'))$ est situé en dessous du polygone $\text{HN}(X)$.*

On obtient donc que $\text{HN}(X)$ est l'enveloppe concave des points $(\text{deg}(X'), \text{rg}(X'))$ lorsque X' parcourt les sous-objets de X .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons les catégories suivantes.

- Soit $\mathcal{C}^{\leq \lambda}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets dont la plus grande pente de leur polygone de Harder-Narasimhan est inférieure ou égale à λ . On a donc pour $X \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}^{\leq \lambda}$ si et seulement si pour tout sous-objet strict non nul Y de X , $\mu(Y) \leq \mu(X)$.
- Soit $\mathcal{C}_{\geq \lambda}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets de \mathcal{C} dont la plus petite pente de leur polygone de Harder-Narasimhan est supérieure ou égale à λ . Un objet X de \mathcal{C} appartient à $\mathcal{C}_{\geq \lambda}$ si et seulement si pour tout épimorphisme strict $X \twoheadrightarrow Y$ tel que $Y \neq 0$, on a $\mu(Y) \geq \mu(X)$.

- Soit $\mathcal{C}_\lambda^{ss} = \mathcal{C}^{\leq \lambda} \cap \mathcal{C}_{\geq \lambda}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets semi-stables de pente λ à laquelle on ajoute l'objet nul.

Théorème 3.4. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (1) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les catégories $\mathcal{C}^{\leq \lambda}$ et $\mathcal{C}_{\geq \lambda}$ sont des sous-catégories exactes stables par extensions dans \mathcal{C} .*
- (2) *Lorsque $\lambda > \mu$, $\text{Hom}(\mathcal{C}_{\geq \lambda}, \mathcal{C}^{\leq \mu}) = 0$. En particulier, si X est semi-stable de pente λ et Y semi-stable de pente μ avec $\lambda > \mu$, $\text{Hom}(X, Y) = 0$.*
- (3) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_\lambda^{ss} = \mathcal{C}^{\leq \lambda} \cap \mathcal{C}_{\geq \lambda}$ est une catégorie abélienne stable par extensions dans \mathcal{C} .*

Les filtrations de Harder-Narasimhan fournissent donc un dévissage canonique de la catégorie exacte \mathcal{C} par la famille de catégories abéliennes $(\mathcal{C}_\lambda^{ss})_{\lambda \in \mathbb{R}}$. On peut aller plus loin dans la structure des catégories abéliennes $(\mathcal{C}_\lambda^{ss})_\lambda$.

Définition 3.5. *Un objet $X \in \mathcal{C}$ est stable si pour tout sous-objet strict non nul X' de X , $\mu(X') < \mu(X)$.*

On a alors la proposition suivante qui ne pose pas de problème.

Proposition 3.6. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Tout objet de la catégorie abélienne \mathcal{C}_λ^{ss} est de longueur finie. Les objets simples de \mathcal{C}_λ^{ss} sont les objets stables de pente λ .*

3.2. Exemples.

3.2.1. *Fibrés vectoriels.* Soit X une courbe complète et \mathcal{C} la catégorie des \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang fini sur X . Il y a deux fonctions additives rang et degré sur X . Soit de plus \mathcal{A} la catégorie abélienne des $F(X)$ -espaces vectoriels de dimension finie. Il y a un foncteur fibre générique évident $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. On vérifie qu'il possède les propriétés demandées précédemment. Par exemple, si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme qui est un isomorphisme en fibre générique alors,

$$\text{deg}(\mathcal{E}') = \text{deg}(\mathcal{E}) + \text{deg}(\mathcal{E}'/u(\mathcal{E}))$$

où le degré du faisceau cohérent de torsion $\mathcal{F} = \mathcal{E}'/u(\mathcal{E})$ est défini par

$$\text{deg}(\mathcal{F}) = \sum_{x \in |X|} \text{deg}(x) \cdot \text{long}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x).$$

On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans \mathcal{C} .

3.2.2. *Espaces vectoriels filtrés.* Soit $L|K$ une extension de corps et $\text{VectFil}_{L/K}$ la catégorie exacte formée des couples $(V, \text{Fil}^\bullet V_L)$ consistant en un K -espace vectoriel de dimension finie V ainsi qu'une filtration décroissante $\text{Fil}^\bullet V_L$ de $V \otimes_K L$ telle que $\text{Fil}^i V_L = 0$ pour $i \gg 0$ et $\text{Fil}^i V_L = V_L$ lorsque $i \ll 0$. Posons

$$\begin{aligned} \text{rg}(V, \text{Fil}^\bullet V_L) &= \dim_K V, \\ \text{deg}(V, \text{Fil}^\bullet V_L) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_L \text{gr}^i V_L. \end{aligned}$$

Soit Vect_K la catégorie des K -espace vectoriels de dimension finie. Le foncteur

$$\begin{aligned} F : \text{VectFil}_{L/K} &\longrightarrow \text{Vect}_K \\ (V, \text{Fil}^\bullet V_L) &\longmapsto V \end{aligned}$$

satisfait aux propriétés demandées précédemment. On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans cette catégorie. Le théorème 3.4 dit dans ce cas là que tout morphisme entre objets semi-stables de même pente est strictement compatible aux filtrations.

3.2.3. *Isocristaux.* Soit k un corps parfait de caractéristique p , $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}]$. Notons σ le Frobenius de K_0 . Soit $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$ la catégorie abélienne \mathbb{Q}_p -linéaire des k -isocristaux, c'est à dire la catégorie des couples (D, φ) où D est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : D \xrightarrow{\sim} D$ un isomorphisme σ -linéaire. Il y a deux fonctions additives hauteur et point terminal du polygone de Newton

$$\begin{aligned} \text{ht} & : \varphi\text{-Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{N} \\ t_N & : \varphi\text{-Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

où $\text{ht}(D, \varphi) = \dim_{K_0} N$ et $t_N(D, \varphi) = d$ si $\det(D, \varphi) = K_0 \cdot e$ avec $\varphi(e) = a \cdot e$ et $v_p(a) = d$. Prenant pour fonction rang la fonction ht et fonction degré la fonction t_N , les hypothèses précédentes sont facilement vérifiées (la catégorie est déjà abélienne) et on a donc des filtrations de Harder-Narasimhan dans $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$. On vérifie aisément que la filtration de Harder-Narasimhan associée est la filtration de Dieudonné-Manin et le polygone de Harder-Narasimhan, qui est concave, est obtenu à partir du polygone de Newton, qui est convexe, en renversant l'ordre des pentes. Il se trouve que cette filtration est canoniquement scindée (décomposition de Dieudonné-Manin). En fait, comme on le vérifie immédiatement, il y a également une filtration de Harder-Narasimhan associée aux fonctions rang et degré $(\text{ht}, -t_N)$. Cette filtration est une filtration opposée à la filtration précédente et fournit le scindage de la filtration précédente. La décomposition de Dieudonné-Manin est donc donnée par le couple de ces deux filtrations de Harder-Narasimhan opposées.

3.2.4. *φ -modules filtrés.* Voici un exemple qui est formé à partir d'une combinaison des deux exemples précédents. On reprend les notations de l'exemple 3.2.2 précédent. Soit de plus $K|K_0$ une extension de corps. Soit $\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$ la catégorie formée des triplets $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ où $(D, \varphi) \in \text{Mod}_{K_0}^\varphi$ et $\text{Fil}^\bullet D_K$ est une filtration décroissante de $D \otimes_{K_0} K$ vérifiant $\text{Fil}^i D_K = 0$ pour $i \gg 0$ et $\text{Fil}^i D_K = D_K$ lorsque $i \ll 0$. Il s'agit d'une catégorie exacte, les suites exactes étant les suites exactes d'isocristaux strictement compatibles aux filtrations. Soit la fonction additive point terminal du polygone de Hodge

$$\begin{aligned} t_H : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow \text{VectFil}_{K/K_0} \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \\ (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto (D, \text{Fil}^\bullet D_K). \end{aligned}$$

Prenons pour fonction rang la fonction $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) \mapsto \text{ht}(D, \varphi)$ et pour fonction degré la fonction $t_H - t_N$. On vérifie que le foncteur d'oubli de la filtration

$$\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \text{Mod}_{K_0}^\varphi$$

vérifie les propriétés précédentes i.e. est un foncteur « fibre générique ». On a donc des filtrations de Harder-Narasimhan associées. La catégorie abélienne des objets semi-stables de pente 0 est alors celle des φ -modules filtrés faiblement admissibles au sens de Fontaine ([20]).

On peut pousser l'exemple précédent encore plus loin. Soit la fonction degré

$$(t_H - t_N, -t_N) : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}^2.$$

Munissons \mathbb{Z}^2 de l'ordre lexicographique. Prenons pour fonction rang la fonction hauteur précédente. Il se trouve que le formalisme évoqué précédemment s'étend aux cas où la fonction degré prend ses valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné. On obtient alors des bi-filtrations de Harder-Narasimhan étudiées dans [15].

3.2.5. *φ -modules sur l'anneau de Robba.* Soit \mathcal{R} un anneau de Bezout, c'est à dire un anneau intègre dans lequel tout idéal de type fini est principal. Supposons que l'on dispose d'un sous-corps $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$, muni d'une valuation non triviale $v : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et tel que

$$\mathcal{E}^\times = \mathcal{R}^\times.$$

Supposons donné un endomorphisme σ de \mathcal{R} stabilisant \mathcal{E} et tel que $\forall x \in \mathcal{E}, v(\sigma(x)) = v(x)$. Soit \mathcal{C} la catégorie exacte formée des couples (M, φ) où M est un \mathcal{R} -modules libres de rang fini et φ

un endomorphisme σ -linéaire $\varphi : M \rightarrow M$ tel que le morphisme \mathcal{R} -linéaire induit

$$\Phi : \sigma^* M \longrightarrow M$$

soit un isomorphisme. Les objets inversibles dans la catégorie tensorielle \mathcal{C} sont les couples (M, φ) avec M de rang 1. Il y a alors une identification des classes d'isomorphisme de tels objets

$$\text{Pic}(\mathcal{C}) \simeq H^1(\sigma^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E}^\times).$$

À la classe du cocycle c_σ on associe la classe d'isomorphisme de l'objet (\mathcal{R}, φ) où $\forall x \in \mathcal{R}$, $\varphi(x) = c_\sigma \sigma(x)$. Puisque la valuation v est invariant sous σ elle induit une fonction additive degré

$$\text{deg} : \text{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

normalisée de telle manière qu'avec l'identification précédente, ce soit la fonction $[c_\sigma] \mapsto -v(c_\sigma)$ sur les classes de cocycles. Pour $(M, \varphi) \in \mathcal{C}$ posons

$$\begin{aligned} \text{rg}(M, \varphi) &= \dim_{\mathcal{R}} M \\ \text{deg}(M, \varphi) &= \text{deg}(\det(M, \varphi)). \end{aligned}$$

Ce sont deux fonctions additives. Soit \mathcal{A} la catégorie abélienne formée des couples (V, φ) où V est un $\text{Frac}(\mathcal{R})$ -espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme σ -linéaire. Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (M, \varphi) &\longmapsto (M \otimes \text{Frac}(\mathcal{R}), \varphi \otimes 1) \end{aligned}$$

est un foncteur « fibre générique » au sens précédent. Cela résulte de ce que si M est un \mathcal{R} -module libre alors les sous- \mathcal{R} -modules libres facteurs directs dans M sont en bijection avec les sous- $\text{Frac}(\mathcal{R})$ -espaces vectoriels de dimension finie de $M \otimes \text{Frac}(\mathcal{R})$ via les correspondances $N \mapsto N \otimes \text{Frac}(\mathcal{R})$ et $V \mapsto V \cap M$ (cette propriété est vérifiée pour tout anneau de Bezout). De plus si

$$u : (M, \varphi) \longrightarrow (M', \varphi')$$

est un morphisme dans \mathcal{C} qui est un isomorphisme « en fibre générique »,

$$\det u : \det(M, \varphi) \longrightarrow \det(M', \varphi')$$

en est également un. Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire suivante : si $\lambda \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda^{\sigma-1} \in \mathcal{E}$ alors $v(\lambda^{\sigma-1}) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\lambda \in \mathcal{E}$. De cela on déduit aisément que

$$\text{deg}(M, \varphi) \leq \text{deg}(M', \varphi')$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.

Le formalisme précédent s'applique et on dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans \mathcal{C} . Lorsque \mathcal{R} est l'anneau de Robba et \mathcal{E} le sous-anneau des fonctions bornées, on retrouve les filtrations étudiées dans [32] (cependant la convention de signe dans [32] et opposée à la notre).

3.2.6. Modules de Breuil-Kisin. Soit X un schéma noethérien irréductible de dimension 1 muni d'un morphisme fini et plat $\sigma : X \rightarrow X$ de degré $\text{deg}(\sigma) > 1$. Soit \mathcal{C} la catégorie formée des couples (\mathcal{E}, φ) où \mathcal{E} est un faisceau cohérent sur X sans composantes immergées (i.e. si $j : \eta \rightarrow X$ désigne le point générique de X , $\mathcal{E} \hookrightarrow j_* j^* \mathcal{E}$) et $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme σ -linéaire tel que le morphisme linéaire associé

$$\Phi : \sigma^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

soit un isomorphisme au point générique de X . Il s'agit d'une catégorie exacte ; c'est une sous-catégorie stable par extensions dans la catégorie abélienne formée des couples (\mathcal{E}, φ) où \mathcal{E} est un faisceau cohérent sur X muni d'un morphisme σ -linéaire. Posons pour $(\mathcal{E}, \varphi) \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{E}, \varphi) &= \text{long}_{\mathcal{O}_{X,\eta}}(\mathcal{E}_\eta) \\ \text{deg}(\mathcal{E}, \varphi) &= \text{long}(\text{coker}(\Phi)). \end{aligned}$$

où le faisceau cohérent $\text{coker} \Phi$ est supporté en un nombre fini de points et on peut donc définir sa longueur. Ces deux fonctions sont additives. Soit \mathcal{A} la catégorie abélienne formée des couples (N, φ) où N est un $\mathcal{O}_{X,\eta}$ -module de type fini et φ un morphisme σ -linéaire de N dans lui-même. Alors, le foncteur fibre générique

$$(\mathcal{E}, \varphi) \longmapsto (\mathcal{E}_\eta, \varphi_\eta)$$

satisfait les hypothèses précédentes. De plus, si

$$u : (\mathcal{E}, \varphi) \longrightarrow (\mathcal{E}', \varphi')$$

est un morphisme dans \mathcal{C} qui est un isomorphisme générique, alors

$$\deg(\mathcal{E}', \varphi') = \deg(\mathcal{E}, \varphi) + (\deg(\sigma) - 1) \operatorname{long}(\operatorname{coker}(u)) \geq \deg(\mathcal{E}, \varphi)$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme. On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans \mathcal{C} .

Soit maintenant R un anneau local régulier de dimension 2 et \mathfrak{p} un idéal premier de hauteur 1 dans R . Supposons R muni d'un endomorphisme $\sigma : R \rightarrow R$ fini et plat de degré > 1 . On fait également l'hypothèse que $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Soit un entier $n \geq 1$. Posons $X_n = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p}^n)$ et $\sigma : X_n \rightarrow X_n$ le morphisme induit par σ sur R . Soit \mathcal{C}_n la catégorie de Harder-Narasimhan précédente précédente associée à (X_n, σ) et $\ll \mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n \gg$ qui est également une catégorie de

Harder-Narasimhan. D'après la formule d'Auslander-Buchsbaum, un R -module annulé par une puissance de \mathfrak{p} est sans composantes immergées si et seulement si il est de dimension projective 1. La catégorie \mathcal{C} s'identifie donc à celle des couples (M, φ) où M est un R -module annulé par une puissance de \mathfrak{p} de dimension projective 1 et $\varphi : M \rightarrow M$ un morphisme σ -linéaire qui est un isomorphisme σ -linéaire au point générique de $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p})$. Si $u \in \mathfrak{m}_R \setminus \mathfrak{p}$, on peut reformuler les conditions précédentes en disant que M est un R -module annulé par une puissance de \mathfrak{p} , sans u -torsion, et $\varphi : M \rightarrow M$ est un morphisme σ -linéaire tel que $\varphi \otimes \sigma : M[\frac{1}{u}] \rightarrow M[\frac{1}{u}]$ soit un isomorphisme σ -linéaire. Munie des fonctions

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M, \varphi) &= \operatorname{long}_{R[\frac{1}{u}]} M[\frac{1}{u}] \\ \deg(M, \varphi) &= \operatorname{long}_R M/R.\varphi(M), \end{aligned}$$

la catégorie \mathcal{C} est de Harder-Narasimhan.

Lorsque $R = W[[u]]$ où W désigne les vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique $p > 0$, σ est l'endomorphisme continu de R tel que $\sigma(u) = u^p$ et $\sigma|_W$ est le Frobenius de W , $\mathfrak{p} = pW$, on retrouve les catégories d'objets étudiées dans [8] et [33].

3.2.7. Schémas en groupes finis et plats. Les catégories exactes considérées dans les exemples précédents sont toutes des catégories tensorielles. De plus, la fonction degré sur ces catégories est obtenue par composition d'un morphisme degré

$$\deg : \operatorname{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

où $\operatorname{Pic}(\mathcal{C})$ désigne le groupe formé des classes d'isomorphisme d'objets de rang 1, et d'une application déterminant

$$\det : \mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Pic}(\mathcal{C})$$

additive sur les suites exactes de \mathcal{C} .

Soit maintenant K un corps valué complet pour une valuation non triviale à valeurs dans \mathbb{R} . Notons p la caractéristique du corps résiduel de K . Soit \mathcal{C} la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur \mathcal{O}_K , d'ordre une puissance de p et étales en fibre générique. Elle est munie de deux fonctions additives hauteur et degré ([17]) où

$$\operatorname{ht}(G) = \log_p |G|$$

et

$$\deg(G) = \sum_i v(a_i) \quad \text{si } \omega_G \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_K/a_i \mathcal{O}_K.$$

Soit \mathcal{A} la catégorie abélienne des schémas en groupes commutatifs étales sur K . Il y a un foncteur fibre générique

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ G &\longmapsto G \otimes K. \end{aligned}$$

Il est démontré dans [17] que les axiomes précédents sont satisfaits et que l'on dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan pour les objets de \mathcal{C} relativement à la fonction pente $\frac{\text{deg}}{\text{ht}}$.

Supposons K de valuation discrète, de caractéristique p et à corps résiduel k parfait, $K \simeq k((u))$. On peut alors montrer que la catégorie \mathcal{C} est équivalente à celle des couples (M, φ) où M est un $W(k)[[u]]$ -module annulé par une puissance de p sans u -torsion et φ un endomorphisme σ -linéaire de M induisant un isomorphisme σ -linéaire après inversion de u (on a déjà rencontré cette catégorie dans la section 3.2.6). Via cette équivalence de catégories les filtrations de Harder-Narasimhan se correspondent. Cette catégorie est munie d'un produit tensoriel. La fonction degré est définie via une application degré sur les objets de hauteur 1 et une application déterminant.

Supposons K de valuation discrète, de caractéristique 0 et à corps résiduel k parfait. On a donc $K \simeq K_0[[u]]/(E(u))$ où $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}]$ et $E \in \mathcal{O}_{K_0}[[u]]$ est un polynôme unitaire d'Eisenstein. D'après [33] la catégorie \mathcal{C} est équivalente à celle des couples (M, φ) où M est un $W(k)[[u]]$ -module annulé par une puissance de p sans u -torsion et φ un endomorphisme σ -linéaire de M tel que $M/W(k)[[u]].\varphi(M)$ soit annulé par $E(u)$. Ce n'est donc pas une catégorie tensorielle, on ne peut définir une application déterminant sur celle-ci. Néanmoins, on dispose d'une telle application sur la catégorie formée des couples (M, φ) comme dans la section précédente. On peut donc définir le déterminant, $\det G$ pour $G \in \mathcal{C}$, comme objet de la catégorie précédente mais pas de \mathcal{C} . Les filtrations de Harder-Narasimhan dans \mathcal{C} sont alors un cas particulier des filtrations dans la catégorie précédente (via l'équivalence de [33]).

Supposons que la valuation de K ne soit pas discrète ou bien le corps résiduel non parfait. La fonction degré précédente ne provient pas alors a priori d'une fonction degré sur des objets de rang 1 composée avec une application déterminant.

4. CLASSIFICATION DE FIBRÉS

4.1. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann. Avant de nous lancer dans la classification des fibrés sur les courbes qui nous intéresse, on revisite le théorème de classification des fibrés sur la droite projective de Grothendieck.

Définition 4.1. *Une sphère de Riemann est une courbe complète X possédant un point $\infty \in X$ de degré 1, tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine, vérifiant $\text{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ et telle que*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-\infty)) = 0.$$

Une telle courbe satisfait aux hypothèses de la section 2.3. On a donc $\text{deg} : \text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. On notera pour tout entier k , $\mathcal{O}_X(k) = \mathcal{O}_X(k.\infty)$ pour un point de degré 1, ∞ . Remarquons que si $k \in \mathbb{Z}$ et \mathcal{E} est un fibré sur X ,

$$\mu(\mathcal{E}(k)) = \mu(\mathcal{E}) + k$$

et que \mathcal{E} est semi-stable si et seulement si $\mathcal{E}(k)$ l'est. Enfin, pour une telle courbe, $H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ lorsque $k < 0$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ lorsque $k \geq -1$. En particulier, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et on peut penser à X comme une « courbe de genre nulle ».

Dans la suite on appellera sous-fibré un sous-fibré localement facteur direct i.e. les sous-objets stricts de la catégorie des fibrés. Si $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme de fibrés on notera $\text{Im}(u)$, un sous-fibré de \mathcal{F} , l'image de u dans la catégorie des fibrés i.e. l'adhérence schématique de l'image de u en fibre générique.

Voici la réinterprétation du théorème de Grothendieck de classification des fibrés sur \mathbb{P}^1 ([23]).

Théorème 4.2. *Soit X une sphère de Riemann.*

- (1) *Les fibrés semi-stables sur X sont les fibrés isomorphes à un fibré de la forme $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus a}$ pour des entiers $d \in \mathbb{Z}$ et $a \geq 0$.*
- (2) *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.*

(3) Pour tout entier n , l'application

$$\begin{aligned} \{(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n \mid d_1 \geq \dots \geq d_n\} &\longrightarrow \{\text{classes d'isomorphismes de fibrés de rang } n \text{ sur } X\} \\ (d_1, \dots, d_n) &\longmapsto \left[\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_x(d_i) \right] \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. Commençons par remarquer que le point (1) entraîne le reste du théorème. En effet, pour des entiers $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d_2), \mathcal{O}_X(d_1)) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(d_1 - d_2))$$

qui est nul si $d_1 > d_2$. Cela entraîne facilement l'assertion (2) à partir de (1). La dernière assertion s'en déduit aussitôt.

Montrons le point (1). Tout d'abord constatons que si $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{Z}$, le fibré $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus a}$ est semi-stable puisque somme directe de fibrés semi-stables de même pentes (cf. théorème 3.4). On montre maintenant l'assertion suivante par récurrence sur l'entier n : tout fibré semi-stable de rang inférieur ou égal à n est isomorphe à un fibré de la forme $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus m}$ pour des entiers $d \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq n$. Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n . Soit \mathcal{E} un fibré semi-stable de rang $n + 1$. Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ un sous-fibré en droites de degré maximal. On a donc

$$\deg \mathcal{L} \leq \mu(\mathcal{E}).$$

Posons

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}/\mathcal{L}.$$

La première pente du polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{E}' est supérieure ou égale à $\mu(\mathcal{E}')$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée au premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de \mathcal{E}' , il existe un sous-fibré en droites $\mathcal{L}' \subset \mathcal{E}'$ vérifiant

$$\deg(\mathcal{L}') \geq \mu(\mathcal{E}').$$

On a, par semi-stabilité de \mathcal{E} , $\mu(\mathcal{E}') \geq \mu(\mathcal{E})$. On obtient finalement que

$$\deg(\mathcal{L}) \leq \mu(\mathcal{E}) \leq \deg(\mathcal{L}').$$

Soit \mathcal{E}'' le sous-fibré de \mathcal{E} image réciproque de \mathcal{L}' par la projection $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$. On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0.$$

Soient $d = \deg \mathcal{L}$ et $d' = \deg \mathcal{L}'$. On a donc $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(d)$ et $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{O}_X(d')$. Distinguons maintenant deux cas.

- Supposons $d \geq d'$, c'est à dire $d = d' = \mu(\mathcal{E})$. Alors, \mathcal{L} et \mathcal{E} étant semi-stables de même pente, \mathcal{E}' est semi-stable de pente $\mu(\mathcal{E})$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(d)^n$. Mais, puisque $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d)^n, \mathcal{O}_X(d)) = H^1(X, \mathcal{O}_X)^n = 0$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0$$

est scindée et donc $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$. On a donc conclu dans ce cas là.

- Supposons $d \leq d' - 1$. Appliquons $\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), -)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0.$$

On obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathcal{L})}_{\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(-1))=0} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathcal{E}'') \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathcal{L}')}_{\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(d'-d-1))} \longrightarrow \underbrace{\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d+1), \mathcal{L}')}_{\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))=0}$$

et donc

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathcal{E}'') \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(d' - d - 1)) \neq 0.$$

Si $u : \mathcal{O}_X(d+1) \rightarrow \mathcal{E}''$ est un morphisme non nul, puisque u est un isomorphisme en fibre générique, $\text{Im}(u)$ est un sous-fibré en droites de \mathcal{E}'' , et donc de \mathcal{E} , de degré

$$\deg(\text{Im}(u)) \geq \deg(\mathcal{O}_X(d+1)) = d + 1.$$

Cela contredit le fait que \mathcal{L} soit un sous-fibré en droites de degré maximal dans \mathcal{E} . Ce cas là est donc impossible. \square

4.2. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann généralisées.

4.2.1. *Une remarque sur les fibrés de rang 2.* Soit X une courbe complète possédant un point $\infty \in X$ de degré 1 tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine et $\text{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ (cf. section 2.3).

Proposition 4.3. *Supposons que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Sont équivalents :*

- (1) *Il existe un fibré semi-stable de rang 2 sur X qui n'est pas somme directe de deux fibrés en droites.*
- (2) *$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$.*
- (3) *Pour $\infty \in X$ un point de degré 1 tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine égal à $\text{Spec}(B)$, l'anneau principal $(B, -v_\infty)$ n'est pas euclidien.*

Démonstration. L'équivalence entre les deux derniers points résulte de la proposition 2.6. Soit maintenant \mathcal{E} un fibré semi-stable de rang 2 ne pouvant s'écrire comme somme directe de deux fibrés en droites. Soit \mathcal{L} un sous-fibré en droites de \mathcal{E} de degré maximal et $\mathcal{L}' = \mathcal{E}/\mathcal{L}$. Notons $d_1 = \deg(\mathcal{L})$ et $d_2 = \deg(\mathcal{L}')$. Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(d_1) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(d_2) \longrightarrow 0.$$

La semi-stabilité de \mathcal{E} induit les inégalités

$$d_1 \leq \mu(\mathcal{E}) \leq d_2.$$

Par hypothèse cette suite exacte n'est pas scindée. Or, on a l'égalité $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d_2), \mathcal{O}_X(d_1)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(d_1 - d_2))$. Donc, puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$,

$$d_1 < d_2.$$

Appliquons $\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), -)$ à la suite exacte précédente. On obtient une suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d_2 - d_1 - 1)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))$$

Si l'on avait $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$ on aurait donc

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathcal{O}_X(d_2 - d_1 - 1)) \neq 0.$$

On disposerait donc d'un morphisme $u : \mathcal{O}_X(d_1 + 1) \rightarrow \mathcal{E}$ non nul. Son image $\text{Im}(u)$ serait un fibré en droites de degré supérieur ou égal à $d_1 + 1$. Cela est impossible grâce au choix fait de \mathcal{L} . On a donc $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$.

Supposons réciproquement que $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0$$

une extension associée à une classe non nulle dans $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))$. Montrons que \mathcal{E} est semi-stable et ne peut s'écrire comme somme directe de deux fibrés en droites. Soit \mathcal{L} un sous-fibré en droites de \mathcal{E} . Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, $\deg(\mathcal{L}) = 0 \leq \frac{1}{2} = \mu(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{L} \neq \mathcal{O}_X$, le morphisme composé

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(1)$$

est un isomorphisme en fibre générique. On a donc

$$\deg(\mathcal{L}) \leq 1.$$

Si $\deg(\mathcal{L}) = 1$, le morphisme $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X(1)$ est un isomorphisme et la suite exacte précédente est scindée, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. On a donc $\deg(\mathcal{L}) \leq 0 \leq \mu(\mathcal{E})$. Le fibré \mathcal{E} est donc semi-stable. Montrons maintenant que \mathcal{E} n'est pas somme directe de deux fibrés en droites. Supposons donc par l'absurde que $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Soient $d_1 = \deg \mathcal{L}_1$ et $d_2 = \deg \mathcal{L}_2$. Par semi-stabilité de \mathcal{E} , étant donné que $\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}$, $d_1 \leq 0$ et $d_2 \leq 0$. Mais cela est impossible car $d_1 + d_2 = \deg(\mathcal{E}) = 1$. \square

4.2.2. Morphismes étales finis de courbes.

Définition 4.4. *Un morphisme étale fini de courbes est un morphisme étale fini des schémas sous-jacents aux courbes, $f : X \rightarrow Y$, tel que pour tout $x \in X$,*

$$\deg(x) = [k(x) : k(f(x))] \cdot \deg(f(x)).$$

Définition 4.5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini de courbes. Pour $D = \sum_{x \in |X|} m_x [x] \in \text{Div}(X)$ on pose*

$$f_* D = \sum_{x \in |X|} m_x \cdot [k(x) : k(f(x))] \cdot [f(x)].$$

Pour $D = \sum_{y \in |Y|} m_y \cdot [y] \in \text{Div}(Y)$ on pose

$$f^* D = \sum_{x \in |X|} m_{f(x)} \cdot [x].$$

Pour un tel morphisme étale de courbes on a donc deux morphismes

$$\text{Div}(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_*} \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} \text{Div}(Y)$$

vérifiant

$$f_* f^* = \deg(f) \cdot \text{Id}.$$

On a de plus les formules

$$\begin{aligned} \deg(f_* D) &= \deg(D) \\ \deg(f^* D) &= \deg(f) \cdot \deg(D). \end{aligned}$$

Le lemme qui suit ne pose pas de problème.

Lemme 4.6. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini de courbes. Les diagramme suivants sont commutatifs*

$$\begin{array}{ccccc} F(X)^\times & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(X) & & F(X)^\times & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \\ & & \downarrow f_* & & \uparrow & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ N_{F(X)/F(Y)} & \downarrow & & & & & & & \\ F(Y)^\times & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(Y) & & F(Y)^\times & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(Y) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y). \end{array}$$

Proposition 4.7. *Étant donné un morphisme étale fini de schémas $f : X \rightarrow Y$ il y a un isomorphisme canonique de fibrés en droites*

$$\det(f_* \mathcal{O}_X)^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y.$$

Démonstration. On peut supposer f de degré constant d . La donnée de f est alors équivalente à celle du \mathfrak{S}_d -torseur étale sur Y , $E = \text{Isom}_Y(\{1, \dots, d\}, X)$. Soit $\epsilon : \mathfrak{S}_d \rightarrow \mu_2$ la signature. Le μ_2 -torseur $\epsilon_* E$ définit via $\mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m$ un fibré en droites \mathcal{N} de carré trivial. Montrons que $\det(f_* \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{N}$. Soit pour cela $\pi : E \rightarrow Y$ le morphisme structural de notre toseur. Il y a alors un isomorphisme

$$\pi^*(f_* \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \mathcal{O}_E$$

qui induit un isomorphisme

$$\pi^*(\det(f_* \mathcal{O}_X)) = \det(\pi^*(f_* \mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E.$$

Cet isomorphisme est un isomorphisme de fibrés en droites sur E munis d'une donnée de descente relativement à l'action de \mathfrak{S}_d sur E . On vérifie alors que la donnée de descente sur le membre de droite du dernier isomorphisme est donnée par la signature d'une permutation. \square

Remarque 4.8. *En général, on n'a pas $\det(f_*\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$. Considérons par exemple le cas où 2 est inversible sur Y et $\text{Pic}(Y)$ possède de la 2-torsion non-triviale. Soit \mathcal{L} un fibré en droites non-trivial muni d'un isomorphisme $\mathcal{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y$ et $f : X \rightarrow Y$ le μ_2 -torseur associé. Alors, $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{L}$ qui est donc de déterminant non-trivial.*

Remarque 4.9. *Une autre preuve de la proposition 4.7 consiste à regarder la forme quadratique trace : $f_*\mathcal{O}_X \times f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ dont le discriminant fournit l'isomorphisme cherché.*

Lemme 4.10. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale de courbe et $D \in \text{Div}(X)$. Il y a alors un isomorphisme de fibrés en droites*

$$\det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \simeq \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_Y(f_*D).$$

Démonstration. On peut supposer f de degré constant d . Soit $D' \in \text{Div}(Y)$ et supposons l'assertion vérifiée pour le diviseur $D + f^*D'$. La formule de projection donne

$$\det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \otimes \mathcal{O}_Y(dD') \simeq \det(f_*\mathcal{O}_X(D + f^*D')).$$

Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \det(f_*\mathcal{O}_X(D + f^*D')) &\simeq \mathcal{O}_Y(f_*(D + f^*D')) \\ &= \mathcal{O}_Y(f_*D + dD') \\ &= \mathcal{O}_Y(f_*D) \otimes \mathcal{O}_Y(dD') \end{aligned}$$

et on en déduit donc le résultat pour le diviseur D .

Quitte à remplacer D par $D + f^*D'$ on peut donc supposer que $D \geq 0$ et donc, si $D = \sum_{x \in |X|} a_x[x]$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \bigoplus_{x \in |X|} i_{x*}\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{a_x} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $x \in |X|$, puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est plat non-ramifié sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, le choix d'un relèvement dans $\mathcal{O}_{X,x}$ d'une base de $k(x)$ comme $k(f(x))$ -espace vectoriel induit des isomorphismes de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ -modules

$$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^k \simeq (\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)})^{[k(x):k(f(x))]}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prenant l'image directe de la suite exacte précédent on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \bigoplus_{y \in |Y|} i_{y*} \left(\bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} (\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^{a_x})^{[k(x):k(y)]} \right) \longrightarrow 0.$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \det(f_*\mathcal{O}_X) \longrightarrow \det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow \bigoplus_{y \in Y} i_{y*}\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^{b_y} \longrightarrow 0$$

où $b_y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} [k(x) : k(y)]a_x$. Le résultat s'en déduit. \square

Proposition 4.11. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini de courbes. Notons $\text{Div}(X)/\sim$ les classes d'équivalences rationnelles de diviseurs et considérons l'isomorphisme $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Div}(X)/\sim$ envoyant la classe d'isomorphisme de $\mathcal{O}_X(D)$ sur la classe d'équivalence de D . Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \longrightarrow & (\text{Div}(X)/\sim) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\ \det \circ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \text{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \longrightarrow & (\text{Div}(Y)/\sim) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \end{array}$$

Remarque 4.12. *La proposition précédente ne dit rien d'autre que le fait qu'on dispose d'un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck modulo la 2-torsion pour les morphismes étales finis. La remarque 4.8 fournit quant-à elle le contre exemple le plus simple qui soit à l'existence d'un tel théorème à coefficients entiers.*

Lemme 4.13. *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini localement libre de schémas et \mathcal{E} un fibré vectoriel sur X . Il y a un isomorphisme*

$$\det(f_*\mathcal{E}) \simeq \det(f_* \det \mathcal{E}).$$

Démonstration. Soit un entier $n \geq 1$. Notons $\text{Res}_{X/Y}$ la restriction des scalaires à la Weil et $N_{X/Y} : \text{Res}_{X/Y}\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ la norme. D'après le lemme 1, A.3.112, de [7], il y a un diagramme commutatif de Y -schémas en groupes

$$\begin{array}{ccccc} \text{Res}_{X/Y}\text{GL}_n & \xrightarrow{\text{Res}_{X/Y} \det} & \text{Res}_{X/Y}\mathbb{G}_m & \xrightarrow{N_{X/Y}} & \mathbb{G}_m \\ \downarrow & & & & \parallel \\ \text{GL}(f_*\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\det} & \text{GL}(\det(f_*\mathcal{O}_X)) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{G}_m. \end{array}$$

Si \mathcal{E} est localement libre de rang n , le lemme en résulte par application du diagramme précédent au GL_n -torseur associé à \mathcal{E} . \square

De ce lemme et de la proposition 4.11 on déduit la proposition suivante.

Proposition 4.14. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini de courbes complètes et \mathcal{E} un fibré vectoriel sur X . Alors,*

$$\deg(f_*\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E}).$$

Résumons les résultats précédents dans la proposition qui suit.

Proposition 4.15. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini de courbes. Supposons Y complète. Alors, X est complète. Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel sur X ,*

$$\begin{aligned} \text{rg}(f_*\mathcal{E}) &= \deg(f) \cdot \text{rg}(\mathcal{E}) \\ \deg(f_*\mathcal{E}) &= \deg(\mathcal{E}) \\ \mu(f_*\mathcal{E}) &= \frac{1}{\deg(f)} \mu(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel sur Y ,

$$\begin{aligned} \text{rg}(f^*\mathcal{E}) &= \text{rg}(\mathcal{E}) \\ \deg(f^*\mathcal{E}) &= \deg(f) \cdot \deg(\mathcal{E}) \\ \mu(f^*\mathcal{E}) &= \deg(f) \mu(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Puisque nous l'utiliserons maintes fois, rappelons le lemme qui suit.

Lemme 4.16. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de courbes étale fini galoisien de groupe Γ . Alors, les foncteurs $\mathcal{E} \mapsto f^*\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \mapsto (f_*\mathcal{F})^\Gamma$ induisent des équivalences inverses entre la catégorie des fibrés sur Y et celle des fibrés Γ -équivariants sur X .*

Exemple 4.17. *Avec les hypothèses du lemme précédent, si \mathcal{E} est un fibré sur X , $f^*f_*\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} \sigma^*\mathcal{E}$. Ainsi, le fibré $f_*\mathcal{E}$ sur Y correspond au fibré équivariant induit $\text{Ind}_{\{1\}}^\Gamma \mathcal{E}$.*

Le lemme suivant sera crucial dans la suite.

Lemme 4.18. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale fini galoisien de courbes complètes. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur Y . Soit*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Alors,

$$0 = f^*\mathcal{E}_0 \subsetneq f^*\mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq f^*\mathcal{E}_r = f^*\mathcal{E}$$

est la filtration de Harder-Narasimhan de $f^*\mathcal{E}$. En particulier, \mathcal{E} est semi-stable si et seulement si $f^*\mathcal{E}$ l'est.

Démonstration. Soit le groupe fini $\Gamma = \text{Aut}(X/Y)$. Remarquons que si \mathcal{F} est un fibré sur X alors pour tout $\sigma \in \Gamma$,

$$\mu(\mathcal{F}^\sigma) = \mu(\mathcal{F}).$$

Afin de démontrer l'assertion du lemme il suffit de montrer que si \mathcal{E} est semi-stable alors $f^*\mathcal{E}$ l'est. Mais par unicité de la filtration d'Harder-Narasimhan de $f^*\mathcal{E}$ et la propriété précédente d'invariance de la fonction μ sous Γ , cette filtration est Γ -invariante. Ainsi si \mathcal{E} est semi-stable sur Y , la filtration de Harder-Narasimhan de $f^*\mathcal{E}$ descend à Y et est donc triviale. \square

Soit X un schéma muni d'une action d'un groupe Γ . Un fibré équivariant sur X est un couple $(\mathcal{E}, (c_\sigma)_{\sigma \in \Gamma})$ où \mathcal{E} est un fibré sur X et pour tout $\sigma \in \Gamma$,

$$c_\sigma : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \sigma^*\mathcal{E}$$

vérifiant

$$\forall \sigma, \tau \in \Gamma, \quad \tau^*c_\sigma \circ c_\tau = c_{\sigma\tau}.$$

Pour un tel fibré équivariant le groupe $\text{Aut}(\mathcal{E})$ est muni d'une action de Γ , $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{E})$, en posant

$$\forall f \in \text{Aut}(\mathcal{E}), \quad f^\sigma = c_{\sigma^{-1}}^{-1} \circ s^{-1*}f \circ c_{\sigma^{-1}}.$$

Maintenant, si $(c'_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ est une autre structure de fibré équivariant sur \mathcal{E} , posons pour $\sigma \in \Gamma$

$$d_\sigma = c'_{\sigma^{-1}}^{-1} \circ c_{\sigma^{-1}} \in \text{Aut}(\mathcal{E}).$$

On vérifie que $(d_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ est un 1-cocycle, élément de $Z^1(\Gamma, \text{Aut}(\mathcal{E}))$. Réciproquement, la donnée d'un tel cocycle définit une nouvelle structure de fibré équivariant sur \mathcal{E} . On vérifie de plus que $(\mathcal{E}, (c'_\sigma)_\sigma) \simeq (\mathcal{E}, (c''_\sigma)_\sigma)$ si et seulement si les cocycles précédents sont cohomologues. On déduit de cela la proposition qui suit.

Proposition 4.19. *Soit \mathcal{E} un fibré muni d'une structure de fibré Γ -équivariant et $\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{E})$ l'action associée de Γ .*

- (1) *L'ensemble des structures de fibré Γ -équivariant sur \mathcal{E} est en bijection avec l'ensemble des 1-cocycles dans $Z^1(\Gamma, \text{Aut}(\mathcal{E}))$, au 1-cocycle c est associé un fibré Γ -équivariant tordu $\mathcal{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c$.*
- (2) *Les fibrés Γ -équivariants $\mathcal{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c_1$ et $\mathcal{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c_2$ sont isomorphes si et seulement si les cocycles c_1 et c_2 diffèrent d'un cobord*
- (3) *Les classes d'isomorphisme de fibrés équivariants dont le fibré sous-jacent est isomorphe à \mathcal{E} est en bijection avec l'ensemble*

$$H^1(\Gamma, \text{Aut}(\mathcal{E})).$$

4.2.3. Sphères de Riemann généralisées.

Définition 4.20. *On appelle sphère de Riemann généralisée une courbe complète X munie d'une tour de revêtements étales finis galoisienne de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$, $(X_h)_{h \geq 1}$, $X_1 = X$,*

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 X_{h'} \\
 \downarrow \\
 X_h \\
 \downarrow \\
 \vdots \\
 \downarrow \\
 X_1 = X
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} h\mathbb{Z}/h'\mathbb{Z} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}
 \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) *Pour tout $h \geq 1$, il existe un point $\infty_h \in X_h$ de degré 1 tel que*
 - $X_h \setminus \{\infty_h\} = \text{Spec}(B)$ est affine,

- on a $\text{Pic}(X_h \setminus \{\infty_h\}) = 0$, c'est à dire B est principal.
- (2) Pour tout h , $H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) = 0$.
- (3) Pour tout h , pour tout $x \in X_h$, si $\pi_h : X_h \rightarrow X$, la fibre $\pi_h^{-1}(x)$ est formée de h -points distincts (qui sont donc de même degré que x).
- (4) Pour $h|h'$, notons $\pi_{h',h} : X_{h'} \rightarrow X_h$. On demande alors que pour tout $h|h'$, $\pi_{h',h*} \mathcal{O}_{X_{h'}} \simeq \mathcal{O}_{X_h}^{h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ comme \mathcal{O}_{X_h} -module muni d'une action de $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, l'action de $h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{O}_{X_h}^{h'\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ étant celle par permutations.

Exemple 4.21. Reprenons les notations des exemples 1.12 et 1.15. Soit $P_h = \bigoplus_{d \geq 0} (B_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^d}$ et $X_h = \text{Proj}(P_h)$. Pour $h|h'$, et $d \geq 0$, l'inclusion naturelle $(B_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^d} \subset (B_{\text{cris}}^+)^{\varphi^{h'} = p^{dh'/h}}$ induit un morphisme d'algèbres graduées $P_{h,\bullet} \rightarrow P_{h',h'/h,\bullet}$. On montre plus loin que cela induit un isomorphisme $X_{h'} = X_h \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} \mathbb{Q}_{p^{h'}}$ et que la tour de courbes $(X_h)_{h \geq 1}$ est une sphère de Riemann généralisée.

Soit $(X_h)_{h \geq 1}$ une sphère de Riemann généralisée. Commençons par remarquer que pour tout h , $(X_{h'})_{h|h'}$ est également une sphère de Riemann généralisée. Notons F_h le corps de définition de X_h . Puisque $\pi_{h*} \mathcal{O}_{X_h} \simeq \mathcal{O}_X^h$, F_h est une extension de degré h de F . De plus, $F = F_h^{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$ et donc $F_h|F$ est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. L'extension $F_\infty = \cup_h F_h$ est donc une extension galoisienne de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$ de F .

Les courbes $(X_h)_h$ satisfont aux hypothèses de la section 2.3. On fixe désormais un système compatible de points de degré 1, $(\infty_h)_h \in \lim_{\leftarrow h \geq 1} |X_h|$ et on note pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathcal{O}_{X_h}(k) = \mathcal{O}_X \left(\sum_{i=0}^{k-1} [\sigma^i(\infty_h)] \right)$$

où $\sigma = \bar{1} \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} = \text{Aut}(X_h/X)$. Pour $k \leq 0$ on pose $\mathcal{O}_{X_h}(k) = \mathcal{O}_{X_h}(-k)^{-1}$.

On a donc

$$\begin{array}{ccc} & \text{deg} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \text{Pic}(X_h) \\ d \mapsto & & [\mathcal{O}_{X_h}(d)] \end{array}$$

En particulier $\mathcal{O}_{X_h}(d) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(1)^{\otimes d}$. Néanmoins, il est préférable de prendre la définition précédente pour $\mathcal{O}_{X_h}(d)$. Elle fournit en effet une identification canonique $\pi_{nh,h}^* \mathcal{O}_{X_h}(d) = \mathcal{O}_{X_{nh}}(nd)$ qui fait apparaître plus clairement la structure de fibré $\text{Gal}(F_{nh}|F_h)$ -équivariant sur $\mathcal{O}_{X_{nh}}(n)$.

Définition 4.22. Soient $d \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}_{>0}$. On note

$$\mathcal{O}_X(d, h) = \pi_{h*}(\mathcal{O}_{X_h}(d))$$

comme fibré vectoriel sur X . Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ et $h > 0$, on note

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \mathcal{O}_X(d, h).$$

Pour un entier n , on utilise les mêmes notations pour la sphère de Riemann généralisée $(X_h)_{n|h}$ i.e. $\mathcal{O}_{X_n}(d, h) = \pi_{nh,n*}(\mathcal{O}_{X_{nh}}(d))$.

Proposition 4.23. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ notons $m(\lambda)$ l'ordre de $\lambda \bmod \mathbb{Z}$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Soient $d \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{N}_{>0}$. On a les propriétés suivantes :

- (1) Si $\delta = (d, h)$,

$$\mathcal{O}_X(d, h) \simeq \mathcal{O}_X\left(\frac{d}{h}\right)^{\oplus \delta}.$$

- (2) Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$\begin{aligned} \pi_n^*(\mathcal{O}_X(d, h)) &\simeq \mathcal{O}_{X_n}(nd, h) \\ \pi_{n*}(\mathcal{O}_{X_n}(d, h)) &\simeq \mathcal{O}_X(d, nh). \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\pi_n^*(\mathcal{O}_X(\lambda)) &\simeq \mathcal{O}_{X_n}(n\lambda)^{\oplus \frac{m(\lambda)}{m(n\lambda)}} \\ \pi_{n*}(\mathcal{O}_{X_n}(\lambda)) &\simeq \mathcal{O}_X\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\oplus n \frac{m(\lambda)}{m(n\lambda)}}.\end{aligned}$$

(3) Le fibré $\mathcal{O}_X(d, h)$ est semi-stable de pente $\frac{d}{h}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, le fibré $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est semi-stable de pente λ .

(4) Il y a des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(d_1, h_1) \otimes \mathcal{O}_X(d_2, h_2) &\simeq \mathcal{O}_X(d_1 h_2 + d_2 h_1, h_1 h_2) \\ \mathcal{O}_X(d, h)^\vee &\simeq \mathcal{O}_X(-d, h).\end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(\lambda_1) \otimes \mathcal{O}_X(\lambda_2) &\simeq \mathcal{O}_X(\lambda_1 + \lambda_2)^{\oplus \frac{m(\lambda_1)m(\lambda_2)}{m(\lambda_1 + \lambda_2)}} \\ \mathcal{O}_X(\lambda)^\vee &\simeq \mathcal{O}_X(-\lambda).\end{aligned}$$

(5) Pour $\lambda > \mu$,

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = 0.$$

Pour $\lambda \leq \mu$,

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = 0.$$

Démonstration. Point (1) : Décomposons π_h en le composé

$$\pi_h : X_h \xrightarrow{\pi_{h, h/\delta}} X_{h/\delta} \xrightarrow{\pi_{h/\delta}} X.$$

On a donc

$$\mathcal{O}_X(d, h) = \pi_{h/\delta*}(\pi_{h, h/\delta*}(\mathcal{O}_{X_h}(d))).$$

De plus,

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) \simeq \pi_{h, h/\delta}^*(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)).$$

D'après la formule de projection,

$$\pi_{h, h/\delta*} \pi_{h, h/\delta}^*(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)) \simeq (\pi_{h, h/\delta*} \mathcal{O}_{X_h}) \otimes \mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(h/\delta).$$

Utilisant la propriété (4) de la définition 4.20 on obtient que

$$\pi_{h, h/\delta*} \pi_{h, h/\delta}^*(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)) \simeq (\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(h/\delta))^{\oplus \delta}.$$

On conclut quant au point (1).

Point (2) : Le second isomorphisme du point (2) est immédiat. Considérons le premier. Si $(n, h) = 1$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{nh} & \xrightarrow{\pi_{nh, h}} & X_h \\ \pi_{nh, n} \downarrow & & \downarrow \pi_h \\ X_n & \xrightarrow{\pi_n} & X \end{array}$$

est cartésien. On en déduit que

$$\begin{aligned}\pi_n^*(\mathcal{O}_X(d, h)) &= \pi_n^* \pi_{h*}(\mathcal{O}_{X_h}(d)) \\ &\simeq \pi_{nh, n*} \pi_{nh, n}^*(\mathcal{O}_{X_h}(d)) \\ &\simeq \pi_{nh, n*}(\mathcal{O}_{X_{nh}}(nd)) \\ &= \mathcal{O}_{X_n}(nd, h).\end{aligned}$$

En général, si $\delta = (n, h)$, d'après le cas précédent et l'exemple 4.17,

$$\begin{aligned} \pi_n^* \mathcal{O}_X(d, h) &= \pi_{n, n/\delta}^* \pi_{n/\delta}^* (\mathcal{O}_X(d, h)) \\ &\simeq \pi_{n, n/\delta}^* (\mathcal{O}_{X_{n/\delta}}(\frac{n}{\delta}d, h)) \\ &= \pi_{n, n/\delta}^* \pi_{n, n/\delta}^* (\mathcal{O}_{X_n}(\frac{n}{\delta}d, \frac{h}{\delta})) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_n}(\frac{n}{\delta}d, \frac{h}{\delta})^{\oplus \delta}. \end{aligned}$$

D'après le point (1) démontré précédemment, ce dernier fibré s'identifie à $\mathcal{O}_{X_n}(d, h)$.

Point (3) : D'après le point (2) précédent, $\pi_h^* \mathcal{O}_X(d, h) \simeq \mathcal{O}_X(d)^{\oplus h}$ qui est semi-stable comme somme directe de fibrés semi-stables de même pente (cf. théorème 3.4). Le lemme 4.18 permet de conclure.

Point (4) : La seconde égalité du point (4) est immédiate. Considérons la première. Supposons d'abord que $(h_1, h_2) = 1$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X_{h_1 h_2} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X_{h_1} & & X_{h_2} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

est alors cartésien. La formule de Künneth donne alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \otimes \mathcal{O}_X(d_2, h_2) &= \pi_{h_1}^* (\mathcal{O}_{X_{h_1}}(d_1)) \otimes \pi_{h_2}^* (\mathcal{O}_{X_{h_2}}(d_2)) \\ &\simeq \pi_{h_1 h_2}^* (\pi_{h_1 h_2, h_1}^* (\mathcal{O}_{X_{h_1}}(d_1)) \otimes \pi_{h_1 h_2, h_2}^* (\mathcal{O}_{X_{h_2}}(d_2))) \\ &\simeq \pi_{h_1 h_2}^* (\mathcal{O}_{X_{h_1 h_2}}(h_2 d_1) \otimes \mathcal{O}_{X_{h_1 h_2}}(h_1 d_2)) \\ &\simeq \pi_{h_1 h_2}^* (\mathcal{O}_{X_{h_1 h_2}}(h_2 d_1 + h_1 d_2)) \\ &= \mathcal{O}_X(h_2 d_1 + h_1 d_2, h_1 h_2). \end{aligned}$$

En général, soit $\delta = (h_1, h_2)$. Alors, utilisant le cas précédent ainsi que le point (2),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \otimes \mathcal{O}_X(d_2, h_2) &= \pi_{\delta}^* (\mathcal{O}_{X_{\delta}}(d_1, \frac{h_1}{\delta})) \otimes \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \\ &\simeq \pi_{\delta}^* (\mathcal{O}_{X_{\delta}}(d_1, \frac{h_1}{\delta}) \otimes \pi_{\delta}^* \mathcal{O}_X(d_1, h_2)) \\ &\simeq \pi_{\delta}^* (\mathcal{O}_{X_{\delta}}(d_1, \frac{h_1}{\delta}) \otimes \mathcal{O}_{X_{\delta}}(\delta d_1, h_2)) \\ &\simeq \pi_{\delta}^* (\mathcal{O}_{X_{\delta}}(d_1 h_2 + d_1 h_1, \frac{h_1}{\delta} h_2)) \\ &\simeq \mathcal{O}_X(d_1 h_2 + d_2 h_1, h_1 h_2). \end{aligned}$$

Point (5) : La première égalité résulte de ce que $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est semi-stable de pente λ , $\mathcal{O}_X(\mu)$ est semi-stable de pente μ et $\lambda > \mu$ (cf. théorème 3.4). On a, si $m = \frac{m(\lambda)m(\mu)}{m(\mu-\lambda)}$,

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(\mu)) \\ &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(\mu - \lambda))^{\oplus m} \end{aligned}$$

De plus, si $\mathcal{O}_X(\mu - \lambda) = \mathcal{O}(d, h)$,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(\mu - \lambda)) = H^1(X_h, \mathcal{O}_X(d)) = 0$$

d'après la condition (4) de la définition 4.20, car $d \geq 0$. □

Définition 4.24. *Un fibré \mathcal{E} sur X est pur s'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus a}$. Pour un entier h , on définit de même un fibré pur sur X_h .*

D'après la proposition 4.23, \mathcal{E} est pur si et seulement si

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(\deg \mathcal{E}, \text{rg} \mathcal{E}).$$

Proposition 4.25. *Soit \mathcal{E} un fibré sur X et h un entier. Alors, \mathcal{E} est pur si et seulement si $\pi_h^* \mathcal{E}$ l'est.*

Démonstration. Il résulte de la proposition 4.23 que si \mathcal{E} est pur alors $\pi_h^* \mathcal{E}$ l'est. Réciproquement, supposons $\pi_h^* \mathcal{E}$ pur. Quitte à agrandir h on peut supposer que $\pi_h^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a}$ pour un $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\det(\pi_h^* \mathcal{E}) = \pi_h^* \det(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(ad)$$

et donc, en considérant le degré des fibrés en droites précédents, $h|ad$. D'après la proposition 4.23

$$\mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(ad, a) \simeq \pi_h^* \mathcal{O}_X\left(\frac{ad}{h}, a\right).$$

Il y a donc un isomorphisme

$$\pi_h^* \mathcal{E} \simeq \pi_h^* \mathcal{O}_X\left(\frac{ad}{h}, a\right).$$

La proposition 4.19 implique que les classes d'isomorphisme de fibrés $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ -équivariants de fibré sous-jacent isomorphe à $\mathcal{F} = \pi_h^* \mathcal{O}_X\left(\frac{ad}{h}, a\right)$ sont en bijection avec

$$H^1(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, \text{Aut}(\mathcal{F})).$$

Or, $\text{Aut}(\mathcal{F}) \simeq \text{Aut}(\mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a}) \simeq \text{GL}_a(F_h)$. On vérifie de plus que via cet isomorphisme l'action de $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z} = \text{Gal}(F_h|F)$ sur $\text{Aut}(\mathcal{F})$ est l'action canonique sur $\text{GL}_a(F_h)$. La proposition résulte donc du théorème de Hilbert 90,

$$H^1(\text{Gal}(F_h|F), \text{GL}_a(F_h)) = \{*\}.$$

□

4.2.4. *Classification des fibrés.* La preuve du théorème suivant s'inspire fortement de [32].

Théorème 4.26. *Soit $(X_h)_{h \geq 1}$, $X = X_1$, une sphère de Riemann généralisée. Supposons que pour tout h et tout $n \geq 1$, si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}\left(-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés alors $H^0(X_h, \mathcal{E}) \neq 0$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées.

- (1) *Les fibrés semi-stables sur X sont les fibrés purs.*
- (2) *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.*
- (3) *L'application*

$$\begin{aligned} \{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Q}^n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\} &\longrightarrow \{\text{Classes d'isomorphismes de fibrés sur } X\} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(\lambda_i) \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. L'assertion (1) entraîne le reste du théorème. En effet, une fois montré que tous les fibrés semi-stables sont purs, l'assertion (2) résulte du point (5) de la proposition 4.23. Considérons donc l'assertion (1). Le fait que tout fibré pur soit semi-stable est le point (3) de la proposition 4.23.

Montrons maintenant par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ que tout fibré semi-stable de rang inférieur ou égal à n est pur. Remarquons que l'hypothèse de récurrence au rang n implique d'après le raisonnement précédent (le point (1) du théorème entraîne les autres points) que tout fibré de rang inférieur ou égal à n est somme directe de fibrés purs.

Supposons donc l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n et soit \mathcal{E} un fibré semi-stable de rang $n + 1$. D'après la proposition 4.25, pour tout entier $h \geq 1$,

$$\mathcal{E} \text{ est pur} \iff \pi_h^* \mathcal{E} \text{ est pur.}$$

De plus d'après le lemme 4.18, pour tout entier $h \geq 1$,

$$\mathcal{E} \text{ est semi-stable} \iff \pi_h^* \mathcal{E} \text{ est semi-stable.}$$

On peut donc, quitte à remplacer \mathcal{E} par $\pi_h^* \mathcal{E}$ et X par X_h avec h grand, supposer que $\mu(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$. De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{E} \text{ est semi-stable} \iff \mathcal{E}(k) \text{ est semi-stable}$$

et d'après le point (4) de la proposition 4.23,

$$\mathcal{E} \text{ est pur} \iff \mathcal{E}(k) \text{ est pur.}$$

On peut donc supposer que

$$\mu(\mathcal{E}) = 0.$$

Considérons maintenant le fibré $\pi_n^* \mathcal{E}$ sur X_n . Soit $\mathcal{L} \subset \pi_n^* \mathcal{E}$ un sous-fibré en droites de rang 1 de degré d maximal. On a donc $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X_n}(d)$. Posons $\mathcal{E}' = \pi_n^* \mathcal{E} / \mathcal{L}$,

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \pi_n^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0.$$

Puisque $\pi_n^* \mathcal{E}$ est semi-stable de pente 0,

$$d \leq 0 \leq \mu(\mathcal{E}').$$

Distinguons maintenant plusieurs cas.

- Supposons $d = 0$. Alors, \mathcal{L} est semi-stable de pente 0. Donc, \mathcal{E}' est semi-stable de pente 0 (cf. point (3) du théorème 3.4). D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_{X_n}^n$. Puisque $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{X_n}^n, \mathcal{O}_{X_n}) = 0$, cela entraîne que $\pi_n^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_n}^{n+1}$ et donc que $\pi_n^* \mathcal{E}$ est pur. On déduit alors de la proposition 4.25 que \mathcal{E} est pur.
- Supposons que $d \leq -2$. Puisque $\mu(\mathcal{E}') \geq 0$, la première pente du polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{E}' est positive. L'hypothèse de récurrence entraîne donc qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\mathcal{O}_{X_n}(\lambda) \subset \mathcal{E}'$ comme sous-fibré. Puisque $\lambda \geq 0$, $H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(\lambda)) \neq 0$ et donc

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_{X_n}(d+2), \mathcal{O}_{X_n}(\lambda)) \neq 0.$$

Il existe donc un morphisme non nul

$$u : \mathcal{O}_{X_n}(d+2) \longrightarrow \mathcal{E}'.$$

Tirant en arrière la suite exacte (1) précédente via u on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}(d+2) \longrightarrow 0$$

et donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(-d-1) \longrightarrow \mathcal{E}''(-d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}(1) \longrightarrow 0.$$

D'après l'hypothèse du théorème appliquée avec $n = 1$ (attention, il ne s'agit pas du même entier n intervenant dans cette démonstration),

$$H^0(X_n, \mathcal{E}''(-d-1)) \neq 0.$$

Il existe donc un morphisme non nul

$$\mathcal{O}_{X_n}(d+1) \longrightarrow \mathcal{E}''.$$

Le morphisme $\mathcal{E}'' \rightarrow \pi_n^* \mathcal{E}$ est un monomorphisme (i.e. c'est une inclusion en fibre générique, mais $\mathcal{O}_{X_n}(d+1)$ n'est pas forcément localement facteur direct dans \mathcal{E}''). On en déduit l'existence d'un morphisme non nul

$$v : \mathcal{O}_{X_n}(d+1) \longrightarrow \pi_n^* \mathcal{E}.$$

Alors, $\text{Im}(v)$ est un sous-fibré en droites de $\pi_n^* \mathcal{E}$ vérifiant $\text{deg}(\text{Im}(v)) \geq d+1$ ce qui est en contradiction avec la maximalité de d . Le cas $d \leq -2$ est donc impossible.

- Supposons $d = -1$. Puisque le morphisme π_n est étale fini, $\pi_n^* = \pi_n^!$ et

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \pi_n^* \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_{n*} \mathcal{L}, \mathcal{E}).$$

Le morphisme non nul $\mathcal{L} \rightarrow \pi_n^* \mathcal{E}$ est donc associé par adjonction à un morphisme non nul

$$u : \mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right) \simeq \pi_{n*} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Considérons le sous-fibré $\mathrm{Im}(u)$ de \mathcal{E} . Puisque $\mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right)$ est semi-stable de pente $-\frac{1}{n}$ et que le morphisme

$$u : \mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right) / \ker(u) \longrightarrow \mathrm{Im}(u)$$

est un isomorphisme en fibre générique,

$$\mu(\mathrm{Im}(u)) \geq -\frac{1}{n}.$$

On a donc

$$-\frac{1}{n} \leq \mu(\mathrm{Im}(u)) \leq 0.$$

Le nombre $\mu(\mathrm{Im}(u))$ est de la forme $\frac{d}{\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u))}$ pour un $d \in \mathbb{Z}$. Mais puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u)) \leq n$, l'inégalité précédente entraîne que

$$\mu(\mathrm{Im}(u)) = -\frac{1}{n} \quad \text{ou bien} \quad \mu(\mathrm{Im}(u)) = 0.$$

Distinguons ces deux cas.

- Si $\mu(\mathrm{Im}(u)) = 0$ alors $\mathrm{Im}(u)$ est semi-stable de pente 0. Le fibré $\mathcal{E}/\mathrm{Im}(u)$ l'est donc également. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Im}(u) \simeq \mathcal{O}_X^{\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u))}$ et $\mathcal{E}/\mathrm{Im}(u) \simeq \mathcal{O}_X^{n+1-\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u))}$. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ on conclut que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$.
- Si $\mu(\mathrm{Im}(u)) \neq 0$, nécessairement $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u)) = n$. Le morphisme

$$u : \mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right) \longrightarrow \mathrm{Im}(u)$$

est donc un isomorphisme en fibre générique. Étant donné que

$$\mathrm{deg} \left(\mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right) \right) = \mathrm{deg}(\mathrm{Im}(u))$$

c'est un isomorphisme. Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \left(-\frac{1}{n} \right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0$$

où \mathcal{L}' est un fibré en droites de degré 1. Par hypothèse on a $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$. Mais si $h : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme non nul, $\mathrm{Im}(h)$ est un sous-fibré en droites de \mathcal{E} de degré positif (car supérieur à celui de \mathcal{O}_X) et négatif (car \mathcal{E} est semi-stable de pente 0) donc nul. Le morphisme h est donc un isomorphisme. Dès lors, $\mathcal{E}/\mathrm{Im}(h)$ est semi-stable de pente 0 donc isomorphe à \mathcal{O}_X^n d'après l'hypothèse de récurrence. On conclut que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$ en utilisant une fois de plus que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. □

Remarque 4.27. Dans le théorème précédent, l'hypothèse disant que si $0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_h} \left(-\frac{1}{n} \right) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \rightarrow 0$ est exacte alors $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$ est indispensable si l'on veut que le théorème de classification des fibrés soit vérifié. En effet, si on suppose les conclusions du théorème vérifiées, un tel \mathcal{E} étant de degré 0, il possède nécessairement un facteur direct de la forme $\mathcal{O}_X(\lambda)$ avec $\lambda \geq 0$ et donc $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$.

Corollaire 4.28. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ la catégorie abélienne formée des fibrés semi-stables de pente λ sur X est semi-simple, d'unique objet simple à isomorphisme près $\mathcal{O}_X(\lambda)$. L'algèbre $\mathrm{End}(\mathcal{O}_X(\lambda))$ est une algèbre à division. Le foncteur

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{E})$$

induit une équivalence entre cette catégorie et la catégorie des $\text{End}(\mathcal{O}_X(\lambda))^{opp}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Exemple 4.29. *Sous les hypothèses précédentes*

5. ANNEAUX DE FONTAINE

La donnée de départ est la suivante. Soit E une extension de degré finie de \mathbb{Q}_p . On note \mathbb{F}_q son corps résiduel, $q = p^{f_E}$. On choisit une uniformisante π de \mathcal{O}_E qu'on notera parfois π_E lorsqu'on voudra souligner sa dépendance en E . On notera Frob_q le morphisme de Frobenius à la puissance f_E d'une \mathcal{O}_E -algèbre de caractéristique p .

Soit $k|\mathbb{F}_q$ un corps algébriquement clos de caractéristique p . Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique p extension de k , valué complet pour une valuation non triviale

$$v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

On suppose que v est triviale en restriction à k . On note $\mathfrak{m}_F = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) > 0\}$ l'idéal maximal de \mathcal{O}_F . On suppose que k s'identifie au corps résiduel de F , $k \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$.

5.1. \mathcal{O}_E -vecteurs de Witt.

5.1.1. *Le cas « classique » ([13]).* Pour tout $n \geq 0$ posons

$$\mathcal{W}_{n,\pi} = \sum_{i=0}^n \pi^i X_i^{q^{n-i}} \in \mathcal{O}_E[X_0, \dots, X_n].$$

Soit le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{O}_E\text{-algèbres} &\longrightarrow \text{Ensembles} \\ A &\longmapsto A^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

On notera $[x_i]_{i \geq 0}$ un élément de $\mathcal{F}(A)$, où pour tout i , $x_i \in A$.

Lemme 5.1. *Il existe une unique factorisation*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_E\text{-algèbres} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Ensembles} \\ & \searrow^{W_{\mathcal{O}_E,\pi}} & \nearrow \\ & \mathcal{O}_E\text{-algèbres} & \end{array}$$

telle que la transformation naturelle en A

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\pi,A} : W_{\mathcal{O}_E,\pi}(A) &\longrightarrow A^{\mathbb{N}} \\ [a_i]_{i \geq 0} &\longmapsto (\mathcal{W}_{n,\pi}(a_0, \dots, a_n))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

soit un morphisme de \mathcal{O}_E -algèbres.

Démonstration. Cela résulte de ce que si A est une \mathcal{O}_E -algèbre sans p -torsion munie d'un endomorphisme φ relevant Frob_q modulo π , $\mathcal{W}_{\pi,A}$ est injectif d'image

$$\{(x_i)_{i \geq 0} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_{i+1} \equiv \varphi(x_i) \pmod{\pi^{i+1}}\}.$$

□

La description précédente de l'image de $\mathcal{W}_{\pi,A}$ lorsque A est sans p -torsion munie d'un relèvement de Frobenius ne fait pas intervenir π mais l'idéal engendré par celui-ci. Il en résulte que si π' est une autre uniformisante de \mathcal{O}_E , il existe un unique isomorphisme de foncteurs en \mathcal{O}_E -algèbres

$$u_{\pi,\pi'} : W_{\mathcal{O}_E,\pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E,\pi'}$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 W_{\mathcal{O}_E, \pi}(-) & & \\
 \downarrow u_{\pi, \pi'} \simeq & \searrow \mathcal{W}_\pi & \\
 & & (-)^\mathbb{N} \\
 & \nearrow \mathcal{W}_{\pi'} & \\
 W_{\mathcal{O}_E, \pi'}(-) & &
 \end{array}$$

On a bien sûr $u_{\pi', \pi''} \circ u_{\pi, \pi'} = u_{\pi, \pi''}$.

Définition 5.2. On pose

$$W_{\mathcal{O}_E} = \varprojlim_{\pi} W_{\mathcal{O}_E, \pi} : \mathcal{O}_E\text{-algèbres} \longrightarrow \mathcal{O}_E\text{-algèbres}$$

où la limite projective est prise suivant toutes les uniformisantes de \mathcal{O}_E . On note

$$\mathcal{W} : W_{\mathcal{O}_E}(A) \rightarrow A^\mathbb{N}$$

pour le morphisme composé $W_{\mathcal{O}_E}(A) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E, \pi}(A) \xrightarrow{\mathcal{W}_\pi} A^\mathbb{N}$.

Comme l'anneau $W_{\mathcal{O}_E}$, le morphisme

$$\mathcal{W} : W_{\mathcal{O}_E}(-) \longrightarrow (-)^\mathbb{N}$$

ne dépend pas du choix d'une uniformisante.

Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre. Pour $a \in A$ on notera $[a] = [a, 0, \dots, 0, \dots] \in W_{\mathcal{O}_E, \pi}(A)$. On vérifie aussitôt que $u_{\pi, \pi'}([a]) = [a]$ qui définit donc une application relèvement de Teichmüller

$$[-] : A \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

indépendante du choix de l'uniformisante π . Il existe un unique endomorphisme

$$F : W_{\mathcal{O}_E}(-) \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(-)$$

tel que si $a \in W_{\mathcal{O}_E}(A)$, $\mathcal{W}(a) = (x_i)_{i \geq 0}$ alors $\mathcal{W}(Fa) = (x_{i+1})_{i \geq 0}$. Comme le relèvement de Teichmüller $[-]$, cet endomorphisme F ne dépend pas du choix d'une uniformisante. Notons

$$V_\pi : W_{\mathcal{O}_E}(-) \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(-)$$

déduit du décalage $[a_i]_{i \geq 0} \rightarrow [0, a_1, \dots, a_i, \dots]$ sur $W_{\mathcal{O}_E, \pi}$ et de l'isomorphisme $W_{\mathcal{O}_E} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E, \pi}$. Contrairement à $[-]$ et F il dépend du choix de π . On a alors les propriétés :

- $FV_\pi = \pi$
- $V_{\pi'} = \frac{\pi'}{\pi} V_\pi$
- $V_\pi(F(x).y) = x.V_\pi(y)$
- des deux propriétés précédentes il résulte que pour tout $n \geq 1$, $V_\pi^n W_{\mathcal{O}_E}$ est un idéal de $W_{\mathcal{O}_E}$ indépendant du choix de l'uniformisante π
- $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est V_π -adiquement séparé complet : si $W_{\mathcal{O}_E, n}(A) = W_{\mathcal{O}_E}(A)/V_\pi^n W_{\mathcal{O}_E}(A)$ alors

$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 1} W_{\mathcal{O}_E, n}(A).$$

- tout élément $a \in W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n \geq 0} V_\pi^n [a_n]$
- si A est une \mathbb{F}_q -algèbre, $V_\pi F = \pi$ et $F(\sum_{n \geq 0} V_\pi [a_n]) = \sum_{n \geq 0} V_\pi [a_n^q]$
- si A est une \mathbb{F}_q -algèbre parfaite, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est π -adiquement complet sans π -torsion et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$. De plus, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est à isomorphisme unique près l'unique relèvement π -adique sans π -torsion de la \mathcal{O}_E -algèbre parfaite A .

Soit $E'|E$. On vérifie facilement le lemme qui suit.

Lemme 5.3. *Il existe un unique morphisme naturelle de \mathcal{O}_E -algèbres en la $\mathcal{O}_{E'}$ -algèbre A*

$$u : W_{\mathcal{O}_E}(A) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_{E'}}(A)$$

tel que la diagramme suivante commute

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathcal{O}_E}(A) & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_{E'}}(A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (\mathcal{W}_{f_{E'/E^n}})_{n \geq 0} & \mathcal{W} = (\mathcal{W}_n)_{n \geq 0} \\ & & A^{\mathbb{N}} \end{array}$$

On a $u([a]) = [a]$, $u(V_{\pi}x) = \frac{\pi}{\pi'} V_{\pi'}(F^{f_{E'/E}^{-1}}u(x))$ et $u(F^{f_{E'/E}}x) = Fu(x)$.

Rappelons qu'il y a un unique morphisme naturel de \mathcal{O}_E -algèbres

$$\Delta : W_{\mathcal{O}_E}(-) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(W_{\mathcal{O}_E}(-))$$

tel que $\mathcal{W}(\Delta(x)) = (F^n x)_{n \geq 0}$.

Si $E'|E$ comme précédemment, $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$ est l'extension résiduelle et $E'_0|E$ est l'extension maximale non-ramifiée de E dans E' , il y a une identification $W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'}) = \mathcal{O}_{E'_0}$. Si A est une $\mathcal{O}_{E'}$ -algèbre il y a donc un morphisme

$$\mathcal{O}_{E'_0} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'}) \xrightarrow{\Delta} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{E'_0}) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

qui fait de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ une $\mathcal{O}_{E'_0}$ -algèbre. Le morphisme naturel $W_{\mathcal{O}_E}(A) \rightarrow W_{\mathcal{O}_{E'}}(A)$ est alors un morphisme de $\mathcal{O}_{E'_0}$ -algèbre et on en déduit donc un morphisme naturel en la $\mathcal{O}_{E'}$ -algèbre A ,

$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_{E'}}(A).$$

Via ce morphisme, $F_E^{f_{E'/E}} \otimes Id$ correspond à $F_{E'}$.

Si A est une $\mathbb{F}_{q'}$ -algèbre parfaite, la réduction modulo π' des deux algèbres précédentes coïncide avec A . Utilisant que $W_{\mathcal{O}_{E'}}(A)$ est l'unique relèvement π' -adique sans π' -torsion de A , on en déduit que dans ce cas là c'est un isomorphisme :

$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_{E'}}(A).$$

Ainsi, si E_0 désigne l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans E , $W = W_{\mathbb{Q}_p}$ les vecteurs de Witt-usuels, pour toute \mathbb{F}_q -algèbre parfaite A on a un isomorphisme canonique

$$W(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

via lequel

$$\begin{array}{ccc} [a] \otimes 1 & \mapsto & [a] \\ F^{f_E} \otimes Id & \leftrightarrow & F \end{array}$$

5.1.2. *Le cas « tordu » : déformation du relèvement de Teichmüller.* Le relèvement de Teichmüller sur les vecteurs de Witt est adapté au groupe multiplicatif \mathbb{G}_m au sens où $[xy] = [x][y]$. Cependant lorsqu'on travaille avec les \mathcal{O}_E -vecteurs de Witt, $W_{\mathcal{O}_E}$, il est parfois plus commode de travailler avec un autre relèvement de Teichmüller adapté à un groupe de Lubin-Tate associé au corps E .

Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ un polynôme tel que $Q \equiv X^q$ modulo π . Posons $Q_0 = X$ et pour $n \geq 1$,

$$Q_n = \underbrace{Q \circ \dots \circ Q}_{n\text{-fois}}.$$

Soit

$$\mathcal{W}_{n,Q,\pi} = \sum_{i=0}^n \pi^i Q_{n-i}(X_i) \in \mathcal{O}_E[X_0, \dots, X_n].$$

Posons comme précédemment

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : \mathcal{O}_E\text{-algèbres} & \longrightarrow & \text{Ensembles} \\ A & \longmapsto & A^{\mathbb{N}}. \end{array}$$

Proposition 5.4.

(1) Il existe une unique factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_E\text{-algèbres} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \text{Ensembles} \\
 & \searrow^{W_{\mathcal{O}_E, Q, \pi}} & \nearrow \\
 & & \mathcal{O}_E\text{-algèbres}
 \end{array}$$

telle que la transformation naturelle en A

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{Q, \pi, A} : W_{\mathcal{O}_E, Q, \pi}(A) &\longrightarrow A^{\mathbb{N}} \\
 [a_i]_{i \geq 0} &\longmapsto (\mathcal{W}_{n, Q, \pi}(a_0, \dots, a_n))_{n \geq 0}
 \end{aligned}$$

soit un morphisme de \mathcal{O}_E -algèbres.

(2) Il existe un unique isomorphisme $u_{Q, \pi} : W_{\mathcal{O}_E, Q, \pi} \rightarrow W_{\mathcal{O}_E, \pi}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 W_{\mathcal{O}_E, Q, \pi}(-) & & \\
 \downarrow u_{Q, \pi} \simeq & \searrow^{W_{Q, \pi}} & \\
 W_{\mathcal{O}_E, \pi}(-) & & (-)^{\mathbb{N}} \\
 & \nearrow^{W_{\pi}} &
 \end{array}$$

Cette proposition résulte du lemme qui suit.

Lemme 5.5. Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre sans π -torsion munie d'un relèvement φ de $\text{Frob}_q \bmod \pi$. Alors, $W_{Q, \pi, A}$ est injectif d'image

$$\text{Im } \mathcal{W}_{Q, \pi, A} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_{i+1} \equiv \varphi(x_i) \bmod \pi^{i+1}\}.$$

On déduit ce lemme du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.6. Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre, $i \geq 1$ et $x, y \in A$ tels que $x \equiv y[\pi^i]$. Alors, $Q(x) \equiv Q(y)[\pi^{i+1}]$.

Composant les isomorphismes $W_{\mathcal{O}_E, Q, \pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E, \pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}$ on déduit la proposition suivante.

Proposition 5.7. Il existe une unique application naturelle en la \mathcal{O}_E -algèbre A

$$[-]_Q : A \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(A),$$

vérifiant :

- $\mathcal{W}([a]_Q) = (Q_n(a))_{n \geq 0}$
- $Q([a]_Q) = [Q(a)]_Q$
- Tout élément de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{n \geq 0} V_{\pi}^n [a_n]_Q.$$

- Si A est une \mathbb{F}_q -algèbre parfaite, tout élément de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n \geq 0} [x_n]_Q \pi^n$, le Q -relèvement de Teichmüller $x \mapsto [x]_Q$ est l'unique relèvement vérifiant $Q([x]_Q) = [x^q]_Q$ et on a

$$[x]_Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n([x^{q^{-n}}]).$$

Plus généralement, si $x \in A$, \hat{x}_n est un relèvement quelconque de $x^{q^{-n}}$ alors

$$[x]_Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(\hat{x}_n).$$

Exemple 5.8.

- Si $Q(X) = X^q$ on a $[a]_Q = [a]$.
- Si $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q(X) = (1 + X)^p - 1$ on a $[a]_Q = [1 + a] - 1$.

Le relèvement de Teichmüller classique est multiplicatif, $[xy] = [x][y]$ et se comporte donc bien vis à vis de la loi du groupe \mathbb{G}_m . Supposons maintenant de plus que $Q(X) \equiv \pi X \pmod{X^2}$. Soit $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q \in \mathcal{O}_E[[X, Y]]$ la loi de groupe formel de Lubin-Tate telle que $[\pi]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q} = Q$. Soit A une \mathbb{F}_q -algèbre parfaite. Soient $x, y \in A$ tels que A soit séparé complet pour la topologie (x, y) -adique. Il est aisé de vérifier qu'alors, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est séparé complet pour la topologie $([x]_Q, [y]_Q)$ -adique (car $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est séparé complet pour la topologie $([x], [y], \pi)$ -adique et $([x]_Q, [y]_Q, \pi) = ([x], [y], \pi)$).

Lemme 5.9. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\mathcal{L}\mathcal{T}_Q([x]_Q, [y]_Q) = [\mathcal{L}\mathcal{T}_Q(x, y)]_Q.$$

Démonstration. Pour tout n , $z_n = \mathcal{L}\mathcal{T}_Q([x^{q^{-n}}]_Q, [y^{q^{-n}}]_Q)$ est un relèvement de $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q(x^{q^{-n}}, y^{q^{-n}})$. On a donc

$$[\mathcal{L}\mathcal{T}_Q(x, y)]_Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(z_n).$$

Le résultat s'en déduit facilement puisque $Q_n(\mathcal{L}\mathcal{T}_Q(X, Y)) = \mathcal{L}\mathcal{T}_Q(Q_n(X), Q_n(Y))$. \square

Corollaire 5.10. *Le Q -relèvement de Teichmüller définit un morphisme de \mathcal{O}_E -modules*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{m}_F, \underset{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}{+}) &\hookrightarrow (W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F), \underset{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}{+}) \\ x &\longmapsto [x]_Q. \end{aligned}$$

Plus généralement, si $\mathcal{L}\mathcal{T}$ est n'importe quelle loi de groupe formelle de Lubin-Tate associée à E , c'est à dire telle que $[\pi]_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \in \mathcal{O}_E[[X]]$ ne soit pas nécessairement un polynôme, on peut définir pour $x \in \mathfrak{m}_F$

$$[x]_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\pi^n]_{\mathcal{L}\mathcal{T}}([x^{q^{-n}}]).$$

Cela définit un morphisme de \mathcal{O}_E -modules

$$\begin{aligned} (\mathfrak{m}_F, \underset{\mathcal{L}\mathcal{T}}{+}) &\hookrightarrow (W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F), \underset{\mathcal{L}\mathcal{T}}{+}) \\ x &\longmapsto [x]_{\mathcal{L}\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

5.2. L'anneau $B^{b,+}$.

5.2.1. L'anneau $B^{b,+}$.

Définition 5.11. *On note $B_E^{b,+} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{\pi}]$ et φ_E son morphisme de Frobenius. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E on les note $B^{b,+}$ et φ .*

L'anneau \mathcal{O}_F étant parfait, tout élément de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$ où pour tout i , $x_n \in \mathcal{O}_F$. Tout élément de $B^{b,+}$ s'écrit donc de façon unique sous la forme

$$\sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n$$

et l'on a

$$\varphi\left(\sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n\right) = \sum_{n \gg -\infty} [x_n^q] \pi^n.$$

Dans cette écriture les lois d'addition et de multiplication des éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ sont données par des polynômes généralisés :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n + \sum_{n \geq 0} [y_n] \pi^n &= \sum_{n \geq 0} [P_n(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n)] \pi^n \\ \left(\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} [y_n] \pi^n\right) &= \sum_{n \geq 0} [Q_n(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n)] \pi^n \end{aligned}$$

avec

$$(2) \quad P_n, Q_n \in \mathbb{F}_q[X_i^{q^{i-n}}, Y_j^{q^{j-n}}]_{0 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad Q_n = R_n(X_i Y_j)_{i+j \leq n}, \quad R_n \in \mathbb{F}_q[U_{ij}^{q^{i+j-n}}]_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}}.$$

Si $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et $k \in \mathbb{N}$ posons

$$w_{k, \pi}(x) = \inf\{v(x_n) \mid 0 \leq n \leq k\}.$$

Lemme 5.12. *Si π et π' sont deux uniformisantes de \mathcal{O}_E on a $w_{k, \pi} = w_{k, \pi'}$.*

Démonstration. Cela résulte de ce que pour $A \in \mathbb{R}_+$,

$$w_{k, \pi}(x) \geq A \Leftrightarrow \exists a \in \mathcal{O}_F, v(a) \geq A, x \in ([a], \pi^{k+1})$$

et de ce que pour un tel a , $([a], \pi^{k+1}) = ([a], \pi'^{k+1})$ puisque $(\pi^{k+1}) = (\pi'^{k+1})$. \square

Notons

$$w_k : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

la fonction déduite du lemme précédent.

Lemme 5.13. *Pour $x, y \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ on a*

$$\begin{aligned} w_k(x+y) &\geq \inf\{w_k(x), w_k(y)\} \\ w_k(xy) &\geq \inf_{i+j=k} \{w_i(x) + w_j(y)\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première inégalité, supposons que $w_k(x) \geq w_k(y)$. Soit $a \in \mathcal{O}_F$ tel que $w_k(y) = v(a)$. On a donc $x, y \in ([a], \pi^{k+1})$ ce qui implique que $x+y \in ([a], \pi^{k+1})$ soit encore $w_k(x+y) \geq v(a) = w_k(y)$. Pour la seconde inégalité, si $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$ et $y = \sum_{n \geq 0} [y_n] \pi^n$,

$$xy \in ([x_i y_j] \pi^{i+j})_{i+j \leq k} + (\pi^{k+1}).$$

Soit alors $a \in \mathcal{O}_F$ tel que $v(a) = \inf_{i+j=k} \{w_i(x) + w_j(y)\}$. Si $i+j \leq k$ alors $v(x_i y_j) \geq v(a)$ et donc $([x_i y_j] \pi^{i+j}) \subset ([a])$. Cela implique alors que $xy \in ([a], \pi^{k+1})$ soit encore $w_k(xy) \geq v(a)$. \square

Remarque 5.14. *Le point du lemme précédent est que les polynômes généralisés P_n, Q_n définissant l'addition et la multiplication dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ (cf. formule (2)) vérifient les propriétés d'homogénéité suivantes*

$$P_n(TX_i, TY_j) = TP_n, \quad R_n(TU_{ij}) = TR_n(U_{ij}).$$

On munira $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ de la topologie faible. Il s'agit de la topologie produit sur $(\mathcal{O}_F)^\mathbb{N}$ donnée par le développement de Teichmüller π -adique pour n'importe quel π . Une base de voisinages de 0 pour la topologie faible est donnée par

$$\left\{ x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid w_k(x) \geq A \right\}$$

lorsque $k \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathbb{R}$ varient. Muni de cette topologie $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est donc un anneau topologique. Si $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ la topologie faible coïncide avec la topologie $([a], \pi)$ -adique. La topologie induite par la topologie faible sur $W_{\mathcal{O}_E}(k) \subset W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est la topologie π -adique. On remarquera que la valuation π -adique v_π de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ n'est pas continue pour la topologie faible.

5.2.2. *Quelques valuations sur les vecteurs de Witt.*

Définition 5.15. *Pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $x = \sum_{i \gg -\infty} [x_i] \pi^i \in B^{b,+}$ on note*

$$v_r(x) = \inf_{i \in \mathbb{Z}} \{v(x_i) + ir\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Lorsque $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, une formule équivalente est donnée par

$$v_r(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} \{w_k(x) + ir\}.$$

Il résulte alors du lemme 5.12 que la définition de v_r ne dépend pas du choix de π . On prendra garde qu'il y a une différence notable entre v_r lorsque $r > 0$ et $r = 0$: lorsque $r > 0$ la borne inférieure intervenant dans sa définition est toujours atteinte alors que ce n'est pas nécessairement le cas lorsque $r = 0$. Enfin, remarquons la formule suivante

$$v_0(x) = \lim_{r \rightarrow 0} v_r(x).$$

Proposition 5.16. *Pour $r \geq 0$, v_r est une valuation sur $B^{b,+}$.*

Démonstration. D'après la formule limite donnée pour v_0 , il suffit de traiter le cas $r > 0$. Remarquons que pour $k \in \mathbb{Z}$, $v_r(\pi^k x) = v_r(x) + v_r(\pi^k)$. Il suffit donc de vérifier que v_r est une valuation en restriction à $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. L'inégalité

$$v_r(x+y) \geq \inf\{v_r(x), v_r(y)\}$$

résulte aisément de la première inégalité du lemme 5.13. De la même façon, utilisant la seconde inégalité de ce même lemme on obtient

$$\begin{aligned} v_r(xy) &= \inf\{w_k(xy) + kr \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \inf\{w_i(x) + ir + w_j(y) + jr \mid i, j \in \mathbb{N}\} \\ &\geq v_r(x) + v_r(y). \end{aligned}$$

Il reste donc à vérifier que cette dernière inégalité est une égalité. Soient donc $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$, $y = \sum_{n \geq 0} [y_n] \pi^n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et $i_0 \in \mathbb{N}$, resp. $j_0 \in \mathbb{N}$, le plus petit indice tel que

$$v_r(x) = v(x_{i_0}) + i_0 r, \text{ resp. } v_r(y) = v(y_{j_0}) + j_0 r.$$

De la minimalité des indices i_0 et j_0 on tire que si $i < i_0$, $v(x_i) > v(x_{i_0})$ et si $j < j_0$, $v(y_j) > v(y_{j_0})$. Écrivons

$$xy = \sum_{n \geq 0} [R_n(x_i y_j)_{i+j \leq n}] \pi^n$$

avec $R_n \in \mathbb{F}_q[U_{ij}^{q^{i+j-n}}]_{i+j \leq n}$ (cf. formule (2)). Si $i + j \leq n$ et $(i, j) \neq (i_0, j_0)$ alors $v(x_i y_j) > v(x_{i_0} y_{j_0})$. Puisque $R_n(U_{i_0 j_0}, 0, \dots, 0) = U_{i_0 j_0}$ (i.e. on pose $U_{ij} = 0$ si $(i, j) \neq (i_0, j_0)$) et R_n est homogène de degré 1 au sens où $R_n(TU_{ij}) = TR_n(U_{ij})$, on a

$$v(R_n(x_i y_j)_{i+j \leq n}) = v(x_{i_0} y_{j_0}).$$

On en déduit que $v_r(xy) \leq v_r(x) + v_r(y)$. □

Les valuations $(v_r)_{r > 0}$ sont continues pour la topologie faible de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tandis que ce n'est pas le cas de v_0 . On a pour tout $x \in B^{b,+}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_r(x) = v_0(x) \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{v_r(x)}{r} = v_\pi(x).$$

Le comportement relativement au Frobenius est donné par la formule

$$v_r(\varphi(x)) = qv_{\frac{r}{q}}(x).$$

On remarquera que la fonction $r \mapsto v_r(x)$ est concave. En particulier, si $0 \leq R_1 \leq r \leq R_2$ on a

$$v_r(x) \geq \inf\{v_{R_1}(x), v_{R_2}(x)\}.$$

Remarque 5.17. *D'après Hadamard, si f est une fonction holomorphe sur le disque épointé $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ et pour $0 < r < 1$, $M(R) = \sup_{|z|=R} \{|f(z)|\}$, la fonction $R \mapsto \log M(R)$ est*

une fonction convexe de $\log R$. La concavité de la fonction $r \mapsto v_r(x)$ précédente est un analogue de cette propriété, les éléments de $B^{b,+}$ pouvant s'interpréter comme des fonctions holomorphes sur un disque épointé (cf. sections 5.5 et 6).

Pour tout $r > 0$, la topologie définie par v_r sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est la topologie faible. On en déduit que $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est complet pour la topologie définie par un tel v_r . Pour $r = 0$, la topologie définie par v_0 sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est la topologie $[a]$ -adique pour n'importe quel $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. On vérifie alors facilement que $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est complet pour v_0 . Plus généralement, pour un tel a , $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est complet pour la topologie $([a], \pi)$ -adique.

Remarque 5.18. *Il faut faire attention lorsqu'on travaille avec v_0 pour la raison suivante. Pour tout $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ on vérifie que $v_0([\epsilon] - 1) = 0$. On a donc $\lim_{\alpha \neq 0} v_0([1 + \alpha] - 1) \neq v_0([1] - 1) = +\infty$.*

De cela on déduit que l'application relèvement de Teichmüller $x \mapsto [x]$ n'est pas continue pour la topologie définie par v_0 . C'est là une très grosse différence avec le cas d'égales caractéristiques (cf. section 5.5).

5.2.3. *L'anneau B^+ .* Soit $r > 0$, $r \in v(F)$. Notons

$$S_r = \{x \in B^{b,+} \mid v_r(x) \geq 0\}.$$

Si $a \in \mathcal{O}_F$ vérifie $v(a) = r$ on a alors

$$S_r = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \left[\frac{[a]}{\pi} \right].$$

Soient \widehat{S}_r le complété p -adique de S_r et $B_r^+ = S_r \left[\frac{1}{p} \right]$. L'espace de Banach B_r^+ est le complété de $B^{b,+}$ pour la norme q^{-v_r} et \widehat{S}_r est sa boule unité. Lorsque $r' \geq r$, $S_{r'} \subset S_r$ qui induit une inclusion $\widehat{S}_{r'} \subset \widehat{S}_r$ et donc une inclusion continue

$$B_{r'}^+ \subset B_r^+.$$

Définition 5.19. *On note $B^+ = \bigcap_{r>0} B_r^+$. On le note également B_E^+ lorsqu'on veut préciser la dépendance en E .*

L'anneau B^+ s'identifie au complété de $B^{b,+}$ pour la famille de normes $(q^{-v_r})_{r>0}$. C'est donc un $W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$ -espace de Fréchet. L'anneau $B^{b,+}$ est séparé pour la topologie définie par v_r pour n'importe quel r et donc

$$B^{b,+} \subset B^+.$$

Puisque $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est complet pour la topologie définie par les $(v_r)_{r>0}$, $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \subset B^+$ est un fermé.

Pour tout $r > 0$, l'endomorphisme φ de $B^{b,+}$ s'étend en un endomorphisme φ de B_r^+ . De plus

$$\varphi(B_r^+) = B_{qr}^+.$$

On a donc pour n'importe quel $r > 0$,

$$B^+ = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(B_r^+),$$

formule de laquelle on déduit que φ est bijectif sur B^+ .

Remarque 5.20. *Si $r > 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{O}_F vérifiant*

$$\forall r > 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} v(x_n) + nr = +\infty,$$

c'est à dire de façon équivalente,

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{v(x_n)}{n} = -\infty,$$

on peut donner un sens à la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n] \pi^n$. Plus précisément, posons

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n] \pi^n := \sum_{n < 0} [x_n] \pi^n + \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in B^+$$

où la première somme est convergente pour la topologie de Fréchet de B^+ et la seconde est un élément de $W(\mathcal{O}_F)$. Cependant, tout élément de B^+ n'est pas à priori nécessairement de cette forme et la somme de deux tels éléments ne l'est pas à priori nécessairement encore. De plus une

égalité $\sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n] \pi^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [y_n] \pi^n$ dans B^+ de deux telles sommes n'implique pas à priori que pour tout n , $x_n = y_n$. C'est là encore une différence avec le cas d'égales caractéristiques (section 5.5).

5.2.4. *Changement de corps E .* Soit $E'|E$ de degré fini, de corps résiduel $\mathbb{F}_{q'} \subset k$. Notons $E'_0 = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'})$ l'extension maximale non-ramifiée de E dans E' . On a alors

$$W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F) = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'}.$$

On vérifie que cela induit une identification de $W_{\mathcal{O}_{E'}}(k)_{\mathbb{Q}} = W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}} \otimes_{E'_0} E'$ -algèbres de Fréchet

$$B_{E'}^+ = B_E^+ \otimes_{E'_0} E'$$

via laquelle $\varphi_{E'}$ correspond à $\varphi_E^{f_{E'/E}} \otimes Id$.

5.3. Polygones de Newton.

5.3.1. *Transformée de Legendre.* Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$, sa transformée de Legendre est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \lambda &\longmapsto \inf\{\varphi(x) + \lambda x \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

C'est une fonction concave. Si φ est convexe, on peut retrouver φ à partir de $\mathcal{L}(\varphi)$ en appliquant sa transformée de Legendre inverse :

$$\varphi(x) = \sup\{\mathcal{L}(\varphi)(\lambda) - \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Appelons pente d'un polygone l'opposé de la dérivé de la fonction affine par morceaux associée (cette convention est nécessaire si l'on veut que les pentes des polygones de Newton soient les valuations des racines). Une fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$ est un polygone à abscisses de ruptures entières si et seulement si $\mathcal{L}(\varphi)$ est une fonction localement affine sur le segment ouvert $\mathcal{L}(\varphi) \neq -\infty$ à pentes dans \mathbb{Z} . Les pentes de $\mathcal{L}(\varphi)$ sont alors les abscisses des points de rupture de φ et les abscisses des points de rupture de $\mathcal{L}(\varphi)$ sont les pentes de $\mathcal{L}(\varphi)$. Ainsi la transformée de Legendre met en dualité

$$\text{Pentes} \xleftarrow{\mathcal{L}} \text{Abscisses des points de rupture.}$$

Pour $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ posons

$$\begin{aligned} \varphi_1 * \varphi_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ x &\longmapsto \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(b) \mid a + b = x\}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathcal{L}(\varphi_1 * \varphi_2) = \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2).$$

De cela on déduit que si φ_1 et φ_2 sont des polygones décroissants convexes à abscisses de rupture entières bornés inférieurement, $\varphi_1 * \varphi_2$ en est également un et de plus ses pentes finies strictement positives sont obtenues en « concaténant » celles de φ_1 et φ_2 .

Remarque 5.21. *L'opération de convolution précédente est un analogue tropical de l'opération de convolution usuelle où l'on a remplacé l'addition par des bornes inférieures et la multiplication par l'addition.*

5.3.2. *Polygone de Newton des éléments de $B^{b,+}$.*

Définition 5.22. *Soit $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \in B^{b,+}$. On note $\text{Newton}(x)$ le plus grand polygone convexe décroissant de \mathbb{R}^2 en dessous de l'ensemble de points $(n, v(x_n))_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Le polygone $\text{Newton}(x)$ est donné par $v_{\pi}(x)$ et ses pentes $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$, $\lambda_i = +\infty$ pour $i < v_{\pi}(x)$ et pour tout i , $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

On a les formules

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Newton}(x) \\] - \infty, v_{\pi}(x)] &= \text{Newton}(x)^{-1}(\{+\infty\}). \end{aligned}$$

Pour $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \in B^{b,+}$, la transformée de Legendre de son polygone de Newton, c'est à dire de la fonction affine par morceaux associée, est donnée par

$$\mathcal{L}(\text{Newt}(x))(\lambda) = \begin{cases} v_\lambda(x) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases}.$$

On en déduit en particulier que le polygone de Newton ne dépend pas du choix de l'uniformisante π . On renvoie à la figure 1 pour une visualisation du polygone précédent.

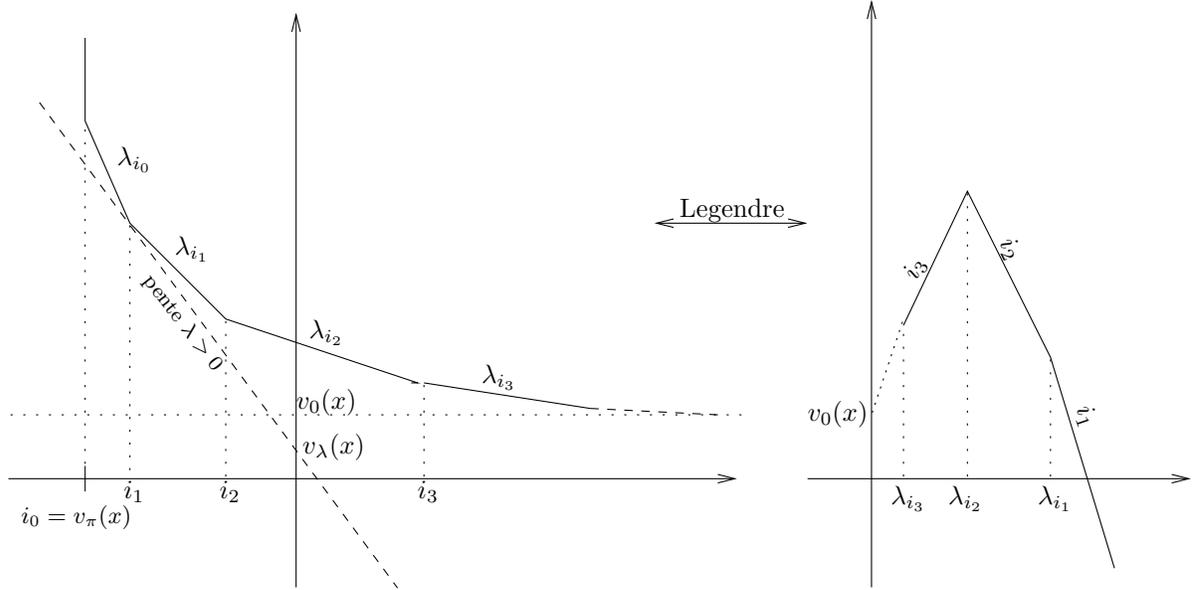


FIGURE 1. Le polygone de Newton de $x \in B^{b,+}$ et sa transformée de Legendre $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$. En général, la valuation de F n'étant pas discrète, la borne inférieure définissant $v_0(x)$ n'est pas atteinte, le polygone de Newton peut avoir une infinité de pentes tendant vers 0 au voisinage de $+\infty$ et le comportement de la fonction $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$ peut être « assez compliqué » au voisinage de 0.

Soient maintenant $x, y \in B^{b,+}$ non nuls. Utilisant que pour tout $r \geq 0$, $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$ on déduit que

$$\text{Newt}(xy) = \text{Newt}(x) * \text{Newt}(y)$$

On en déduit que l'on peut calculer $\text{Newt}(xy)$ en fonction de $\text{Newt}(x)$ et $\text{Newt}(y)$. Plus précisément, soient $(\lambda_i)_{i \in I}$, resp. $(\mu_j)_{j \in J}$, les pentes finies strictement positives de $\text{Newt}(x)$, resp. $\text{Newt}(y)$, comptées avec multiplicités. Alors, les pentes finies strictement positives de $\text{Newt}(xy)$ sont les $(\lambda_i)_{i \in I} \cup (\mu_j)_{j \in J}$ réordonnées de manière à ce qu'elles forment une suite décroissante. En d'autres termes, les pentes finies strictement positives de $\text{Newt}(xy)$ sont obtenues par concaténation des pentes de $\text{Newt}(x)$ et de celles de $\text{Newt}(y)$.

Exemple 5.23. Soient $a_0, \dots, a_d \in \mathbf{m}_F$ et $\prod_{i=0}^n (\pi - [a_i]) = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$. Alors, $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$ et les pentes du polygone convexe enveloppe des $(i, v(x_i))_{0 \leq i \leq d}$ sont les $(v(a_i))_{0 \leq i \leq d}$.

Remarque 5.24. Soit f une fonction holomorphe sur le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $0 < R < 1$. Supposons que f ne possède pas de zéros sur le cercle $|z| = R$ et $f(0) \neq 0$. Notons a_1, \dots, a_n les zéros de f comptés avec multiplicités dans le disque $|z| \leq R$. La formule de Jensen donne alors

$$\log |f(0)| = \sum_{i=1}^n \log |a_i| - n \log R + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Soit maintenant $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et $r > 0$. Soient $(\lambda_i)_{i \geq 0}$ les pentes finies de $\text{Newt}(x)$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$. Soit n l'entier tel que $\lambda_{n-1} \geq r$ et $\lambda_n < r$ ($n = 0$ si $\lambda_0 < r$). On a

alors

$$v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i - nr + v_r(x)$$

qui est un analogue de la formule de Jensen.

Si $M(R) = \sup\{|f(z)| \mid |z| = R\}$, pour $r > 0$ notons $v_r(f) = -\log M(e^{-r})$, une fonction concave de r . La formule de Jensen fournit donc

$$-\log |f(0)| \geq \sum_{i=1}^n (-\log |a_i|) - nr + v_r(f).$$

En d'autres termes, le polygone convexe valant $-\log |f(0)|$ en 0 et ayant pour pentes les $-\log |a_i|$, où a parcourt les zéros de f avec multiplicités, est au dessus de la transformée de Legendre de la fonction concave $r \mapsto v_r(f)$ (cf. 5.17).

5.3.3. Polygone de Newton des éléments de B^+ . Rappelons que si $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions concaves définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} convergeant simplement vers $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, alors :

- ψ est concave,
- la limite $\psi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi$ est uniforme sur tout compact de $]0, +\infty[$.

Lemme 5.25. Si $(b_n)_n$ est une suite de $B^{b,+}$ tendant vers $b \in B^+ \setminus \{0\}$, alors pour tout compact K de $]0, +\infty[$ il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ et $r \in K$ on ait $v_r(b_n) = v_r(b)$.

Démonstration. Soient $0 < R_1 < R_2$ tels que $K \subset [R_1, R_2]$. Puisque la suite de fonctions $(v_r(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[R_1, R_2]$, il existe $C \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ et $r \in [R_1, R_2]$ on ait $v_r(b_n) \leq C$. De plus, il existe $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$ on ait $v_{R_1}(b_{n+1} - b_n) > C$ et $v_{R_2}(b_{n+1} - b_n) > C$. Utilisant l'inégalité pour tout $r \in [R_1, R_2]$, $v_r(b_{n+1} - b_n) \geq \inf\{v_{R_1}(b_{n+1} - b_n), v_{R_2}(b_{n+1} - b_n)\}$ on conclut que pour $n \geq N'$ et $r \in [R_1, R_2]$ on a $v_r(b_n) = v_r(b_{N'})$. \square

De cela on déduit que pour tout $b \in B^+$, $b \neq 0$, la fonction

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto v_r(b) \end{aligned}$$

est concave affine par morceaux de pentes des entiers relatifs.

Définition 5.26. Pour $b \in B^+$, $b \neq 0$ on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{N}ewt(b) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\longmapsto \sup\{v_r(b) - rx \mid r \in]0, +\infty[\} \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{N}ewt(0)$ comme étant égal à la fonction constante de valeur $+\infty$.

Il s'agit d'un polygone convexe décroissant à abscisses de rupture entières qui coïncide avec le polygone précédent sur les éléments de $B^{b,+}$. Pour tout $r > 0$, ce polygone est au dessus d'une droite de pente r . On a donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{N}ewt(b)(x)}{x} = -\infty.$$

Si $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont ses pentes, où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{-i}}{i} = +\infty$. Bien sûr $\mathcal{N}ewt(x) \equiv +\infty$ si et seulement si $x = 0$. Commençons par étudier ce polygone au voisinage de $+\infty$.

Lemme 5.27. Pour tout $x \in B^+$, $x \neq 0$, la limite $\lim_{r \rightarrow 0} v_r(x)$ existe et est un nombre réel positif.

Démonstration. Par construction, si $r' \geq r$, la boule unité de $B_{r'}^+$ est contenue dans celle de B_r^+ . Cela se traduit en

$$\forall x \in B^+, v_{r'}(x) \geq 0 \Rightarrow v_r(x) \geq 0.$$

Soit donc $x \in B^+$ et $r_0 > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{r_0}(p^n x) \geq 0$. Cela entraîne que pour $0 < r \leq r_0$, $v_r(x) \geq -nr$. Le résultat se déduit alors du lemme qui suit. \square

Lemme 5.28. *Tout fonction concave $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ bornée inférieurement au voisinage de 0 se prolonge par continuité en 0.*

Définition 5.29. *Pour $x \in B^+$, on pose $v_0(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} v_r(x) \in \mathbb{R}_+$.*

Cela définit une valuation

$$v_0 : B^+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

étendant la valuation précédente sur $B^{b,+}$. On a de plus

$$v_0(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Newt}(b)(x).$$

On en déduit en particulier que $\text{Newt}(b)$ est contenu dans le demi-plan supérieur de \mathbb{R}^2 formé des éléments d'ordonnée positive supérieure ou égale à $v_0(b)$. De cela on déduit en particulier que si $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont ses pentes, λ_i étant la pente sur le segment $[i, i+1]$, on a $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = 0$. En particulier, chaque pente intervient avec multiplicité finie.

Ce polygone se transforme de la façon suivante :

- $\text{Newt}(\pi^n b)$ est le translaté horizontal par le vecteur $(n, 0)$ de $\text{Newt}(b)$,
- pour $a \in \mathcal{O}_F$, $\text{Newt}([a]b)$ est le translaté vertical par le vecteur $(0, v(a))$ de $\text{Newt}(b)$,
- $\text{Newt}(\varphi(b))$ est obtenu à partir de $\text{Newt}(b)$ en application la dilatation du plan $(x, y) \mapsto (x, qy)$. En particulier ses pentes sont q -fois celles de $\text{Newt}(b)$.

Remarquons qu'à translations horizontales près, $\text{Newt}(b)$ est complètement déterminé par $v_0(b)$ et ses pentes strictement positives. Enfin, remarquons que la formule

$$\text{Newt}(xy) = \text{Newt}(x) * \text{Newt}(y)$$

montre que les pentes finies strictement positives de $\text{Newt}(xy)$ sont obtenues par « concaténation » de celles de $\text{Newt}(x)$ et de celles de $\text{Newt}(y)$. De plus, $\text{Newt}(x)$ et $\text{Newt}(y)$ déterminent complètement $\text{Newt}(xy)$.

L'anneau B^+ est séparé pour la topologie définie par v_0 . Intéressons-nous maintenant un peu plus à cette valuation.

Lemme 5.30. *Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$ tel que $a \neq 0$ on a $B^+ = [a]B^+ + B^{b,+}$.*

Démonstration. Si $x \in B^{b,+}$, $x = \sum_{i \gg -\infty} [x_i] \pi^i$, écrivons $x = x^+ + x^-$ avec

$$x^+ = \sum_{i \geq 0} [x_i] \pi^i \quad \text{et} \quad x^- = \sum_{i < 0} [x_i] \pi^i.$$

Soit maintenant $b = \sum_{n \geq 0} b_n$ un élément de B^+ avec $b_n \in B^{b,+}$ et pour tout $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_r(b_n) = +\infty$. Soit N tel que pour $n \geq N$ on ait $v_1(b_n) \geq v(a)$. Cela entraîne que pour $n \geq N$, $b_n^- = [a]c_n$ avec $c_n \in B^{b,+}$. On a alors

$$b = [a] \sum_{n \geq N} c_n + \sum_{n=0}^{N-1} b_n^- + \sum_{n \geq 0} b_n^+.$$

où le troisième terme est dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ car celui-ci est fermé dans B^+ . \square

Proposition 5.31. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha = v(a)$ avec $a \in \mathcal{O}_F$. Alors,*

$$\{b \in B^+ \mid v_0(b) \geq \alpha\} = [a]B^+.$$

Démonstration. Si $b \in B^+$ vérifie $v_0(b) \geq \alpha$, d'après le lemme précédent on peut l'écrire sous la forme $b = [a]b' + b''$ où $b' \in B^+$ et $b'' \in B^{b,+}$. On a alors $v_0(b'') \geq \alpha$ et on conclut aussitôt. \square

Corollaire 5.32. *La topologie définie par v_0 sur B^+ est la topologie $[a]$ -adique pour n'importe quel $a \in \mathfrak{m}_F$ non nul.*

Étudions maintenant le polygone de Newton au voisinage de $-\infty$.

Proposition 5.33. *Un élément $b \in B^+$ est dans $B^{b,+}$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{N}ewt(b)_{\lceil -\infty, A \rceil} \equiv +\infty$.*

Démonstration. Soit $b \in B^+$ non nul tel que $\mathcal{N}ewt(b)_{\lceil -\infty, A \rceil} \equiv +\infty$. Quitte à multiplier b par une puissance de π on peut supposer $A = 0$. L'hypothèse se traduit alors en disant qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r_0 > 0$ tels que pour $r \geq r_0$ on ait $v_r(b) \geq \alpha$.

On reprend la notation $x = x^+ + x^-$ de la démonstration du lemme 5.30. Soit $(b_n)_n$ une suite de $B^{b,+}$ tendant vers b . Si l'on montre que $(b_n^-)_n$ tend vers 0 l'assertion sera démontrée car $(b_n^+)_n$ est une suite de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, or celui-ci est fermé dans B^+ .

Remarquons que pour $x \in B^{b,+}$ tel que $x = x^-$ on a pour $r' \geq r$,

$$v_r(x) \geq v_{r'}(x) + (r' - r).$$

Soit maintenant $r > 0$ fixé. Pour $A \in \mathbb{R}$ soit $r' \geq r$ vérifiant $r' \geq r_0$ et $r' - r \geq A - \alpha + 1$. On a

$$v_{r'}(b_n) = \inf\{v_{r'}(b_n^+), v_{r'}(b_n^-)\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_{r'}(b) \geq \alpha.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $v_{r'}(b_n^-) \geq \alpha - 1$. Pour $n \geq N$ on a alors

$$v_r(b_n^-) \geq v_{r'}(b_n^-) + (r' - r) \geq A.$$

Cela étant vrai pour tout A on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_r(b_n^-) = +\infty$. \square

5.4. Les bivecteurs. On va définir un sous- $W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de B^+ sur lequel la remarque 5.20 précédente est prise en défaut. Si R est un anneau de caractéristique p qui est une \mathbb{F}_q -algèbre muni de la topologie discrète on note

$$CW_{\mathcal{O}_E}^u(R) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ n \geq 1}} W_{\mathcal{O}_E, n}(R)$$

le groupe des covecteurs de Witt unipotents, les applications de transition dans la limite inductive précédente étant données par le Verschiebung, $V_\pi : W_{\mathcal{O}_E, n}(R) \rightarrow W_{\mathcal{O}_E, n+1}(R)$. Les éléments de $CW_{\mathcal{O}_E}^u(R)$ se décrivent de la façon suivante,

$$CW_{\mathcal{O}_E}^u(R) = \left\{ [\dots, a_i, \dots, a_{-1}, a_0] \mid a_i \in R, a_i = 0 \text{ pour } i \ll 0 \right\}.$$

Ce groupe s'étend en un groupe des covecteurs de Witt ([18], chap.II pour le cas $E = \mathbb{Q}_p$),

$$CW_{\mathcal{O}_E}(R) = \left\{ [\dots, a_i, \dots, a_{-1}, a_0] \mid a_i \in R, \exists N \leq 0, \text{ l'idéal engendré par les } (a_i)_{i \leq N} \text{ est nilpotent} \right\}.$$

Celui-ci est muni d'un Verschiebung $V_\pi : CW_{\mathcal{O}_E}(R) \rightarrow CW_{\mathcal{O}_E}(R)$ et on pose

$$BW_{\mathcal{O}_E}(R) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mathbb{N}}} CW_{\mathcal{O}_E}(R),$$

les applications de transition étant données par V_π . On a donc,

$$BW_{\mathcal{O}_E}(R) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_\pi^i[a_i] \mid a_i \in R, \exists N, \text{ l'idéal engendré par les } (a_i)_{i \leq N} \text{ est nilpotent} \right\}.$$

Définition 5.34. *On pose*

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mathfrak{a}}} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$$

lorsque \mathfrak{a} parcourt les idéaux non nuls de \mathcal{O}_F .

On a alors

$$\begin{aligned} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n] \pi^n \mid a_n \in \mathcal{O}_F, \liminf_{n \rightarrow -\infty} q^n v(a_n) > 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_n] \pi^n \mid a_n \in \mathcal{O}_F, \exists s > 0, \exists C, v(a_n) \geq q^{-n} s + C \right\}. \end{aligned}$$

Les séries précédentes sont convergentes dans B^+ . Cette description fournit un plongement de $W(k)_\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \hookrightarrow B_E^+.$$

Pour tout entier $n \geq 0$ notons

$$S_n \in \mathcal{O}_E[X_0, \dots, X_{n-1}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$$

le polynôme universel tel que la loi d'addition sur les vecteurs de Witt tronqués de longueur $n+1$ soit donnée par

$$[X_0, \dots, X_n] + [Y_0, \dots, Y_n] = [S_0, \dots, S_n]$$

Alors, pour deux éléments

$$a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [a_i] \pi^i, \quad b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [b_i] \pi^i \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

on a

$$a + b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} [c_i] \pi^i$$

avec

$$c_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \left(a_{i-n}^{q^{-n}}, a_{i-n+1}^{q^{-n+1}}, \dots, a_{i-1}^{q^{-1}}, a_i, b_{i-n}^{q^{-n}}, b_{i-n+1}^{q^{-n+1}}, \dots, b_{i-1}^{q^{-1}}, b_i \right),$$

limite qui existe grâce aux conditions de convergence imposées dans la définition de $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ (cf. [18], chap.II). Si l'on relâche ces conditions de convergence en imposant seulement que pour tout $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} v(a_n) + nr = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} v(b_n) + nr = +\infty$ alors une telle limite n'existe pas forcément, ce qui explique partiellement la remarque 5.20.

Remarque 5.35. Si $E'|E$ est non-ramifiée, $B_E^+ = B_{E'}^+$. Cependant, l'inclusion $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \subset BW_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F)$ est stricte si $E \neq E'$, les conditions de convergence des séries définissant $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ dans B_E^+ dépendant du cardinal du corps résiduel de E .

5.5. Analogues en caractéristique positive. Les anneaux définis précédemment sont des analogues en inégales caractéristiques d'anneaux apparaissant dans les travaux d'Hartl et Pink ([26]). Plus précisément, soit \mathbb{B} la boule ouverte rigide analytique sur F de dimension 1 et de rayon 1 et $\mathcal{O}(\mathbb{B})$ l'anneau des fonctions rigides analytiques sur B . Posons pour $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in F[[z]]$,

$$v_r(f) = \inf \{v(a_n) + nr \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbb{B}) &= \{f \in F[[z]] \mid \forall r > 0, v_r(f) > -\infty\} \\ &= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in F[[z]] \mid \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(a_n)}{n} \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

De plus si pour $0 < \epsilon < 1$, $\|\cdot\|_{\mathbb{B}(0, \epsilon)}$ désigne la norme sup sur la boule fermée de rayon ϵ ,

$$\|\cdot\|_{\mathbb{B}(0, \epsilon)} = p^{-v - \log_p \epsilon}.$$

Cette norme sup coïncide également avec la norme sup $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(0, \epsilon)}$ sur la couronne formée des éléments de valeur absolue ϵ . Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup sur \mathbb{B} et $\mathcal{O}(\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\})$ les fonctions rigides analytiques sur $\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\}$. On a alors le tableau d'analogies suivant :

Inégales caractéristiques	Égales caractéristiques
π	z
$W(F)$	$F[[z]]$
$W(\mathcal{O}_F)$	$\mathcal{O}_F[[z]] = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}) \mid \ f\ _\infty \leq 1\}$
$B^{b,+}$	$\mathcal{O}_F((z))$
	$= \{f \in \mathcal{O}(\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\}) \mid f \text{ méromorphe en } 0$
	$\text{et} \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \ f\ _{\mathbb{B}(0,\epsilon)} \leq 1\}$
B^+	adhérence de $\mathcal{O}_F((z))$ dans $\mathcal{O}(\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\})$
	$= \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in \mathcal{O}_F \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v(a_n)}{n} = +\infty\}$
	$= \{f \in \mathcal{O}(\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\}) \mid \lim_{\epsilon \rightarrow 1} \ f\ _{\mathbb{B}(0,\epsilon)} \leq 1\}$

Dans le tableau précédent la valeur absolue p^{-v_0} correspond à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1} \|f\|_{\mathbb{B}(0,\epsilon)}.$$

5.6. L'anneau \mathcal{R} .

5.6.1. *Généralités.* Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \pmod{\pi}$ et $Q(0) = 0$. On note $Q_0 = X$ et pour $n \geq 1$,

$$Q_n = \underbrace{Q \circ \dots \circ Q}_{n\text{-fois}}.$$

On vérifie en utilisant le lemme 5.6 que

$$(3) \quad Q_n(X) \in (\pi^{n-k} X^{q^k})_{0 \leq k \leq n}.$$

Par définition une \mathcal{O}_E -algèbre π -adique est une \mathcal{O}_E -algèbre π -adiquement séparée complète. Soit le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Q : \mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques} &\longrightarrow \text{Ens} \\ A &\longmapsto \{(x^{(n)})_{n \geq 0} \mid x^{(n)} \in A, Q(x^{(n+1)}) = x^{(n)}\}. \end{aligned}$$

On notera tout simplement $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{X^q}$. La proposition suivante est bien connue lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q = X^p$. Sa preuve s'étend aussitôt au cas général considéré ici (cf. le lemme 5.37 qui suit).

Proposition 5.36. *Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre π -adique et I un idéal fermé de A . Supposons A séparée complète pour la topologie $I + (\pi)$ -adique. Alors, l'application de réduction modulo I induit une bijection*

$$\mathcal{R}_Q(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q(A/I).$$

Son inverse associée à la suite $(x^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}_Q(A/I)$ la suite $(y^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}_Q(A)$ définie par

$$y^{(n)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k(\widehat{x^{(n+k)}})$$

où pour tout n , $\widehat{x^{(n)}} \in A$ est un relèvement quelconque de $x^{(n)} \in A/I$ et la limite précédente est pour la topologie $I + (\pi)$ -adique.

La proposition précédente résulte du lemme élémentaire suivant.

Lemme 5.37. *Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre et J un idéal de A . Si $x, y \in A$ vérifient $x \equiv y \pmod{J}$ alors $Q(x) \equiv Q(y) \pmod{\pi J + J^2}$.*

Appliquant cette proposition à l'idéal engendré par π on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.38. *Le foncteur \mathcal{R}_Q se factorise canoniquement en un foncteur*

$$\mathcal{R}_Q : \mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques} \longrightarrow \mathbb{F}_q\text{-algèbres parfaites}$$

isomorphe au foncteur

$$A \longmapsto \varprojlim_{\mathbb{N}} A/\pi A,$$

les applications de transition dans la limite projective précédente étant données par $\text{Frob}_q : A/pA \rightarrow A/pA$. Les lois d'addition et de multiplication sur $\mathcal{R}_Q(A)$ sont données par

$$\begin{aligned} (x^{(n)})_n + (y^{(n)})_n &= \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k(x^{(n+k)} + y^{(n+k)}) \right)_n \\ (x^{(n)})_n \cdot (y^{(n)})_n &= \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k(x^{(n+k)} y^{(n+k)}) \right)_n. \end{aligned}$$

Remarque 5.39. Bien sûr lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q(X) = X^p$, la formule de multiplication précédente est bien plus simple puisque $(x^{(n)})_n \cdot (y^{(n)})_n = (x^{(n)} \cdot y^{(n)})_n$.

Par exemple, si R est une \mathbb{F}_q -algèbre parfaite,

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q(W_{\mathcal{O}_E}(R)) \\ x &\mapsto ([x^{1/q^n}]_Q)_{n \geq 0}. \end{aligned}$$

où $[-]_Q$ désigne le Q -relèvement de Teichmüller de la proposition 5.7. De plus, d'après le lemme 5.36, si I est un idéal fermé de $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ tel que $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ soit séparé complet pour la topologie $I + (\pi)$ -adique, $A = W_{\mathcal{O}_E}(R)/I$ et $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(R) \rightarrow A$ désigne la projection,

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q(A) \\ x &\mapsto (\theta([x^{1/q^n}]_Q))_{n \geq 0}. \end{aligned}$$

Bien sûr, si Q_1 et Q_2 sont deux polynômes tels que Q il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{Q_1}(A) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{Q_2}(A) \\ (x^{(n)})_{n \geq 0} &\mapsto \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_{2,k}(x^{(n+k)}) \right)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

déduit par composition de la suite d'isomorphismes

$$\mathcal{R}_{Q_1}(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{Q_1}(A/\pi A) = \mathcal{R}_{X^q}(A/\pi A) = \mathcal{R}_{Q_2}(A/\pi A) \xleftarrow{\sim} \mathcal{R}_{Q_2}(A).$$

5.6.2. *Le morphisme θ .* Reprenons les notations de la section 5.1.2. Soit $n \geq 1$ un entier. Il y a un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n : W_{\mathcal{O}_E,n} &\longrightarrow \mathbf{G}_a \\ \sum_{k=0}^{n-1} V_\pi^k [a_k]_Q &\longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \pi^k Q_{n-1-k}(a_k). \end{aligned}$$

Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre munie d'un idéal I tel que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$ et tout $x \in I$ on ait $\pi^k x^{q^{n-1-k}} = 0$ (c'est par exemple le cas si I est muni de puissances π -divisées et $\pi^{n-1}A = 0$). Cela implique que pour tout $x \in I$ et $0 \leq k \leq n-1$ on a $\pi^k Q_{n-1-k}(x) = 0$ (cf. relation (3)). Le morphisme $\mathcal{W}_{n,Q} : W_{\mathcal{O}_E,n} \rightarrow \mathbf{G}_a$ donne alors naissance « par relèvement » à un morphisme de \mathcal{O}_E -algèbres

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{O}_E,n}(A/I) &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \mathcal{W}_{n,Q}(\hat{x}) \end{aligned}$$

où $\hat{x} \in W_{\mathcal{O}_E,n}(A)$ est un relèvement quelconque de x . En particulier, pour toute \mathcal{O}_E -algèbre A il y a un morphisme de \mathcal{O}_E -algèbres

$$\theta_n : W_{\mathcal{O}_E,n}(A/\pi A) \longrightarrow A/\pi^n A.$$

On a de plus $\theta_1 = \text{Id}_{A/\pi A}$ et lorsque n varie les θ_n vérifient la relation de compatibilité suivante : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathcal{O}_E,n+1}(A/\pi A) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & A/\pi^{n+1} A \\ \downarrow F & & \downarrow \text{proj} \\ W_{\mathcal{O}_E,n}(A/\pi A) & \xrightarrow{\theta_n} & A/\pi^n A. \end{array}$$

est commutatif. Si A est une \mathcal{O}_E -algèbre π -adiquement séparée complète on en déduit par passage à la limite un morphisme

$$\begin{aligned} \theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A)) &\longrightarrow A \\ \sum_{n \geq 0} [x_n]_Q \pi^n &\longmapsto \sum_{n \geq 0} x_n^{(0)} \pi^n. \end{aligned}$$

Cela définit un morphisme de foncteurs sur la catégorie des \mathcal{O}_E -algèbres π -adiques

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E} \circ \mathcal{R}_Q \longrightarrow \text{Id}.$$

On a déjà vu qu'il y a de plus un isomorphisme naturel de foncteurs sur les anneaux parfaits de caractéristique p ,

$$\text{Id} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q \circ W_{\mathcal{O}_E}.$$

On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 5.40. *Les deux foncteurs*

$$\mathbb{F}_q\text{-algèbres parfaites} \begin{array}{c} \xrightarrow{W_{\mathcal{O}_E}} \\ \xleftarrow{\mathcal{R}_Q} \end{array} \mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques}$$

sont adjoints l'un de l'autre. Les applications d'adjonctions sont données par $\theta : W_{\mathcal{O}_E} \circ \mathcal{R}_Q \rightarrow \text{Id}$ et l'isomorphisme canonique $\text{Id} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q \circ W_{\mathcal{O}_E}$ qui à x associe $([x^{1/q^n}]_Q)_{n \geq 0}$.

Si Q_1 et Q_2 sont des polynômes analogues à Q , l'isomorphisme canonique $\text{can} : \mathcal{R}_{Q_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{Q_2}$ est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathcal{O}_E} \circ \mathcal{R}_{Q_1} & & \\ \downarrow W_{\mathcal{O}_E}(\text{can}) \simeq & \begin{array}{c} \searrow \theta \\ \nearrow \theta \end{array} & \text{Id} \\ W_{\mathcal{O}_E} \circ \mathcal{R}_{Q_2} & & \end{array}$$

commute.

Remarque 5.41. *La commutativité du diagramme dans la proposition 5.40 précédente dit que l'on peut calculer θ soit « comme d'habitude » lorsque $Q = X^q$ via la formule $\theta(\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n) = \sum_{n \geq 0} x_n^{(0)} \pi^n$ si $x_n \in \mathcal{R}(A)$, soit via la formule $\theta(\sum_{n \geq 0} [y_n]_Q \pi^n) = \sum_{n \geq 0} y_n^{(0)} \pi^n$ si $y_n \in \mathcal{R}_Q(A)$.*

Soit A une \mathcal{O}_E -algèbres π -adiquement séparée complète comme précédemment. On dispose du critère suivant permettant de calculer le noyau de θ , critère qui est bien connu lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q = X^p$.

Lemme 5.42. *Supposons A sans p -torsion. Soit $x = \sum_{i \geq 0} [x_i]_Q \pi^i \in \ker(\theta)$.*

- (1) *Si $x_0^{(0)} \in \pi A^\times$ alors $\ker \theta = (x)$.*
- (2) *S'il existe $\underline{\pi} \in \mathcal{R}_Q(A)$ vérifiant $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$ alors $\ker \theta = ([\underline{\pi}] - \pi)$. De plus, $\ker \theta = (x) \Leftrightarrow x_0^{(0)} \in \pi A^\times$.*

Appelons épaissement π -adique de A un morphisme surjectif de \mathcal{O}_E -algèbres $f : B \rightarrow A$ tel que B soit séparé complet pour la topologie $\ker f + (\pi)$ -adique.

Proposition 5.43. *Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre π -adique telle que le Frobenius de $A/\pi A$ soit surjectif. Alors, $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A)) \rightarrow A$ est surjectif. Si de plus A est sans p -torsion et pour tout n il existe $z \in A$ tel que $Q_n(z) = \pi$ alors, $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}(A)) \rightarrow A$ est un épaissement π -adique universel.*

Démonstration. La surjectivité de θ ne pose pas de problème. Si A est sans p -torsion et $\underline{\pi} \in \mathcal{R}_Q(A)$ est tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$, d'après le lemme 5.42, $\ker \theta = ([\underline{\pi}] - \pi)$. Alors, $\ker \theta + (\pi) = ([\underline{\pi}], \pi)$. De plus la topologie $\underline{\pi}$ -adique sur $\mathcal{R}_Q(A/\pi A) = \varprojlim_{\mathbb{N}} A/\pi A$ coïncide avec la topologie

limite projective lorsqu'on munit $A/\pi A$ de la topologie discrète. On en déduit que $\mathcal{R}_Q(A)$ est π -adiquement séparé complet. Il est aisé d'en déduire que $W(\mathcal{R}_Q(A))$ est $([\pi], \pi)$ -adiquement séparé complet. Le morphisme θ est donc un épaississement π -adique. Montrons qu'il est universel. Si

$$f : B \longrightarrow A$$

est un épaississement π -adique, d'après la proposition 5.36, f induit un isomorphisme

$$\mathcal{R}_Q(f) : \mathcal{R}_Q(B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q(A).$$

Il induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(B)) & \xrightarrow[\sim]{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(f))} & W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A)) \\ \downarrow \theta_B & & \downarrow \theta_A \\ B & \xrightarrow{f} & A. \end{array}$$

Le morphisme $\theta_B \circ W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(f))^{-1}$ est alors un morphisme d'épaississements p -adiques. Un tel morphisme est unique car si

$$\begin{array}{ccc} & W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A)) & \\ & \swarrow \theta_A & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

est un morphisme d'épaississements alors

$$\mathcal{R}_Q(u) : \mathcal{R}_Q(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A))) \longrightarrow \mathcal{R}_Q(B)$$

est égal $\mathcal{R}_Q(f)$ via l'identification $\mathcal{R}_Q(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(A))) = \mathcal{R}_Q(A)$. Utilisant la propriété d'adjonction de la proposition 5.40 on obtient que $u = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}_Q(f))$. \square

5.6.3. *Le cas de l'anneau des entiers d'un corps p -adique.* Soit $C|E$ un corps valué complet pour une valuation $v : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ étendant la valuation π -adique de E . Remarquons que d'après le lemme 5.36 si $r \in \mathbb{R}$ vérifie $0 < r \leq 1$ et $\mathfrak{b}_r = \{x \in \mathcal{O}_C \mid v(x) \geq r\}$, alors $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$ s'identifie à l'anneau limite projective

$$\lim_{\longleftarrow \mathbb{N}} \mathcal{O}_C/\mathfrak{b}_r$$

où les applications de transition sont données par le morphisme de Frobenius.

L'anneau $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$ est intègre. Notons $F = \text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C))$, un corps parfait extension de \mathbb{F}_q . Soit

$$\begin{aligned} v : \mathcal{R}(\mathcal{O}_C) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\longmapsto v(x^{(0)}). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cela définit une valuation sur F (éventuellement triviale) d'anneau de valuation $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$.

Si $\mathfrak{a} = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq 1\}$ il y a une identification

$$\mathcal{O}_F/\mathfrak{a} = \mathcal{O}_C/\pi\mathcal{O}_C.$$

Le corps F muni de la valuation précédente est complet. De plus, la topologie de \mathcal{O}_F coïncide avec la topologie limite projective via la formule $\mathcal{O}_F = \lim_{\longleftarrow \mathbb{N}} \mathcal{O}_C/\pi\mathcal{O}_C$, l'anneau $\mathcal{O}_C/\pi\mathcal{O}_C$ étant muni

de la topologie discrète.

Proposition 5.44. *Supposons C algébriquement clos. Alors, $\text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C))$ l'est également.*

Démonstration. Soit $P = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathcal{O}_F[T]$ un polynôme. Notons pour tout entier $n \geq 0$

$$P_n = T^d + a_{d-1}^{(n)}T^{d-1} + \dots + a_1^{(n)}T + a_0^{(n)} \in \mathcal{O}_C[T].$$

Lorsque n varie ces polynômes sont liés par la relation

$$P_{n+1}(T)^q \equiv P_n(T^q) \pmod{\pi}.$$

Pour un n donné soit $x \in \mathcal{O}_C$ une racine de P_n . Choisissons $y \in \mathcal{O}_C$ tel que $y^q = x$. La relation précédente implique que

$$v(P_{n+1}(y)) \geq \frac{1}{q}.$$

Notons z_1, \dots, z_d les racines de P_{n+1} . On a donc

$$\sum_{i=1}^d v(y - z_i) \geq \frac{1}{q}.$$

Il en résulte qu'il existe i tel que

$$v(y - z_i) \geq \frac{1}{dq}$$

et donc

$$v(x - z_i^q) \geq \frac{1}{d}.$$

À partir de là on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{O}_C telle que pour tout n , x_n soit une racine de P_n et $v(x_{n+1}^p - x_n) \geq \frac{1}{d}$. Cette suite définit un élément de

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ \mathbb{N}}} \mathcal{O}_C/\mathfrak{b} = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$$

où $\mathfrak{b} = \{x \in \mathcal{O}_C \mid v(x) \geq 1/d\}$. Cet élément est bien sûr une racine de P . \square

6. ÉTUDE DE CERTAINS IDÉAUX ET VALUATIONS DES VECTEURS DE WITT

On conserve les notations de la section précédente.

6.1. Idéaux de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ engendrés par un élément de degré 1.

Définition 6.1. *Un élément $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est primitif de degré 1 s'il n'appartient pas à $\pi W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et son image dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est de valuation π -adique 1. On note \mathcal{A} l'ensemble des éléments primitifs de degré 1 dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$*

On peut bien sûr caractériser les éléments primitifs de degré 1 en termes de leur polygone de Newton : un élément de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est primitif de degré 1 si et seulement si son polygone de Newton possède une unique pente non nulle et non infinie et celle-ci est de multiplicité 1. Nous nous intéressons aux idéaux principaux de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ engendrés par un élément de \mathcal{A} . Les unités de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$, sont les éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ dont l'image dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est une unité i.e. de valuation π -adique 0 dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)$. L'ensemble \mathcal{A} est donc stable sous l'action par multiplication de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$. De tels idéaux sont alors en bijection avec l'ensemble quotient $\mathcal{A}/W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$.

Un élément $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ appartient à \mathcal{A} si et seulement si $x_0 \neq 0$, $v(x_0) > 0$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Remarquons également que

$$\mathcal{A} = \{[a_0] - \pi u \mid a_0 \neq 0, v(a_0) > 0 \text{ et } u \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times\}.$$

Soit donc $a = \sum_{i \geq 0} [a_i] \pi^i \in \mathcal{A}$ et $I = (a)$. Posons

$$A = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/I.$$

On note

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow A.$$

Lemme 6.2. *L'anneau $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est séparé complet pour la topologie $I + (\pi)$ -adique et donc en particulier pour la topologie I -adique. L'anneau A est séparé complet pour la topologie π -adique sans π -torsion.*

Démonstration. La première assertion résulte de ce que $I + (\pi) = ([a_0]_Q, \pi) = ([a_0], \pi)$ et de ce que \mathcal{O}_F est a_0 -adiquement séparé complet. Si $x, y \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ vérifient $\pi x = ya$, puisque $a_0 \neq 0$, $y \in \pi W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. L'anneau A est donc sans π -torsion. Il est clairement π -adiquement complet. Reste à voir que $\bigcap_{n \geq 1} I + \pi^n W(\mathcal{O}_F) = I$. Soit $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tel que pour tout entier n on ait $x = y_n a + \pi^n z_n$ avec $y_n, z_n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Alors, pour tout entier n , utilisant encore que $a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} (y_{n+1} - y_n)a = \pi^n (z_n - \pi z_{n+1}) &\Rightarrow (y_{n+1} - y_n)a \in \pi^n W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \\ &\Rightarrow y_{n+1} - y_n \in \pi^n W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F). \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_n$ est donc de Cauchy pour la topologie π -adique. Notons $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Alors

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n a + \pi^n z_n) = ya \in I.$$

□

Du lemme 5.36 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.3. *Soit $Q \in X\mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \pmod{\pi}$. L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_F &\longrightarrow \mathcal{R}_Q(A) \\ x &\longmapsto (\theta([x^{1/q^n}]_Q))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Lemme 6.4. *Tout élément de A s'écrit sous la forme $\sum_{n \geq 0} \theta([x_n a_0^n])$ où $x_n \in \mathcal{O}_F$ vérifie $x_n = 0$ ou bien $v(x_n) < v(a_0)$.*

Démonstration. Écrivons $a = [a_0] - \pi u$ où $u \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$. On a $\theta(\pi u)A = \pi A$. L'anneau A est donc $\theta(\pi u) = \theta([a_0])$ -adiquement complet. De plus $A/\theta(\pi u)A = A/\pi A = \mathcal{O}_F/a_0\mathcal{O}_F$. On en déduit le résultat. □

Proposition 6.5. *Pour tout entier $n \geq 1$, tout élément de A possède une racine n -ième dans A .*

Démonstration. Supposons d'abord que l'extension $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée et donc $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F)$. Soit $x \in A$ et n est premier à p . Écrivons $a = \sum_{n \geq 0} [a_n]p^n$. On peut écrire x sous la forme

$$x = \theta([a_0])^d (\theta([z]) + \theta([a_0])w)$$

avec $v(z) < v(a_0)$. L'élément $\theta([a_0])^d$ possède une racine n -ième dans A car a_0 en possède une dans \mathcal{O}_F . De plus,

$$\theta([z]) + \theta([a_0])w = \theta([z])(1 + \theta([z^{-1}a_0])w).$$

L'élément $\theta([z])$ possède une racine n -ième dans A . L'anneau A est $\theta([z^{-1}a_0])$ -adiquement complet car une puissance de $\theta([z^{-1}a_0])$ est un multiple de $\theta([a_0])$. Alors,

$$(1 + \theta([z^{-1}a_0])w)^{1/n} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/n}{k} \theta([z^{-1}a_0])^k w^k$$

est une racine n -ième de $1 + \theta([z^{-1}a_0])w$.

Montrons maintenant que x possède une racine p -ième (on suppose toujours que $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée). Écrivons

$$x = \sum_{n \geq 0} \theta([x_n a_0^n])$$

avec pour tout n , $x_n = 0$ ou bien $v(x_n) < v(a_0)$. On peut supposer $x \neq 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit indice tel que $x_{n_0} \neq 0$. Alors,

$$x = \theta([x_{n_0} a_0^{n_0}]) \cdot (1 + \sum_{n \geq 1} \theta([x_{n+n_0} a_0^n x_{n_0}^{-1}])).$$

L'élément $\theta([x_{n_0} a_0^{n_0}])$ possède une racine p -ième tandis que

$$y = 1 + \sum_{n \geq 1} \theta([x_{n+n_0} a_0^n x_{n_0}^{-1}])$$

vérifie

$$y \equiv 1 + x_{n+1}a_0x_{n_0}^{-1} \pmod{p}$$

dans $\mathcal{O}_F/a_0\mathcal{O}_F$. Or,

$$1 + x_{n+1}a_0x_{n_0}^{-1} \in \mathcal{O}_F^\times.$$

Quitte à remplacer x par y on peut donc supposer que

$$x_0 \in \mathcal{O}_F^\times.$$

Montrons maintenant qu'il existe $z \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que

$$x \equiv \theta([z]) \pmod{p^2}.$$

Écrivons

$$x \equiv \theta([x_0] + p[x_1]) \pmod{p^2}.$$

Quitte à multiplier a par le représentant de Teichmüller d'une unité de \mathcal{O}_F , on peut supposer que

$$a \equiv [a_0] + p \pmod{p^2}.$$

Soit

$$S_1(X, Y) = \frac{1}{p}((X + Y)^p - X^p - Y^p) \in \mathbb{Z}_p[X, Y].$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_F$ on a dans $W_2(\mathcal{O}_F)$

$$[x_0] + p[x_1] + [\lambda]a \equiv [x_0 + \lambda a_0] + p[x_1 + \lambda + S_1(x_0^{1/p}, \lambda^{1/p}a_0^{1/p})] \pmod{p^2}.$$

Le polynôme en T

$$x_1^p + T^p + S_1(x_0, T a_0) \in \mathcal{O}_F[T]$$

est unitaire de degré p . Puisque F est algébriquement clos, il existe donc $\lambda \in \mathcal{O}_F$ tel que

$$[x_0] + p[x_1] + [\lambda]a \equiv [z] \pmod{p^2}$$

avec $z = x_0 + \lambda a_0 \in \mathcal{O}_F^\times$. On a alors

$$x \equiv \theta([z]) \pmod{p^2}.$$

Puisque $[z]$ est une unité de $W(\mathcal{O}_F)$ et possède une racine p -ième on peut supposer que

$$x \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Mais si $p \neq 2$, tout élément de $1 + p^2W(\mathcal{O}_F)$ possède une racine p -ième, pour $w \in W(\mathcal{O}_F)$,

$$(1 + p^2w)^{1/p} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/p}{k} p^{2k} w^k.$$

On a donc montré le résultat lorsque $p \neq 2$. Si $p = 2$, il faut travailler encore en revenant à l'étape précédente et montrer qu'il existe une unité $z \in \mathcal{O}_F^\times$ telle que

$$x \equiv \theta([z]) \pmod{8}.$$

On laisse cela en exercice au lecteur.

Voyons maintenant comment déduire le cas d'un corps E quelconque du cas précédent. Notons $E_0 = W(\mathbb{F}_q)_\mathbb{Q}$ l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans E . On a alors $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E$. Il y a une application norme

$$N_{E/E_0} : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow W(\mathcal{O}_F)$$

induisant la norme de l'extension $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q} | W(k)_\mathbb{Q}$ après projection via $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k)$ et $W(\mathcal{O}_F) \rightarrow W(k)$. Puisque cette extension $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q} | W(k)_\mathbb{Q}$ est totalement ramifiée, l'élément $b = N_{E/E_0}(a) \in W(\mathcal{O}_F)$ est primitif de degré 1. De plus, l'image de b dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ appartient à l'idéal engendré par a . Notons $B = W(\mathcal{O}_F)/(b)$ qui d'après le cas étudié précédemment est un anneau dans lequel tout élément possède une racine n -ième. L'inclusion $W(\mathcal{O}_F) \subset W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ induit un morphisme $B \rightarrow A$. Montrons que ce morphisme est surjectif, ce qui conclura la démonstration. Puisque les anneaux B et A sont p -adiquement complets, il suffit de montrer que le morphisme

$B/pB \rightarrow A/pA$ est surjectif ou encore que le morphisme composé $W(\mathcal{O}_F)/pW(\mathcal{O}_F) \rightarrow B/pB \rightarrow A/pA$ est surjectif. Si $e = [E : E_0]$ ce morphisme s'identifie au morphisme

$$\mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_F[\pi]/\left(\pi^e, \sum_{i=0}^{e-1} a_i \pi^i\right).$$

Puisque $a_1 \in \mathcal{O}_F^\times$, ce morphisme est bien surjectif. \square

Corollaire 6.6. *Pour tout $x \in A$ il existe $y \in \mathcal{O}_F$ tel que $x = \theta([y])$.*

Démonstration. D'après la proposition 6.5 précédente il existe $z \in \mathcal{R}(A)$ tel que $z^{(0)} = x$. Le résultat découle donc du corollaire 6.3. \square

Du lemme 5.42 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.7. *Via l'identification $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(A)$ il existe $\underline{\pi} \in \mathcal{O}_F$ tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$. De plus, $[\underline{\pi}] - \pi$ engendre I . En d'autres termes, il existe $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$ tel que $xa = [\underline{\pi}] - \pi$.*

Corollaire 6.8 (Décomposition et division de Weierstrass). *Soit $x = \sum_{i \geq 0} [x_i] \pi^i \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tel $v(x_1) = \inf\{v(x_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $v(x_0) < v(x_1)$.*

(1) *Il existe alors $b, c \in \mathcal{O}_F$ et $u \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$ tels que*

$$x = u[b]([c] - \pi).$$

(2) *Supposons $v(x_1) = 0$. Pour tout $y \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, il existe $d \in \mathcal{O}_F$ et $w \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tels que*

$$y = wx + [d].$$

Remarque 6.9. *Contrairement au cas usuel des séries formelles, la décomposition/division de Weierstrass précédente n'est pas unique.*

Puisque pour $a \in \mathcal{A}$, $W(\mathcal{O}_F)$ est a -adiquement complet on obtient également le corollaire suivant.

Corollaire 6.10. *Soit $a \in \mathcal{A}$, par exemple $a = [a_0] - \pi$ avec $a_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Tout $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ s'écrit, de façon non unique, sous la forme*

$$x = \sum_{n \geq 0} [x_n] a^n.$$

Lemme 6.11. *Si $x \in \mathcal{O}_F$ vérifie $\theta([x]) = 0$ alors $x = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{O}_F$ non nul. Montrons que $\theta([x]) \neq 0$. Il existe un entier n ainsi que $x' \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v(x') < v(a_0)$ tels que

$$x = a_0^n x'.$$

Notons $a = [a_0] - \pi u$ avec $u \in W(\mathcal{O}_F)^\times$. Alors,

$$\theta([x]) = (\pi \theta(u))^n \theta([x']).$$

Puisque $\theta(u) \in A^\times$ et A est sans p -torsion il suffit de vérifier que $\theta([x']) \neq 0$. Mais l'image de $\theta([x'])$ dans $A/\pi A = \mathcal{O}_F/a_0 \mathcal{O}_F$ est non nulle. D'où le résultat. \square

Lemme 6.12. *L'anneau A est intègre et l'idéal I est donc premier.*

Démonstration. Si $x, y \in \mathcal{O}_F$ vérifient $\theta([xy]) = \theta([x])\theta([y]) = 0$, d'après le lemme 6.11, on a $xy = 0$ et donc $x = 0$ ou bien $y = 0$. \square

Proposition 6.13. *Soit $\overline{W_{\mathcal{O}_E}(k)}^A$ la fermeture intégrale de $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ dans A . Alors, $\text{Frac}(\overline{W_{\mathcal{O}_E}(k)}^A)$ est une clôture algébrique de $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}$. Ainsi, A contient l'anneau des entiers du complété p -adique d'une clôture algébrique de $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 6.7 on peut supposer que $a = [a_0] - \pi$. Soit $k((a_0)) \subset F$, un sous-corps valué complet de valuation discrète et de corps résiduel k . Notons

$$F' = \widehat{k((a_0))} \subset F,$$

le complété de la clôture algébrique de $k((a_0))$ dans F . Il y a un morphisme

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0] - \pi) \longrightarrow A.$$

Soit $K = W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$ et \overline{K} une clôture algébrique de K . Notons $\underline{\pi} \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ un élément tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$. D'après la théorie du corps des normes appliquée à l'extension arithmétiquement profinie $\cup_{n \geq 0} K(\underline{\pi}^{(n)})$ de K , $\text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}}))$ est le complété de la clôture algébrique de $k((\underline{\pi}))$. Il existe donc un isomorphisme continu

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F'}$$

envoyant $\underline{\pi}$ sur a_0 . Celui-ci induit un isomorphisme continu

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}}))/([\underline{\pi}] - \pi) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0] - \pi).$$

Mais,

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}}))/([\underline{\pi}] - \pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{K}}.$$

Donc,

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0] - \pi) \simeq \mathcal{O}_{\widehat{K}}.$$

Puisque A est sans p -torsion, tout morphisme

$$\mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow A$$

est injectif. On en déduit le résultat. \square

Remarque 6.14. *Le recours à la théorie du corps des normes dans la démonstration de la proposition précédente semble indispensable afin de construire suffisamment d'éléments dans A .*

Proposition 6.15. *Soient $x, y \in \mathcal{O}_F$ tels que $\theta([x]) = \theta([y])$. Alors, $v(x) = v(y)$.*

Démonstration. D'après le lemme 6.11 on peut supposer x et y non nuls. Pour tout $n \geq 0$, notons $\epsilon^{(n)} \in \text{Frac}(A)$ tel que

$$\theta([x^{1/q^n}]) = \epsilon^{(n)} \theta([y^{1/q^n}]).$$

Alors, $\epsilon^{(n)}$ est une racine q^n -ième de l'unité dans $\text{Frac}(A)$. D'après la proposition 6.13 précédente $\epsilon^{(n)} \in A$. De plus $\epsilon = (\epsilon^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}(A)$. Via l'identification $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(A)$, $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F$ et en particulier $v(\epsilon) = 1$. Puisque $x = \epsilon y$ et $v(\epsilon) = 1$ on a $v(x) = v(y)$. \square

Définissons une fonction

$$v : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

en posant pour $x \in A$,

$$v(x) = v(y) \quad \text{si} \quad x = \theta([y]).$$

Proposition 6.16. *La fonction v est une valuation étendant la valuation π -adique de E multipliée par $v(a_0)$, $v(\pi) = v(a_0)$. De plus, A est l'anneau de valuation de v dans $\text{Frac}(A)$.*

Démonstration. Il est clair que $v|_{\mathcal{O}_E}$ est la valuation π -adique usuelle multipliée par $v(a_0)$. Montrons que v est une valuation. La formule $v(xy) = v(x) + v(y)$ est claire. Soient $x, y \in A$ non nuls. Montrons que $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$. On se ramène facilement au cas où on peut supposer que $x \notin \pi A$. Écrivons $x = \theta([x'])$ et $y = \theta([y'])$. On a donc $v(x') < v(a_0)$. Soit $z' \in \mathcal{O}_F$ tel que

$$x + y = \theta([z']).$$

On a en particulier

$$x' + y' \equiv z' \pmod{a_0 \mathcal{O}_F}.$$

On a alors

$$v(z) \geq \inf\{v(a_0), v(x' + y')\} \geq \inf\{v(a_0), v(x'), v(y')\} = \inf\{v(x'), v(y')\}.$$

Il reste à vérifier que A est l'anneau de valuation de v . Mais si $z = \frac{x}{y} \in \text{Frac}(A)$, $x = \theta([x'])$ et $y = \theta([y'])$ alors $v(z) = v(x') - v(y')$. Donc, l'inégalité $v(z) \geq 0$ implique que $z = \theta([x'y'^{-1}]) \in A$. \square

Ainsi, (A, v) est un anneau de valuation complet extension de $W(k)$ et de corps résiduel k .

Remarque 6.17. *Via l'identification $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(A)$, la valuation v sur A définit une valuation $(x^{(n)})_{n \geq 0} \mapsto v(x^{(0)})$ sur F . Cette valuation coïncide avec la valuation de F dont on est partie.*

Proposition 6.18. *Le corps valué complet $\text{Frac}(A)$ est algébriquement clos.*

Démonstration. D'après la proposition 6.13, $\text{Frac}(A)$ contient $\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)$. L'énoncé résulte alors de la proposition 6.5, de la théorie de Kummer et de la proposition 6.19 qui suit. \square

Dans le cas de valuation discrète la proposition qui suit résulte de la théorie des groupes de ramification ([42] chap. IV).

Proposition 6.19. *Soit $L|K$ une extension galoisienne de degré fini de corps valués complets pour des valuations à valeurs dans \mathbb{R} . Si l'extension associée de corps résiduels est triviale le groupe de Galois $\text{Gal}(L|K)$ est résoluble.*

Démonstration. On se ramène facilement à montrer que si $L|K$ ne possède pas sous-extension abélienne non triviale, c'est à dire $\text{Gal}(L|K)$ est égal à son groupe dérivé, alors $L = K$. On note v la valuation de L étendant celle de K . On note $G = \text{Gal}(L|K)$. Puisque les corps résiduels de L et K coïncident

$$\forall \sigma \in G, \forall x \in \mathcal{O}_L, v(\sigma(x) - x) > 0.$$

Commençons par un lemme intermédiaire.

Lemme 6.20. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soient $\mathfrak{p}_\lambda = \{x \in \mathcal{O}_L \mid v(x) \geq \lambda\}$ et $\mathfrak{p}_{\lambda+} = \{x \in \mathcal{O}_L \mid v(x) > \lambda\}$. Alors, G agit trivialement sur $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}_{\lambda+}$.*

Démonstration. Si $\lambda \notin v(L)$ on a $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda+}$ et le résultat est clair. Sinon, soit $\pi_\lambda \in \mathcal{O}_K$ de valuation λ . Tout élément de \mathfrak{p}_λ s'écrit sous la forme $\pi_\lambda x$ avec $x \in \mathcal{O}_L$. Alors, pour $\sigma \in G$, $\sigma(\pi_\lambda x) = \sigma(\pi_\lambda)\sigma(x)$. Or, $v(\sigma(x) - x) > 0$. L'action de G sur $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}_{\lambda+}$ est donnée par la multiplication par le caractère

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow k_L^\times \\ \sigma &\longmapsto \pi_\lambda^{\sigma-1} \bmod \mathfrak{p}_{0+}. \end{aligned}$$

Puisque G ne possède pas de quotient abélien non trivial, ce caractère est trivial. \square

Revenons à la preuve de la proposition 6.19. Il faut prendre garde qu'en général \mathcal{O}_L n'est pas un \mathcal{O}_K -module de type fini. Soit donc M un sous- \mathcal{O}_K -module de type fini de \mathcal{O}_L stable sous G . Posons pour $\lambda \geq 0$,

$$G_\lambda = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M, v(\sigma(x) - x) \geq \lambda\}$$

et

$$G_{\lambda+} = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M, v(\sigma(x) - x) > \lambda\}.$$

Puisque G agit trivialement sur le corps résiduel de L , $G = G_{0+}$. On a pour $\lambda \geq 0$,

$$G_\lambda = \bigcap_{\mu \leq \lambda} G_\mu$$

et puisque M est de type fini,

$$G_{\lambda+} = \bigcup_{\mu > \lambda} G_\mu.$$

Montrons que pour tout λ , $G_\lambda/G_{\lambda+}$ est abélien. Soient $\sigma, \tau \in G_\lambda$. Pour $x \in M$ on a d'après le lemme précédent,

$$v(\sigma(x) - x) \geq \lambda \Rightarrow v(\tau(\sigma(x) - x) - \sigma(x) + x) > \lambda$$

c'est à dire

$$v(\tau\sigma(x) - \tau(x) - \sigma(x) + x) > \lambda.$$

De même,

$$v(\sigma\tau(x) - \sigma(x) - \tau(x) + x) > \lambda.$$

Combinant les deux inégalités précédentes on obtient

$$v(\sigma\tau(x) - \tau\sigma(x)) > \lambda$$

et donc $[\sigma^{-1}, \tau^{-1}] \in G_{\lambda+}$. Le groupe $G_\lambda/G_{\lambda+}$ est donc abélien.

Supposons maintenant qu'il existe λ tel que $G_\lambda \neq G$. Soit I l'intervalle de \mathbb{R} ,

$$I = \{\lambda \mid G_\lambda = G\}.$$

Il est de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$. On a $G = G_a \neq G_{a+}$, mais puisque G/G_{a+} est abélien c'est impossible. On en déduit que pour tout λ , $G = G_\lambda$ et que donc G fixe tous les éléments de M .

Puisque tout élément de \mathcal{O}_L est contenu dans un sous- \mathcal{O}_K -module de type fini G -invariant on conclut que G est triviale. \square

Remarquons le corollaire suivant des résultats précédents.

Corollaire 6.21. *Les foncteurs $(F, a) \mapsto W(\mathcal{O}_F)_{[\frac{1}{p}]} / ([a] - p)$ et $(C, \underline{p}) \mapsto (\text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C)), \underline{p})$ induisent des équivalences de catégories inverses entre :*

- la catégorie des couples (F, a) où F est un corps valué complet algébriquement clos de caractéristique p et $a \in F^\times$ vérifie $v(a) > 0$,
- la catégorie des couples (C, \underline{p}) où C est un corps valué complet algébriquement clos extension de \mathbb{Q}_p et $\underline{p} \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$ vérifie $\underline{p}^{(0)} = p$.

Lorsque F est un corps maximallement complet de caractéristique positive, $C = W(\mathcal{O}_F)_{[\frac{1}{p}]} / ([a] - p)$ est maximallement complet et on retrouve ainsi la construction donnée dans [39] des corps maximallement complets de caractéristique 0.

6.2. L'espace Y des idéaux de degré 1 des vecteurs de Witt.

6.2.1. Définition et structure métrique.

Définition 6.22. *On note*

$$Y = \mathcal{A} / W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times \subset \text{Spec}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F))$$

l'ensemble des idéaux engendrés par un élément de \mathcal{A} . Pour $\mathfrak{p} \in Y$ on note $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}}} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) / \mathfrak{p}$ et $\theta_{\mathfrak{p}} : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}}}$ la projection. On note $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation de $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}}}$ telle que $v_{\mathfrak{p}}(\theta([x])) = v(x)$.

Il faut prendre garde à ce que $v_{\mathfrak{p}}$ n'étend qu'un multiple de la valuation π -adique de $W_{\mathcal{O}_E}(k)$, si $a = \sum_i [a_i] \pi^i \in \mathcal{A}$ et $\mathfrak{p} = (a)$ alors $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = v(a_0)$.

Proposition 6.23. *Posons pour $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in Y$, $d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = v_{\mathfrak{p}_1}(\theta_{\mathfrak{p}_1}(\mathfrak{p}_2))$ i.e. si $\mathfrak{p}_2 = (a_2)$, $d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = v_{\mathfrak{p}_1}(\theta_{\mathfrak{p}_1}(a_2))$. Alors,*

(1) *d est une distance ultramétrique sur Y*

(2) *Si l'on note pour $r \geq 0$, $\mathfrak{a}_r = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid v_0(x) \geq r\}$, et $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}, r} = \{x \in \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}}} \mid v_{\mathfrak{p}}(x) \geq r\} = \theta_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_r)$, on a*

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{a}_{d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)} = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{a}_{d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}$$

et donc un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}_1}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1, d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)} & \\
 \theta_{\mathfrak{p}_1} \nearrow & & \downarrow \simeq \\
 W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) & & \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}_2}}/\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_2, d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)} \\
 \theta_{\mathfrak{p}_2} \searrow & &
 \end{array}$$

De plus, $d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ est le plus grand $r \geq 0$ tel que $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{a}_r$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{p}_1 = (a)$ et $\mathfrak{p}_2 = (b)$. D'après le corollaire 6.10 on peut écrire

$$a = \sum_{n \geq 0} [x_n] b^n.$$

Appliquant $\theta_{\mathfrak{p}_1}$ on obtient

$$\sum_{n \geq 0} \theta_{\mathfrak{p}_1}([x_n]) \theta_{\mathfrak{p}_1}(b)^n = 0$$

dans $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}_1}}$. Raisonnant dans le corps valué $C_{\mathfrak{p}_1}$ on en déduit que

$$d(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = v(x_0) = v_{\mathfrak{p}_1}(\theta_{\mathfrak{p}_1}([x_0])) \geq v_{\mathfrak{p}_1}(\theta_{\mathfrak{p}_1}(b)) = d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$$

avec égalité si et seulement si $v(x_1) = 0$. Par symétrie on a donc $d(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = d(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ et x_1 est une unité. La proposition s'en déduit facilement. \square

Remarque 6.24. Reprenons les notations de la section 5.5. L'analogue de l'espace Y en inégales caractéristiques est $\mathbb{B}(F) \setminus \{0\} = \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. À $x \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ on associe l'idéal $(z - x)$. La distance précédente est alors la distance usuelle $(x, y) \mapsto v(x - y)$ sur $\mathbb{B}(F)$ restreinte à $\mathbb{B}(F) \setminus \{0\}$.

La fonction « distance à l'origine »

$$\begin{array}{ll}
 Y & \longrightarrow]0, +\infty[\\
 \mathfrak{p} & \longmapsto v_{\mathfrak{p}}(\pi)
 \end{array}$$

est continue. Pour $r > 0$ notons

$$Y_r = \{\mathfrak{p} \in Y \mid v_{\mathfrak{p}}(\pi) \leq r\},$$

la « couronne » associée au segment $]0, r]$. On a donc si $r \leq r'$, $Y_r \subset Y_{r'}$ et $Y = \bigcup_{r > 0} Y_r$.

Proposition 6.25. Pour tout $r > 0$, l'espace ultramétrique (Y_r, d) est complet.

Démonstration. Soit $(\mathfrak{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (Y_r, d) . Pour tout $r' \geq 0$, si $\mathfrak{a}_{r'} = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid v_0(x) \geq r'\}$, la suite d'idéaux $((\mathfrak{p}_n + \mathfrak{a}_{r'})/\mathfrak{a}_{r'})_{n \in \mathbb{N}}$ de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$ est constante pour $n \gg 0$. Elle définit donc un idéal $I_{r'}$ de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$. Lorsque r' varie ces idéaux $(I_{r'})_{r' \geq 0}$ sont compatibles et fournissent un idéal I de

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = \varprojlim_{r' \geq 0} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$$

tel que pour tout r' , $(I + \mathfrak{a}_{r'})/\mathfrak{a}_{r'} = I_{r'}$.

Soit $r' > r$ et n tel que $\mathfrak{p}_n + \mathfrak{a}_{r'} = I + \mathfrak{a}_{r'}$. Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\mathfrak{p}_n = (a)$. Il existe $x \in \mathfrak{a}_{r'}$ tel que $a + x \in I$. On a alors $a + x \in \mathcal{A}$ car si $a = \sum_i [a_i] \pi^i$, $v(a_0) \leq r < r'$. Notons $b = a + x$ et montrons que $I = (b)$.

Si l'on avait $(b) \subsetneq I$, puisque $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/(b)$ est un anneau de valuation, il existerait $r_0 \geq 0$ tel que $(b) + \mathfrak{a}_{r_0} \subset I$. Soit $r' > \sup r_0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $I + \mathfrak{a}_{r'} = \mathfrak{p}_n + \mathfrak{a}_{r'}$. On a donc $\mathfrak{a}_{r_0} \subset \mathfrak{a}_{r'} + \mathfrak{p}_n$. Cela implique que $\theta_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{a}_{r_0}) = \theta_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{a}_{r'})$ ce qui est impossible car $r' \neq r$, $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}_n}}$ est de valuation et $\forall r''$, $\theta_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{a}_{r''}) = \{x \in \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}_n}} \mid v_{\mathfrak{p}_n}(x) \geq r''\}$.

On, a donc $I \in Y$ et on vérifie aussitôt que $\mathfrak{p}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I$. \square

6.2.2. *Paramétrisation par les points d'un groupe de Lubin-Tate à valeurs dans \mathcal{O}_F .* Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \pmod{\pi}$ et $Q(X) \equiv \pi X \pmod{X^2}$.

Lemme 6.26. *Si $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $\frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q}$ est un élément primitif de degré 1 dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$.*

Démonstration. Soit $P = Q(X)/X \in \mathcal{O}_E[X]$. On a $[\epsilon]_Q/[\epsilon^{1/q}]_Q = P([\epsilon^{1/q}]_Q)$. De plus, $P \equiv \pi \pmod{X}$ et $P \equiv X^{q-1} \pmod{\pi}$. Le lemme s'en déduit facilement. \square

Définition 6.27. *Pour $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ on note*

$$u_\epsilon = \frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q},$$

$\mathfrak{p}_\epsilon = u_\epsilon W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, $\mathcal{O}_{C_\epsilon} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{p}_\epsilon$, $C_\epsilon = \text{Frac}(\mathcal{O}_{C_\epsilon})$, $\theta_\epsilon : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow \mathcal{O}_{C_\epsilon}$ et $v_\epsilon = v_{\mathfrak{p}_\epsilon}$ la valuation sur \mathcal{O}_{C_ϵ} définie dans la section précédente.

Exemple 6.28. *Si $E = \mathbb{Q}_p$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, $\alpha = 1 + \epsilon$ alors*

$$u_\epsilon = 1 + [\alpha] + [\alpha^{1/p}] + \dots + [\alpha^{\frac{p-1}{p}}].$$

On a donc défini une application

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_F \setminus \{0\} &\longrightarrow Y \\ \epsilon &\longmapsto \mathfrak{p}_\epsilon. \end{aligned}$$

Le corps C_ϵ est algébriquement clos valué complet pour v_ϵ . Le corps résiduel de C_ϵ est k et il y a une identification

$$\mathcal{O}_{C_\epsilon}/\pi\mathcal{O}_{C_\epsilon} = \mathcal{O}_F/\bar{u}_\epsilon\mathcal{O}_F.$$

où $\bar{u}_\epsilon = \epsilon^{1-q^{-1}} \in \mathfrak{m}_F$.

Soit \mathcal{LT}_Q la loi de groupe formel de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_E associée à Q , c'est à dire telle que $[\pi]_{\mathcal{LT}_Q} = Q$. Soit $\mathcal{G} = \text{Spf}(\mathcal{O}_E[[X]])$ le groupe formel associé. Via l'identification

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_F &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_{C_\epsilon}) \\ x &\longmapsto (\theta_\epsilon([x^{q^{-n}}]_Q))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

du corollaire 6.3, ϵ est un générateur du \mathcal{O}_E -module de rang 1

$$T_\pi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_{C_\epsilon}),$$

le module de Tate du groupe de Lubin-Tate \mathcal{G} .

La loi de groupe formel \mathcal{LT}_Q munit $\mathfrak{m}_F = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ d'une structure de \mathcal{O}_E -module. Le \mathcal{O}_E -module $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ est en fait un E -espace de Banach. Plus précisément, l'action de π sur \mathfrak{m}_F est donnée par Frob_q et cela en fait un E -espace vectoriel.

Proposition 6.29. *Soient $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Sont alors équivalents :*

- (1) $\mathfrak{p}_{\epsilon_1} = \mathfrak{p}_{\epsilon_2}$
- (2) $v_{\epsilon_1} \circ \theta_{\epsilon_1} = v_{\epsilon_2} \circ \theta_{\epsilon_2}$ comme valuations sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$
- (3) Il existe $a \in \mathcal{O}_E^\times$ tel que $\epsilon_2 = a \cdot \epsilon_1$.

Démonstration. On a $\mathfrak{p}_{\epsilon_2} \subset \mathfrak{p}_{\epsilon_1}$ si et seulement si $\theta_{\epsilon_1}(u_{\epsilon_2}) = 0$. Cela est encore équivalent ce que $\theta_{\epsilon_1}([\epsilon_2]_Q)$ soit un point de π -torsion de la loi de groupe formel \mathcal{LT}_Q sur $\mathcal{O}_{C_{\epsilon_1}}$. Via l'identification $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_{C_{\epsilon_1}})$, cela est équivalent à dire qu'il existe $a \in \mathcal{O}_E$ tel que $\epsilon_2 = a \cdot \epsilon_1 \in T_\pi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_{C_{\epsilon_1}})$. On obtient ainsi facilement l'équivalence entre les assertions (1) et (3). Le reste ne pose pas de problème. \square

Proposition 6.30. *L'application*

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times &= (\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times \longrightarrow Y \\ \mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon &\longmapsto \mathfrak{p}_\epsilon \end{aligned}$$

est une bijection.

D'après la proposition 6.29 précédente c'est une injection. Maintenant, si $a \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{O}_C = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/(a)$, puisque C est algébriquement clos, il existe $\epsilon \in \mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_C)$ tel que $\epsilon^{(0)}$ soit un générateur des points de π -torsion de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$. Le lemme 5.42 permet de conclure que $(a) = (u_\epsilon)$. \square

Remarquons enfin qu'il y a une action de $\varphi^\mathbb{Z}$ sur Y ($\varphi^\mathbb{Z}$ agit plus généralement sur $\text{Spec}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F))$). De plus, si $k \in \mathbb{Z}$ et I est un idéal de $W(\mathcal{O}_F)$,

$$\varphi^k : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/I \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\varphi^k(I).$$

Via la paramétrisation précédente cela correspond à l'action de $\varphi^\mathbb{Z} = E^\times/\mathcal{O}_E^\times$ sur $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times$. De plus si $\epsilon_2 = \pi^k \cdot \epsilon_1$ alors φ^k induit une isométrie de corps valués

$$(C_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_1}) \xrightarrow{\sim} (C_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_2}).$$

Exemple 6.31. Lorsque $E = \mathbb{Q}_p$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, le groupe de Lubin-Tate associé est $\widehat{\mathbb{G}}_m$. On a alors une bijection

$$(1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\})/\mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} Y$$

où l'action de $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ sur $1 + \mathfrak{m}_F$ est donnée par

$$(1+x)^a = \sum_{k \geq 0} \binom{a}{k} x^k.$$

Définition 6.32. On munit $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ de la distance ultramétrique $(\epsilon_1, \epsilon_2) \mapsto v(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ et $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times$ de la distance ultramétrique quotient :

$$\forall x, y \in (\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times, \quad d(x, y) = \sup\{v(\epsilon_1 - \epsilon_2) \mid x = \mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_1, y = \mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_2\}.$$

Proposition 6.33. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Il y a une inégalité pour $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$,

$$d(\mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_1, \mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_2) \geq \frac{q}{q-1} d(\mathfrak{p}_{\epsilon_1}, \mathfrak{p}_{\epsilon_2}).$$

(2) La paramétrisation $\epsilon \mapsto \mathfrak{p}_\epsilon = (u_\epsilon)$ induit un homéomorphisme

$$(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times \xrightarrow{\sim} Y.$$

Démonstration. Posons $C = C_{\epsilon_2}$ et voyons $\epsilon_1 = (\epsilon_1^{(n)})_{n \geq 0}$ et $\epsilon_2 = (\epsilon_2^{(n)})_{n \geq 0}$ comme éléments de $\mathcal{R}_Q(\mathcal{O}_C)$. Considérons pour un entier $n \geq 1$ le polynôme

$$P_n(X) = \frac{Q_n(X)}{Q_{n-1}(X)} = f_n(X) \cdot \prod_{a \in (\mathcal{O}_E/\pi^n \mathcal{O}_E)^\times} (X - (\epsilon_2^{(n)})^a).$$

où $f_n(X) \in \mathcal{O}_E[X]$ vérifie $f_n(0) \in \mathcal{O}_E^\times$. On a

$$d(\mathfrak{p}_{\epsilon_1}, \mathfrak{p}_{\epsilon_2}) = v_{\epsilon_2}(P_1(\epsilon_1^{(1)})).$$

De plus, on a la formule

$$d(\mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_1, \mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon_2) = \sup_{a \in \mathcal{O}_E^\times} \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n v_{\epsilon_2}(\epsilon_1^{(n)} - (\epsilon_2^{(n)})^a).$$

Posons $r = d(\mathfrak{p}_{\epsilon_1}, \mathfrak{p}_{\epsilon_2})$. Soit $n \geq 1$ un entier. Puisque $P_1(\epsilon_1^{(1)}) = P_n(\epsilon_1^{(n)})$,

$$r = v_{\epsilon_2}(\epsilon_1^{(n)}) = \sum_{a \in (\mathcal{O}_E/\pi^n \mathcal{O}_E)^\times} v_{\epsilon_2}(\epsilon_1^{(n)} - (\epsilon_2^{(n)})^a).$$

Il existe donc $a_n \in \mathcal{O}_E^\times$ tel que

$$v_{\epsilon_2}(\epsilon_1^{(n)} - (\epsilon_2^{(n)})^{a_n}) \geq \frac{r}{q^n - q^{n-1}}$$

et donc

$$q^n v_{\epsilon_2}(\epsilon_1^{(n)} - (\epsilon_2^{(n)})^{a_n}) \geq \frac{q}{q-1} r.$$

Cela étant vrai pour tout n , on en déduit le point (1).

Montrons le point (2). D'après le point (1) l'inverse de l'application $\mathcal{O}_E^\times \cdot \epsilon \mapsto \mathfrak{p}_\epsilon$ est continue. La topologie sur $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times$ est la topologie quotient. Il reste donc à voir que l'application $\epsilon \mapsto \mathfrak{p}_\epsilon$ est continue. Or, si ϵ_n est une suite de $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ tendant vers $\epsilon' \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, u_{ϵ_n} tend vers $u_{\epsilon'}$ pour la topologie faible de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On en déduit que pour tout entier k et tout $r > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$ on ait $u_{\epsilon_n} - u_{\epsilon'} \in \pi^k W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) + \mathfrak{a}_r$ où $\mathfrak{a}_r = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid v_0(x) \geq r\}$. Cela entraîne que pour $n \geq N$,

$$v_{\epsilon'}(\theta_{\epsilon'}(u_{\epsilon_n})) \geq \inf\{kv_{\epsilon'}(p), r\}.$$

Cela étant vrai pour tout k et r , on en déduit aussitôt que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\epsilon'}(u_{\epsilon_n}) = +\infty$. \square

Corollaire 6.34. *Si $V = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \setminus \{0\} = \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ vu comme E -espace de Banach, il y a un homéomorphisme*

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/E^\times \xrightarrow{\sim} Y/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

6.2.3. Point de vue de Berkovich. Notons $\mathcal{M}(B^{b,+})$ l'ensemble des valuations de $B^{b,+}$ étendant la valuation π -adique de $W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$ et continues pour la topologie définie par les valuations $(v_r)_{r>0}$. On le munit de la topologie induite par la topologie faible sur les applications de $B^{b,+}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cet espace topologique coïncide avec $\mathcal{M}(B^+)$, les valuations continues sur l'algèbre de Frechet B^+ .

Voyons les éléments de Y comme un sous-ensemble de $\text{Spm}(B^{b,+})$. Pour $\mathfrak{m} \in Y$ on a donc un corps quotient $\theta_{\mathfrak{m}} : B^{b,+} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$. On note $v_{\mathfrak{m}}$ la valuation définie précédemment de $C_{\mathfrak{m}}$ caractérisée par l'égalité $v_{\mathfrak{m}}(\theta_{\mathfrak{m}}([x])) = v(x)$. On note encore $v_{\mathfrak{m}}$ pour la valuation $v_{\mathfrak{m}} \circ \theta_{\mathfrak{m}}$ sur $B^{b,+}$.

Lemme 6.35. *Pour tout $\mathfrak{m} \in Y$, $v_{\mathfrak{m}} : B^{b,+} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est continue.*

Démonstration. Soit $r = v_{\mathfrak{m}}(\pi)$. Si $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n$, on a $\theta_{\mathfrak{m}}(x) = \sum_{n \gg -\infty} \theta_{\mathfrak{m}}([x_n]) \pi^n$. Il en résulte que $v_{\mathfrak{m}}(x) \geq v_r(x)$. \square

Remarque 6.36. *Si $r = v_{\mathfrak{m}}(\pi)$, l'inégalité $v_{\mathfrak{m}} \geq v_r$ établie lors de la démonstration du lemme précédent dit que l'on peut penser aux $(v_r)_{r>0}$ comme des « normes de Gauss » sur des couronnes de rayon r .*

On dispose donc d'une injection

$$\begin{aligned} Y &\hookrightarrow \mathcal{M}(B^{b,+}) \\ \mathfrak{m} &\mapsto \frac{1}{v_{\mathfrak{m}}(\pi)} v_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

On remarquera également que pour tout $r > 0$, $\frac{v_r}{r} \in \mathcal{M}(B^{b,+})$.

Proposition 6.37. *La topologie induite par celle de $\mathcal{M}(B^{b,+})$ sur Y est la topologie définie précédemment par la distance d sur Y .*

Démonstration. Montrons d'abord que l'application $Y \rightarrow \mathcal{M}(B^{b,+})$ est continue. Il faut montrer que pour tout $f \in B^{b,+}$, l'application $\mathfrak{m} \mapsto \frac{v_{\mathfrak{m}}(f)}{v_{\mathfrak{m}}(\pi)}$ est continue. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, l'application $\mathfrak{m} \mapsto v_{\mathfrak{m}}(f)$ est continue. Or, il résulte facilement de la proposition 6.23 que pour $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$,

$$|v_{\mathfrak{m}_1}(f) - v_{\mathfrak{m}_2}(f)| \geq d(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2).$$

La continuité de $Y \rightarrow \mathcal{M}(B^{b,+})$ en résulte aussitôt. L'application $Y \rightarrow \mathcal{M}(B^{b,+})$ est ouverte car si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}[\frac{1}{\pi}]$ avec $\mathfrak{p} = (a)$ comme dans les sections précédentes, une base de voisinages de \mathfrak{m} dans Y est donnée par

$$\{\mathfrak{m}' \in Y \mid v_{\mathfrak{m}'}(a) \geq r\}$$

lorsque r varie. \square

On remarquera le lemme suivant qui dit que l'on peut penser aux $(v_r)_{r>0}$ comme des « normes de Gauss » sur des couronnes de rayon r .

Remarque 6.38. *On peut penser à l'espace $\mathcal{M}(B^{b,+})$ comme un disque ouvert épointé dont $Y \subset \mathcal{M}(B^{b,+})$ formerait l'ensemble des points classiques et $(v_r)_{r>0}$ les normes de Gauss associées aux couronnes de rayon $(q^{-r})_{r>0}$.*

6.3. Effet d'un changement du corps E . Soit $E'|E$ une extension de degré fini de corps résiduel $\mathbb{F}_{q'} \subset k$. Si $E'_0 = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'})_{\mathbb{Q}}$ désigne l'extension maximale non-ramifiée de E dans E' ,

$$W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F) = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'}.$$

Si on veut comprendre le lien entre les idéaux de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ engendrés par un élément primitif de degré 1 et ceux de $W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F)$ on est donc ramené au cas où l'extension $E'|E$ est totalement ramifiée.

On suppose donc maintenant $E'|E$ totalement ramifiée. On a donc

$$W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F) = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E'}.$$

Il y a alors une application norme

$$N_{E'/E} : W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

Il s'agit tout simplement de la norme déduite de ce que $W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F)$ est une $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ -algèbre finie et libre de rang $[E' : E]$. En termes galoisiens, si \widetilde{E}' désigne une clôture galoisienne de $E'|E$,

$$N_{E'/E}(x) = \prod_{\tau \in \text{Hom}_E(E', \widetilde{E}')} (Id \otimes \tau)(x) \in W_{\mathcal{O}_{\widetilde{E}'}}(\mathcal{O}_F)^{\text{Gal}(\widetilde{E}'|E)} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

Le lemme suivant a déjà été observé à la fin de la preuve de la proposition 6.5.

Lemme 6.39. *La norme d'un élément primitif de degré 1 est un élément primitif de degré 1.*

Notons Y_E , resp. $Y_{E'}$, l'ensemble noté précédemment Y qui était associé à E . La proposition qui suit est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 6.40.

(1) *Si $\mathfrak{p} \in Y_{E'}$ alors $\mathfrak{p} \cap W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \in Y_E$. De plus, si $\mathfrak{p} = (a)$ alors*

$$\mathfrak{p} \cap W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = (N_{E'/E}(a)).$$

Ainsi l'application $\text{Spec}(W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \text{Spec}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F))$ induite par l'inclusion $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \subset W_{\mathcal{O}_{E'}}(\mathcal{O}_F)$ induit une application

$$p_{E',E} : Y_{E'} \rightarrow Y_E.$$

(2) *Si $\mathfrak{p} = p_{E',E}(\mathfrak{p}')$ le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{p}'}}$$

est un isomorphisme.

(3) *L'application $p_{E',E}$ est surjective. Ses fibres sont de cardinal $[E' : E]$. Si $E'|E$ est galoisienne, il y a une action de $\text{Gal}(E'|E)$ sur $Y_{E'}/Y_E$ et les fibres de $p_{E',E}$ sont des ensembles principaux homogènes sous cette action.*

6.4. Idéaux de degré > 1 des vecteurs de Witt.

Définition 6.41. Un élément $\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est de degré $d \in \mathbb{N}$ si $v(x_d) = 0$ et pour $0 \leq i < d$, $v(x_i) > 0$. Il est primitif de degré d si de plus $x_0 \neq 0$.

Les éléments de degré 0 sont les éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$. Dans les sections précédentes nous avons étudié en détails les éléments primitifs de degré 1, ce sont les éléments de \mathcal{A} (cf. section 6.1). Un élément $x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si son image dans $W(k)$ est de valuation π -adique d . Remarquons que le produit d'un élément de degré d par un de degré d' est de degré $d + d'$. On peut bien sûr caractériser les éléments de degré d et primitifs de degré d en termes de leur polygone de Newton.

Théorème 6.42. Soit $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ primitif de degré $d \geq 1$. Il existe alors $a_1, \dots, a_d \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ primitifs de degré 1 tels que

$$f = \prod_{i=1}^d a_i.$$

Démonstration. Voyons f comme une « fonction rigide analytique » sur Y où rappelons que l'on note $Y \subset \text{Spm}(B^{b,+})$ les idéaux engendrés par un élément primitif de degré 1. On vérifie qu'il suffit de montrer qu'il existe $\mathfrak{m} \in Y$ tel que $\theta_{\mathfrak{m}}(f) = 0$ i.e. « la fonction rigide analytique f » possède un zéro dans Y . Écrivons

$$f = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n.$$

On connaît à l'avance la valuation des zéros de f , ils sont donnés par les pentes de son polygone de Newton (cf. section 5.3 et plus particulièrement l'exemple 5.23). Soit donc $\mathcal{N}ewt(f)$ le plus grand polygone convexe en dessous des points $(i, v(x_i))_{0 \leq i \leq d}$ et $\lambda > 0$ sa plus petite pente non nulle. Nous allons construire par récurrence une suite $(\mathfrak{m}_n)_{n \geq 1}$ de Y vérifiant

- $v_{\mathfrak{m}_n}(f) \geq (d + n)\lambda$
- $d(\mathfrak{m}_n, \mathfrak{m}_{n+1}) \geq \frac{d+n}{d}\lambda$
- $v_{\mathfrak{m}_1}(\pi) = \lambda$.

Le théorème résultera alors de la proposition 6.25.

Commençons par construire \mathfrak{m}_1 . Soit $z \in \mathcal{O}_F$ une racine du polynôme $\sum_{i=0}^d x_i T^i \in \mathcal{O}_F[T]$ de valuation λ , la plus petite pente de son polygone de Newton. Posons

$$\mathfrak{m}_1 = ([z] - \pi) \in Y.$$

Puisque λ est la plus petite pente du polynôme précédent, pour $0 \leq i \leq d$ on a $v(x_i) \geq \lambda(d - i)$. On peut donc écrire pour $0 \leq i \leq d$, $x_i z^i = y_i z^d$ avec $y_i \in \mathcal{O}_F$. Notons $\theta = \theta_{\mathfrak{m}_1}$. Alors,

$$\theta(f) = \pi^d \sum_{i=0}^d \theta([y_i]) + \pi^{d+1} \sum_{i=d+1}^{\infty} \theta([x_i]) \pi^{i-d-1}.$$

Mais puisque $\sum_{i=0}^d y_i = 0$,

$$\sum_{i=0}^d [y_i] \in \pi W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

Donc, $\theta(f) \in \pi^{d+1} \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}_1}}$ c'est à dire

$$v_{\mathfrak{m}_1}(f) \geq (d + 1)\lambda.$$

On a donc construit \mathfrak{m}_1 .

Supposons construit \mathfrak{m}_n . Notons $\mathfrak{m}_n = (\xi)$ avec ξ primitif de degré 1. On peut écrire (cf. corollaire 6.10)

$$f = \sum_{i \geq 0} [a_i] \xi^n.$$

Projetant cette égalité dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ et utilisant que ξ est de degré 1 et f de degré d , on obtient que $a_d \in \mathcal{O}_F^\times$ et pour $0 \leq i < d$, $v(a_i) > 0$. L'hypothèse $v_{\mathfrak{m}_n}(f) \geq (d+n)\lambda$ se retranscrit en

$$v(a_0) \geq (d+n)\lambda.$$

Soit $z \in \mathcal{O}_F$ une racine du polynôme $\sum_{i=0}^d a_i T^i$ de valuation maximale. L'élément $\xi - [z]$ est primitif de degré 1. Posons alors

$$\mathfrak{m}_{n+1} = (\xi - [z]).$$

Puisque z est une racine de valuation maximale du polynôme $\sum_{i=0}^d a_i T^i$,

$$d(\mathfrak{m}_n, \mathfrak{m}_{n+1}) = v(z) \geq \frac{v(a_0)}{d} \geq \frac{d+n}{d}\lambda.$$

Remarquons que cela implique que $v_{\mathfrak{m}_{n+1}}(\pi) = \lambda$. Il reste maintenant à voir que $v_{\mathfrak{m}_n}(f) \geq (d+n+1)\lambda$. Puisque $v(z)$ est la plus grande pente du polygone de Newton de $\sum_{i=0}^d a_i T^i$, pour $0 \leq i \leq d$ on a $v(a_i) + iv(z) \geq v(a_0)$. Pour un tel i on peut donc trouver $b_i \in \mathcal{O}_F$ tel que $a_i z^i = a_0 b_i$. Notons $\theta = \theta_{\mathfrak{m}_{n+1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \theta(f) &= \sum_{i \geq 0} \theta([a_i])\theta([z]^i) \\ &= \theta([a_0]) \cdot \sum_{i=0}^d \theta([b_i]) + \theta([z])^{d+1} \cdot \sum_{i \geq d+1} \theta([a_i z^{i-d-1}]). \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{i=0}^d b_i = 0$, $\sum_{i=0}^d \theta([b_i]) \in \pi \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}_{n+1}}}$. On a donc

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{m}_{n+1}}(\theta([a_0]) \cdot \sum_{i=0}^d \theta([b_i])) &\geq v(a_0) + v_{\mathfrak{m}_{n+1}}(\pi) \\ &\geq (d+n)\lambda + \lambda = (d+n+1)\lambda. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{m}_{n+1}}(\theta([z])^{d+1}) &= (d+1)v(z) \\ &\geq \frac{(d+1)(d+n)}{d}\lambda \\ &\geq (d+n+1)\lambda. \end{aligned}$$

On conclut que $v_{\mathfrak{m}_n}(f) \geq (d+n+1)\lambda$. □

De la classification des éléments de degré 1 on déduit le corollaire qui suit.

Corollaire 6.43 (Décomposition de Weierstrass). *Pour tout $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ primitif de degré $d \geq 1$, il existe $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}_F$ et $u \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$ tels que*

$$f = u \cdot ([x_1] - \pi) \dots ([x_d] - \pi).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve du théorème 6.45.

Lemme 6.44. *Soit $f \in B^{b,+}$ et $\mathfrak{n} \in Y$ tel que $\lambda = v_{\mathfrak{n}}(p)$ ne soit pas une pente de $\text{Newt}(f)$. On a alors l'égalité*

$$v_{\mathfrak{n}}(f) = v_{\lambda}(f).$$

Démonstration. Écrivons $f = \sum_{i \gg -\infty} [x_i] \pi^i$. Soit $Q = \sum_{i \gg -\infty} \theta_{\mathfrak{n}}([x_i]) T^i \in (\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{n}}}[[T]])[\frac{1}{T}]$. On a alors $\text{Newt}(Q) = \text{Newt}(f)$. De plus,

$$v_{\mathfrak{n}}(f) = v_{\mathfrak{n}}(Q(\pi))$$

et $\lambda = v_{\mathfrak{n}}(\pi)$ n'est pas une pente de $\text{Newt}(Q)$. Le résultat est alors un résultat « classique » concernant les séries formelles à coefficients dans un anneau de valuation complet. □

Théorème 6.45. *Soit $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tel $\text{Newt}(f)$ possède une pente strictement positive. Il existe alors $a \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ primitif de degré 1 et $g \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tels que $f = ag$. On peut de plus choisir a de la forme $[z] - \pi$ où $v(z)$ est n'importe quelle pente de $\text{Newt}(f)$ strictement positive.*

Démonstration. Comme dans le théorème précédent, il s'agit de montrer que f vue comme « fonction rigide analytique » sur Y possède un zéro de valuation prescrite à l'avance par une pente de $\mathcal{N}ewt(f)$. Notons

$$f = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n.$$

où l'on peut supposer $x_0 \neq 0$. Pour $d \in \mathbb{N}$ posons

$$f_d = \sum_{n=0}^d [x_n] \pi^n.$$

Soit $\lambda > 0$ une pente de $\mathcal{N}ewt(f)$. Il existe un entier D tel que pour $d \geq D$, la pente λ apparait dans $\mathcal{N}ewt(f_d)$. De plus la multiplicité de λ dans les polygones $(\mathcal{N}ewt(f_d))_{d \geq D}$ est bornée par un entier M . Notons pour $d \geq D$,

$$X_d = \{\mathfrak{m} \in Y \mid \theta_{\mathfrak{m}}(f_d) = 0 \text{ et } v_{\mathfrak{m}}(\pi) = \lambda\},$$

un ensemble fini non vide d'après le théorème 6.42. Pour $d \geq D$ et $\mathfrak{m} \in X_d$,

$$\theta_{\mathfrak{m}}(f_{d+1}) = \theta_{\mathfrak{m}}([x_{d+1}]) \pi^d.$$

Écrivons alors

$$f_{d+1} = g \prod_{\mathfrak{m}' \in X_{d+1}} \xi_{\mathfrak{m}'}^{a_{\mathfrak{m}'}}$$

où $g \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ n'a pas la pente λ dans son polygone de Newton, $a_{\mathfrak{m}'} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et pour tout $\mathfrak{m}' \in Z, \xi_{\mathfrak{m}'}$ est primitif de degré 1 et engendre \mathfrak{m}' . On a donc pour $\mathfrak{m} \in X_d$

$$v_{\mathfrak{m}}(f_{d+1}) = v_{\mathfrak{m}}(g) + \sum_{\mathfrak{m}' \in X_{d+1}} a_{\mathfrak{m}'} v_{\mathfrak{m}}(\theta_{\mathfrak{m}}(\xi_{\mathfrak{m}'})) \geq d\lambda.$$

D'après le lemme 6.44,

$$v_{\mathfrak{m}}(g) = v_{\lambda}(g) \leq v_{\lambda}(f_{d+1}) \leq \mathcal{N}ewt(f)(0) = v(x_0).$$

On obtient donc que

$$\sum_{\mathfrak{m}' \in X_{d+1}} a_{\mathfrak{m}'} v_{\mathfrak{m}}(\theta_{\mathfrak{m}}(\xi_{\mathfrak{m}'})) \geq d\lambda - v(x_0).$$

Il s'en suit qu'il existe $\mathfrak{m}' \in X_{d+1}$ tel que

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') &= v_{\mathfrak{m}}(\theta_{\mathfrak{m}}(\xi_{\mathfrak{m}'})) \\ &\geq \frac{d\lambda - v(x_0)}{M}. \end{aligned}$$

On déduit de cela que l'on peut trouver une suite $(\mathfrak{m}_d)_{d \geq D}$ dans $\prod_{d \geq D} X_d$ de Cauchy. D'après la proposition 6.25 une telle suite est convergente. On conclut aisément. \square

Le théorème précédent entraîne le théorème suivant.

Théorème 6.46. *Soit $f \in B^{b,+}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ un ensemble fini de pentes de $\mathcal{N}ewt(f)$, comptées éventuellement plusieurs fois avec multiplicités. On peut alors écrire*

$$f = \prod_{i=1}^d ([z_i] - \pi) \cdot g$$

où $g \in B^{b,+}$ et $(v(z_1), \dots, v(z_d)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$.

6.5. Les éléments de B^+ comme fonctions « rigides analytiques » sur Y .

6.5.1. *La fonction associée à un élément de B^+ .* Rappelons que l'on note $Y \subset \text{Spm}(B^{b,+})$ les idéaux de $B^{b,+}$ engendrés par un élément primitif de degré 1. Pour $\mathfrak{m} \in Y$ on note $C_{\mathfrak{m}} = B^{b,+}/\mathfrak{m}$, un corps valué complet algébriquement clos et $\theta_{\mathfrak{m}} : B^{b,+} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$. On note $v_{\mathfrak{m}}$ la valuation sur $C_{\mathfrak{m}}$ telle que $v_{\mathfrak{m}}(\theta_{\mathfrak{m}}([x])) = v(x)$. On note de la même façon la valuation $v_{\mathfrak{m}} \circ \theta_{\mathfrak{m}}$ déduite sur $B^{b,+}$.

Lemme 6.47. *Pour tout $\mathfrak{m} \in Y$, le morphisme $\theta_{\mathfrak{m}} : B^{b,+} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$ s'étend naturellement en un morphisme continu*

$$\theta_{\mathfrak{m}} : B^+ \rightarrow C_{\mathfrak{m}},$$

où B^+ est muni de sa topologie de Frechet et $C_{\mathfrak{m}}$ de la topologie de sa valuation.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 6.35. \square

Lemme 6.48. *Soit $\mathfrak{m} \in Y$. Alors, le noyau de $\theta_{\mathfrak{m}} : B^+ \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$ est $B^+ \cdot \mathfrak{m}$. Il est en particulier principal.*

Démonstration. Le noyau de $\theta_{\mathfrak{m}} : B^+ \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$ est l'adhérence de $\mathfrak{m} \subset B^{b,+}$ dans B^+ . Soit f un élément de cette adhérence. Soit $a \in B^{b,+}$ un générateur de \mathfrak{m} . Écrivons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ dans B^+ où $f_n \in B^{b,+}$ s'écrit lui-même $f_n = ag_n$ avec $g_n \in B^{b,+}$. Pour tout $r > 0$,

$$v_r(g_{n+1} - g_n) = v_r(f_{n+1} - f_n) - v_r(a).$$

On en déduit que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge donc vers un élément $g \in B^+$ qui est tel que $f = ag$. \square

6.5.2. *Zéros des fonctions « rigides analytiques » définies par un élément de B^+ .*

Théorème 6.49. *Soit $f \in B^+$ et λ une pente strictement positive de $\text{Newt}(f)$. Il existe alors $z \in \mathcal{O}_F$ tel que $v(z) = \lambda$ et $g \in B^+$ tels que*

$$f = ([z] - \pi) \cdot g.$$

Démonstration. D'après le lemme 6.48 il faut montrer qu'il existe $\mathfrak{m} \in Y$ vérifiant $v_{\mathfrak{m}}(\pi) = \lambda$ et $\theta_{\mathfrak{m}}(f) = 0$. Écrivons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ avec $f_n \in B^{b,+}$. On déduit du lemme 5.25 l'existence d'un N tel que pour $n \geq N$, la pente λ intervienne dans $\text{Newt}(f_n)$ avec une multiplicité bornée par un entier M indépendant de $n \geq N$. Pour $n \geq N$ soit

$$X_n = \{\mathfrak{m} \in Y \mid \theta_{\mathfrak{m}}(f_n) = 0 \text{ et } v_{\mathfrak{m}}(\pi) = \lambda\},$$

un ensemble fini non vide d'après le théorème 6.45, de cardinal borné par M . Soit $n \geq N$ et $\mathfrak{m} \in X_n$. D'après le théorème 6.46 on peut écrire

$$f_{n+1} = g \cdot \prod_{\mathfrak{m}' \in X_{n+1}} \xi_{\mathfrak{m}'}^{a_{\mathfrak{m}'}}$$

où $\xi_{\mathfrak{m}'} \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est un élément primitif de degré 1 générateur de $\mathfrak{m}' \cap W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, $a_{\mathfrak{m}'} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $g \in B^{b,+}$ ne possède pas la pente λ dans son polygone de Newton. On a alors

$$v_{\mathfrak{m}}(f_{n+1}) = v_{\mathfrak{m}}(g) + \sum_{\mathfrak{m}' \in X_{n+1}} a_{\mathfrak{m}'} d(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}').$$

Le lemme 6.44 montre que

$$v_{\mathfrak{m}}(g) = v_{\lambda}(g) \leq v_{\lambda}(f_{n+1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{m}' \in X_{n+1}} a_{\mathfrak{m}'} d(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') &\geq v_{\mathfrak{m}}(f_{n+1}) - v_{\lambda}(f_{n+1}) \\ &= v_{\mathfrak{m}}(f_{n+1} - f_n) - v_{\lambda}(f_{n+1}) \\ &\geq v_{\lambda}(f_{n+1} - f_n) - v_{\lambda}(f_{n+1}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la remarque 6.36 pour obtenir la dernière inégalité. Il existe donc $\mathfrak{m}' \in X_{n+1}$ tel que

$$d(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') \geq \frac{1}{M} (v_{\lambda}(f_{n+1} - f_n) - v_{\lambda}(f_{n+1})).$$

Remarquons maintenant que la suite des $(v_\lambda(f_{n+1}))_n$ est bornée et que $v_\lambda(f_{n+1} - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. De cela on déduit que l'on peut construire par récurrence sur n une suite de Cauchy dans $\prod_{n \geq N} X_n$. Le théorème résulte alors de la proposition 6.25. \square

6.5.3. Écriture des éléments de B^+ comme produits infinis. Soit $(z_i)_{i \geq 1}$ une suite de \mathfrak{m}_F tendant vers 0. Le produit infini

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right)$$

est alors convergent dans B^+ .

Théorème 6.50. *Pour tout $f \in B^+$, il existe une suite $(z_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de \mathfrak{m}_F tendant vers 0 ainsi que $g \in B^{b,+}$ tels que*

$$f = g \cdot \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right).$$

Démonstration. On peut supposer $f \notin B^{b,+}$. Soient $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ les pentes de $\mathcal{N}ewt(f)$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$. D'après la proposition 5.33, puisque $f \notin B^{b,+}$, pour tout i , $\lambda_i \neq +\infty$. Le théorème 6.49 nous dit alors que pour tout entier $n \geq 1$ on peut écrire

$$f = g_n \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right)$$

où $z_i \in \mathfrak{m}_F$, $v(z_i) = \lambda_{-i}$ et $g_n \in B^+$. On a donc

$$g_n = g_{n+1} \cdot \left(1 - \frac{[z_{n+1}]}{\pi}\right),$$

formule de laquelle on déduit que pour tout $r > 0$,

$$v_r(g_{n+1} - g_n) = v_r(g_{n+1}) + \lambda_{-n-1} - r.$$

On a de plus

$$v_r(g_{n+1}) = v_r(f) - \sum_{i=-n-1}^{-1} \inf\{0, \lambda_i - r\}.$$

et puisque $\lim_{i \rightarrow -\infty} \lambda_i = +\infty$, la suite $(v_r(g_{n+1}))_n$ est bornée. On a donc

$$v_r(g_{n+1} - g_n) = \lambda_{-n-1} - r + O(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La suite $(g_n)_n$ converge donc dans B^+ vers un $g \in B^+$ tel que

$$f = g \cdot \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right).$$

Analysant les polygones de Newton de f et g on constate que $\mathcal{N}ewt(g)|_{]-\infty, 0[} = +\infty$ et $\mathcal{N}ewt(g)|_{]0, +\infty[} = \mathcal{N}ewt(f)|_{]0, +\infty[}$. On conclut grâce à la proposition 5.33 que $g \in B^{b,+}$. \square

6.6. Les anneaux B_{cris}^+ et B_{dR}^+ associés à un point de Y . Soit $\mathfrak{m} \in Y$ et $\theta_{\mathfrak{m}} : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow \mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}$. On définit alors $B_{cris, \mathfrak{m}}^+$ comme étant le complété de l'enveloppe à puissances π -divisées de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ relativement à $\mathfrak{m} = \ker(\theta_{\mathfrak{m}})$. L'anneau $B_{dR, \mathfrak{m}}^+$ est le complété de $B^{b,+}$ pour la topologie \mathfrak{m} -adique. Cet anneau coïncide encore avec le complété \mathfrak{m} -adique de B^+ . On a alors des inclusions

$$B^+ \subset B_{cris, \mathfrak{m}}^+ \subset B_{dR, \mathfrak{m}}^+$$

où

$$B^+ = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(B_{cris, \mathfrak{m}}^+),$$

le plus grand sous-anneau de $B_{cris,m}^+$ sur lequel φ est bijectif. De plus, $B_{dR,m}^+$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}B_{dR,m}^+$ et de corps résiduel $C_{\mathfrak{m}}$. On notera

$$\text{ord}_{\mathfrak{m}} : B_{dR,m}^+ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

la valuation de cet anneau de valuation discrète.

6.7. L'application diviseur. On note comme précédemment $Y \subset \text{Spm}(B^+)$ les idéaux engendrés par un élément primitif de degré 1. Notons

$$\begin{aligned} \rho : Y &\longrightarrow]0, +\infty[\\ \mathfrak{m} &\longmapsto v_{\mathfrak{m}}(\pi) \end{aligned}$$

la fonction « distance à l'origine dans notre disque épointé ».

Définition 6.51.

(1) On note $\text{Div}^+(Y)$ le monoïde formé des sommes formelles $D = \sum_{\mathfrak{m} \in Y} a_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}] \in \mathbb{N}^Y$ telles que

– si $0 < r_1 < r_2 < +\infty$,

$$|\{\mathfrak{m} \in Y \mid a_{\mathfrak{m}} \neq 0 \text{ et } r_1 \leq \rho(\mathfrak{m}) \leq r_2\}| < +\infty$$

– pour un $R \in]0, +\infty[$, et donc tous,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{m} \in Y \\ \rho(\mathfrak{m}) \leq R}} a_{\mathfrak{m}} \rho(\mathfrak{m}) < +\infty,$$

– pour $R \in]0, +\infty[$, et donc tous,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in Y \\ R \leq \rho(\mathfrak{m}) \leq r}} a_{\mathfrak{m}} \rho(\mathfrak{m}) = +\infty.$$

(2) Pour $\mathfrak{m} \in Y$ on note

$$\text{ord}_{\mathfrak{m}} : B^+ \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

la valuation sur B^+ déduite de celle de l'anneau de valuation discrète $B_{dR,m}^+$ via $B^+ \subset B_{dR,m}^+$.

(3) Pour $f \in B^+$ non nul on note

$$\text{div}(f) = \sum_{\mathfrak{m} \in Y} \text{ord}_{\mathfrak{m}}(f) [\mathfrak{m}].$$

Le support de $\text{div}(f)$ est l'ensemble des $\mathfrak{m} \in Y$ tels que $\theta_{\mathfrak{m}}(f) = 0$. La proposition qui suit est une conséquence du théorème 6.49.

Proposition 6.52. Pour $f \in B^+ \setminus \{0\}$, les nombres $(\rho(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m} \in \text{supp}(\text{div}(f))}$ comptés avec multiplicités $(\text{ord}_{\mathfrak{m}}(f))_{\mathfrak{m} \in \text{supp}(\text{div}(f))}$ sont les pentes finies strictement positives de $\mathcal{N}ewt(f)$ comptées avec multiplicité.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{N}ewt(f)(x) > -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{N}ewt(f)(x)}{x} = -\infty$, il résulte de la proposition précédente que

$$\text{div}(f) \in \text{Div}(Y).$$

De plus, $\text{div}(f)$ détermine $\mathcal{N}ewt(f)$ à translation près par un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. La proposition 5.33 se traduit en la proposition qui suit.

Proposition 6.53. Un élément $f \in B^+$ est dans $B^{b,+}$ si et seulement si il existe $R > 0$ tel que

$$\text{supp}(\text{div}(f)) \subset \{\mathfrak{m} \in Y \mid \rho(\mathfrak{m}) \leq R\}.$$

Il en résulte par exemple le corollaire suivant.

Corollaire 6.54. On a l'égalité $(B^{b,+})^{\times} = (B^+)^{\times}$.

Il y a des morphisme de monoïdes

$$\begin{array}{ccc} (B^{b,+} \setminus \{0\}) / (B^{b,+})^\times & & \\ \downarrow & \searrow^{\text{div}} & \\ (B^+ \setminus \{0\}) / (B^+)^{\times} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(Y). \end{array}$$

Si $a \in \mathfrak{m}_F$, $a \neq 0$, l'anneau $B^+[\frac{1}{a}]$ ne dépend pas du choix d'un tel a . De plus, $\text{div}([a]) = 0$ et le morphisme diviseur précédent s'étend donc en un morphisme de monoïdes

$$\left(B^+[\frac{1}{a}] \setminus \{0\} \right) / B^+[\frac{1}{a}]^\times \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(Y).$$

On vérifie de plus comme précédemment que $B^+[\frac{1}{a}]^\times = B^{b,+}[\frac{1}{a}]^\times$.

Théorème 6.55.

(1) Soit $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Soient $f, g \in B^+[\frac{1}{a}]$ non nuls. On a l'équivalence

$$f \in B^+[\frac{1}{a}]g \iff \text{div}(f) \geq \text{div}(g).$$

(2) Le morphisme de monoïdes

$$\left(B^+[\frac{1}{a}] \setminus \{0\} \right) / B^+[\frac{1}{a}]^\times \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(Y).$$

est injectif.

Démonstration. Le point (1) implique le point (2). Soient donc $f, g \in B^+$ tels que $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$. D'après le théorème 6.50 on peut supposer que $f, g \in B^{b,+}$. On peut même supposer que $f, g \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \setminus \pi W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Quitte à multiplier f par un représentant de Teichmüller d'un élément non nul de \mathcal{O}_F on peut supposer que $v_0(f) \geq v_0(g)$. Nous allons construire par récurrence une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ telle que $h_{n+1} \equiv h_n \pmod{\pi^n}$ et $v_\pi(f - h_n g) \geq n$. On choisit $h_0 = 0$. Supposons construit h_n . Remarquons que si $x = \sum_{i \geq N} [x_i] \pi^i$ est un élément de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ avec $x_N \neq 0$ alors

$$v(x_N) = v_0(x) + \sum_{\mathfrak{m} \in Y} \rho(\mathfrak{m}) \text{ord}_{\mathfrak{m}}(x).$$

Puisque $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$ on a $\text{div}(f - h_n g) \geq \text{div}(g)$. De plus $v_0(f - h_n g) \geq v_0(g)$. Appliquant la formule précédente à $f - h_n g$ et g on obtient l'existence de $y \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ tel que

$$v_\pi(f - h_n g - \pi^n y g) \geq n + 1.$$

Il suffit alors de choisir $h_{n+1} = h_n + \pi^n y$. □

Remarque 6.56.

(1) Comme dans le cas des fonctions rigides analytiques sur la boule unité sur un corps non maximallement complet, on ne sait pas caractériser l'image de l'application diviseur (cf. [36] section 8). Le point est que l'on ne sait pas définir d'analogue des produits de Weierstrass ou de Blaschke.

(2) Si $D \in \text{Div}^+(Y)$ est tel que $\text{supp}(D) \subset \{\mathfrak{m} \in Y \mid \rho(\mathfrak{m}) \geq r\}$ pour un $r > 0$ il existe alors $b \in B^+$ tel que $\text{div}(b) = D$. Un tel b est construit comme un produit infini convergent $\prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \frac{[z_i]}{\pi})$ où $z_i \in \mathfrak{m}_F$ et $z_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$. Le problème de savoir si un diviseur donné est principal se situe donc au « bord extérieur » du disque épointé Y et non au voisinage de l'origine.

7. LES ESPACES DE BANACH $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$

On reprend les notations de la section précédente. Rappelons que E est une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p de corps résiduel \mathbb{F}_q , $k|\mathbb{F}_q$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p et que $F|k$ est un corps valué complet pour une valuation non triviale $v : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, algébriquement clos de corps résiduel k . On note π , une uniformisante de \mathcal{O}_E . On rajoute des indices « E » aux différents objets lorsqu'on veut souligner leur dépendance en le corps E . On notera ainsi alternativement B^+ ou B_E^+ , φ ou φ_E , π ou π_E ...

Pour $h \geq 1$ nous noterons $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}^{\varphi_E^h = Id}$ l'extension non-ramifiée de degré h de $E = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{Q}}$ dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$.

Commençons par une remarque générale avant d'entamer cette section. Soient $h \geq 1$ et $d \geq 0$ des entiers. Dans ce chapitre nous étudions entre autres le E_h -espace vectoriel $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$. Bien sûr, posant $\pi_{E_h} = \pi_E$, cet espace vectoriel coïncide avec $(B_{E_h}^+)^{\varphi_{E_h} = \pi_{E_h}^d}$ et on pourrait donc se ramener, quitte à remplacer E par E_h , à supposer que $h = 1$. Néanmoins, lorsque $d \leq h$, on va voir que $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$ admet une interprétation géométrique en termes de \mathcal{O}_E -modules π -divisibles et que de plus il est contenu dans les bivecteurs $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Cela n'est pas le cas de $(B_{E_h}^+)^{\varphi_{E_h} = \pi_{E_h}^d}$ qui n'admet pas d'interprétation en termes de \mathcal{O}_{E_h} -modules π -divisibles et n'est pas contenu dans $BW_{\mathcal{O}_{E_h}}(\mathcal{O}_F)$ lorsque $d > 1$. C'est pourquoi nous traitons dans certaines sections le cas général de $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$ sans forcément se ramener à $h = 1$.

7.1. Généralités.

7.1.1. *Les invariants $(B_E^+)^{\varphi_E = Id}$.*

Proposition 7.1. *On a l'égalité*

$$(B_E^+)^{\varphi_E = Id} = E.$$

Démonstration. Soit $b \in (B_E^+)^{\varphi_E = Id}$ non nul et $\mathcal{N}ewt(b)$ son polygone de Newton (cf. section 5.3.3). Puisque $\mathcal{N}ewt(\varphi_E(b))$ est obtenu à partir de $\mathcal{N}ewt(b)$ via la transformation du plan $(x, y) \mapsto (x, q^h y)$, les pentes non-infinies de $\mathcal{N}ewt(b)$ sont nulles. Or on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{N}ewt(b)(x) = +\infty$. On en déduit que pour $x \ll 0$, $\mathcal{N}ewt(b)(x) = +\infty$. D'après la proposition 5.33 cela entraîne que $b \in B_E^{b,+}$ et donc $b \in (B_E^{b,+})^{\varphi_E = Id} = E$. \square

7.1.2. *Structure d'espace de Banach sur $(B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$.* Soient $d, h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On note

$$(B^+)^{\varphi^h = \pi^d} = \{x \in B^+ \mid \varphi^h(x) = \pi^d x\}.$$

Puisque l'action de φ sur B^+ est continue, c'est un sous- E_h -espace vectoriel fermé dans l'espace de Fréchet B^+ . C'est donc un sous espace de Fréchet de B^+ .

Lemme 7.2. *Pour tout $r > 0$, la topologie induite par v_r sur $(B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ coïncide avec la topologie de Fréchet induite par celle de B^+ .*

Démonstration. Soient $r_1, r_2 > 0$. Choisissons $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{r_2}{q^{kh}} < r_1 < q^{k'h} r_2.$$

De la relation

$$v_{r'}(\pi^{-d} \varphi^h(x)) = q^h v_{\frac{r'}{q^h}}(x) - dr', \quad r' > 0, \quad x \in B^+,$$

on déduit qu'il existe des constantes $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$ telles que pour $x \in (B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ on ait

$$v_{\frac{r_2}{q^{kh}}}(x) = \alpha v_{r_2}(x) + \beta \quad \text{et} \quad v_{q^{k'h} r_2}(x) = \alpha' v_{r_2}(x) + \beta'.$$

La concavité de la fonction $r' \mapsto v_{r'}(x)$ fournit pour $x \in (B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ l'inégalité

$$v_{r_1}(x) \geq \inf\{\alpha v_{r_2}(x) + \beta, \alpha' v_{r_2}(x) + \beta'\}.$$

La topologie définie par v_{r_2} sur $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d}$ est donc plus fine que celle définie par v_{r_1} . Par symétrie on en déduit que les topologies définies par v_{r_1} et v_{r_2} sur $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d}$ coïncident. On conclut donc que la topologie induite sur $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d}$ par celle de B^+ coïncide avec la topologie définie par la norme q^{-v_r} pour n'importe quel $r > 0$. \square

Il s'ensuit que $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d}$ est un E_h -espace de Banach dans l'espace de Frechet B^+ . Pour n'importe quel r , la norme q^{-v_r} sur $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d}$ définit la topologie de Banach.

7.1.3. *Description via l'anneau \overline{B} .* Soit $\mathfrak{p}_0 = \{x \in B^{b,+} \mid v_0(x) > 0\}$, un idéal premier de $B^{b,+}$ et

$$\overline{B} = B^{b,+}/\mathfrak{p}_0.$$

Il résulte du lemme 5.30 et de la proposition 5.31 que l'injection $B^{b,+} \hookrightarrow B^+$ induit un isomorphisme

$$\overline{B} \xrightarrow{\sim} B^+/\{x \in B^+ \mid v_0(x) > 0\}.$$

On en déduit un morphisme naturel surjectif

$$B^+ \longrightarrow \overline{B}.$$

Proposition 7.3. *L'application précédente induit un isomorphisme*

$$(B^+)^{\varphi^h=\pi^d} \xrightarrow{\sim} (\overline{B})^{\varphi^h=\pi^d}.$$

Démonstration. Soit $x \in B^{b,+}$. Pour tout $k \geq 0$ et tout $r > 0$ on a

$$v_r(\pi^{-(k+1)d}\varphi^{(k+1)h}(x) - \pi^{-kd}\varphi^h(x)) = -kdr + q^{kh}v_{\frac{r}{q^{kh}}}(x - \pi^{-d}\varphi^h(x)).$$

De plus,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{\frac{r}{q^{kh}}}(x - \pi^{-d}\varphi^h(x)) = v_0(x - \pi^{-d}\varphi^h(x)).$$

De cela on déduit facilement que le morphisme $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d} \rightarrow (\overline{B})^{\varphi^h=\pi^d}$ possède un inverse naturel donné par

$$x \bmod \mathfrak{p}_0 \longmapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^{-kd}\varphi^{kh}(x).$$

\square

7.1.4. *Changement d'uniformisante.* Soit π' une autre uniformisante de E . Puisque k est algébriquement clos, il existe $u \in W_{\mathcal{O}_E}(k)^\times$ tel que

$$u^{\varphi^h-1} = \frac{\pi'}{\pi}.$$

Le choix d'un tel u induit un isomorphisme de E_h -espaces de Banach

$$\begin{aligned} (B^+)^{\varphi^h=\pi^d} &\xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi^h=\pi'^d} \\ x &\longmapsto u^d x. \end{aligned}$$

7.1.5. *Changement de corps E .* Soit $E'|E$ de degré fini et de corps résiduels $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$ contenus dans k . Soient $\pi_{E'}$ et π_E des uniformisantes.

Supposons d'abord $E'|E$ non-ramifiée, $E' = E_n = W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}^{\varphi_E^n = Id}$ et choisissons $\pi_{E'} = \pi_E$. On a alors $B_E^+ = B_{E_n}^+$ et $\varphi_{E_n} = \varphi_E^n$.

Proposition 7.4. *Soit $n \geq 1$ un entier. Le morphisme naturel*

$$(B_E^+)^{\varphi_E^h=\pi_E^d} \otimes_{E_h} E_{nh} \longrightarrow (B_{E_n}^+)^{\varphi_{E_n}^h=\pi_{E'}^d}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le E_{nh} -espace vectoriel $(B_{E_n}^+)^{\varphi_{E_n}^h = \pi_{E_n}^{nd}}$ est muni d'une action semi-linéaire de $\text{Gal}(E_{nh}|E_h)$ via l'action de $(\pi_E^{-d} \varphi_E^h)^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. La proposition résulte alors du théorème de Hilbert 90. \square

Supposons maintenant $E'|E$ quelconque. Soit $f_{E'/E}$ le degré résiduel. L'élément $\pi_{E'}^{[E':E]}/\pi_E^{f_{E'/E}}$ étant une unité de $\mathcal{O}_{E'}$, il existe $u \in W_{\mathcal{O}_{E'}}(k)^\times$ tel que

$$u^{\varphi_{E'}^h - 1} = \frac{\pi_{E'}^{[E':E]}}{\pi_E^{f_{E'/E}}}.$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d} &\longrightarrow (B_{E'}^+)^{\varphi_{E'}^h} = \pi_{E'}^{[E':E]d} \\ x &\longmapsto u^d x. \end{aligned}$$

Proposition 7.5. *L'application précédente induit un isomorphisme*

$$(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d} \otimes_{E_h} E'_h \xrightarrow{\sim} (B_{E'}^+)^{\varphi_{E'}^h = \pi_{E'}^{[E':E]d}}.$$

Démonstration. Utilisant la proposition 7.4 précédente on se ramène au cas où $E'|E$ est totalement ramifiée. On a alors $B_{E'}^+ = B_E^+ \otimes_E E'$, identification via laquelle $\varphi_{E'} = \varphi_E \otimes Id$. Le résultat est alors aisé à démontrer. \square

7.2. L'espace de Banach $(B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}$ vit dans les bivecteurs lorsque $d \leq h$.

Proposition 7.6. *Supposons $1 \leq d \leq h$.*

(1) *L'inclusion naturelle $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \subset B_E^+$ induit une égalité*

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^{\varphi_E^h = \pi_E^d} = (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}.$$

(2) *Il y a une bijection*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d,h} : \mathfrak{m}_F^d &\xrightarrow{\sim} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d} \\ (x_0, \dots, x_{d-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^d \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_i^{q^{-nh}}] \pi_E^{nd+i}. \end{aligned}$$

Démonstration. Le point (1) entraîne clairement le point (2). Utilisant la proposition 7.3 on est ramené à montrer que pour tout $x \in B^{b,+}$ dont l'image dans \overline{B} est dans $(\overline{B})^{\varphi^h = \pi^d}$, il existe $x' \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h = \pi^d}$ tel que $v_0(x - x') > 0$.

Soit donc $x \in B^{b,+}$ dont l'image dans \overline{B} est dans $(\overline{B})^{\varphi^h = \pi^d}$. Considérons l'opérateur

$$T = \pi^{-d} \varphi^h : B^{b,+} \longrightarrow B^{b,+}.$$

Soit $y = T(x) - x$, qui vérifie donc $v_0(y) > 0$. On a alors pour tout entier $k \geq 1$,

$$T^k(x) = x + y + T(y) + \dots + T^{k-1}(y).$$

Notons

$$y = \sum_{i \geq N} [y_i] \pi^i = \sum_{i \geq N} V_\pi^i [y_i^q].$$

pour un $N \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$T^k(y) = \sum_{i \geq N - kd} V_\pi^i [y_{i+kd}^{q^{i+kh}}].$$

On voit désormais les $(T^k(y))_{k \geq 0}$ comme des éléments de $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Regardons d'abord le cas $d < h$ qui est plus simple. Soit $s > 0$ et $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$. Puisque $d < h$ et $v_0(y) > 0$, il existe un entier $k(s)$ tel que pour $k \geq k(s)$ on ait

$$T^k(y) \in \ker (BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)).$$

On peut alors définir

$$z = \left(\sum_{0 \leq k \leq k(s)} T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) \right)_{s>0} \in \varprojlim_{s>0} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) = BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

Considérons alors $x + z \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On a $V_{\pi}^{-d} F^{h-d}(x + z) = (x + z)$, puisque cette égalité est vérifiée dans $BW(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)$ pour tout $s > 0$. On a donc, si l'on considère $x + z$ comme un élément de B^+ , $\varphi^h(x + z) = \pi^d(x + z)$. Pour conclure il faut donc voir que $v_0(z) > 0$. Mais on peut toujours écrire y sous la forme $y = [a]y'$ avec $v_0(y') > 0$ et $v_0(a) > 0$. On voit alors facilement que $z = [a]z'$ pour un élément $z' \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ défini par un procédé limite comme précédemment pour z :

$$z' = \left(\sum_{0 \leq k \leq k'(s)} [a^{q^{kh}-1}] T^k(y') \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) \right)_{s>0} \in \varprojlim_{s>0} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s).$$

Regardons maintenant le cas $d = h$. Pour tout $s > 0$, d'après la proposition 1.1 du chapitre II de [18] (tout du moins lorsque $E = \mathbb{Q}_p$, la preuve étant identique pour E quelconque), on peut donner un sens à la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s)) \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s).$$

Plus précisément, soit $T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_{\pi}^i [y_{i,k}]$ avec $y_{i,k} \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s$ et

$$\sum_{k=0}^l \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_{\pi}^i [y_{i,k}] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_{\pi}^i [z_{i,l}].$$

D'après la proposition 1.1 du chapitre II de [18], utilisant toujours que $v_0(y) > 0$, pour tout i il existe $l(i) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(z_{i,l})_{l \geq l(i)}$ soit constante. On pose alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s)) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} V_{\pi}^i [z_{i,l(i)}].$$

Notant $z_s \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)$ cet élément, on vérifie comme précédemment que si $z = (z_s)_{s>0} \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, $v_0(z) > 0$ et $\varphi^h(x + z) = \pi^d(x + z)$. \square

La bijection $\mathcal{L}_{d,h}$ précédente induit une structure d'espace de Banach sur \mathfrak{m}_F^d . Dans les sections qui suivent on va interpréter géométriquement cette structure d'espace de Banach.

7.3. \mathcal{O} -modules π -divisibles.

7.3.1. Généralités et théorie de Dieudonné. Si S est un \mathcal{O}_E -schéma sur lequel π est nilpotent, resp. un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$ -schéma formel, un \mathcal{O} -module π -divisible est un groupe p -divisible H sur S , muni d'une action de \mathcal{O}_E telle que l'action induite sur le \mathcal{O}_S -module $\mathrm{Lie} H$ soit l'action déduite du morphisme structural $S \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E)$, resp. $S \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$. La hauteur d'un \mathcal{O} -module π -divisible est un multiple de $[E : \mathbb{Q}_p]$. On appelle alors \mathcal{O} -hauteur la quantité

$$\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}(H) = \frac{\mathrm{ht}(H)}{[E : \mathbb{Q}_p]}.$$

Si k est un corps parfait extension de \mathbb{F}_q et H un \mathcal{O} -module π -divisible sur k , le module de Dieudonné contravariant du groupe p -divisible H , $\mathbb{D}(H)$, est un $W(k)$ -module muni d'une action de \mathcal{O}_E commutant à l'action du Frobenius et du Verschiebung F et V . On a une décomposition

$$\mathbb{D}(H) = \bigoplus_{\tau: \mathbb{F}_q \hookrightarrow k} \mathbb{D}(H)_{\tau}$$

où $\mathcal{O}_{E_0} = W(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathbb{D}(H)_{\tau}$ via le plongement $W(\tau) : \mathcal{O}_{E_0} \hookrightarrow W(k)$. Si σ désigne le Frobenius de $W(k)$, F est σ -linéaire et V est σ^{-1} -linéaire. On a de plus

$$F : \mathbb{D}(H)_{\tau} \rightarrow \mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} \quad \text{et} \quad V : \mathbb{D}(H)_{\tau} \rightarrow \mathbb{D}(H)_{\sigma^{-1}\tau}.$$

Puisque k est une extension de \mathbb{F}_q il y a un plongement canonique $can : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k$. On pose alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) = \mathbb{D}(H)_{can}.$$

Puisque $W_{\mathcal{O}_E}(k) = W(k) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E$, c'est un $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ -module libre de rang $\text{ht}_{\mathcal{O}}(H)$. Notons σ_E le Frobenius relatif de $W_{\mathcal{O}_E}(k)$, c'est à dire $\sigma^f \otimes Id$ où $q = p^f$. On note F_E , l'endomorphisme de $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ égal à F^f . Avec les notations précédentes, F_E est σ_E^{-1} -linéaire. Puisque l'action induite par \mathcal{O}_E sur $\text{Lie } H$ est l'action déduite du plongement canonique,

$$\begin{aligned} \omega_H = V\mathbb{D}(H)/p\mathbb{D}(H) &= \bigoplus_{\tau: \mathbb{F}_q \hookrightarrow k} V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau}/p\mathbb{D}(H)_{\tau} \\ &= V\mathbb{D}(H)_{\sigma can}/p\mathbb{D}(H)_{can}. \end{aligned}$$

On a donc si $\tau \neq can$, $V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} = p\mathbb{D}(H)_{\tau}$ et $p\mathbb{D}(H)_{can} \subset \pi V\mathbb{D}(H)_{\sigma can}$. Cela implique que $\pi\mathbb{D}(H) \subset F_E\mathbb{D}(H)$. On pose alors $V_{\pi} = \pi F_E^{-1}$. On a donc

$$F_E V_{\pi} = V_{\pi} F_E = \pi.$$

On note désormais F pour F_E agissant sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$. La correspondance $H \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), F, V_{\pi})$ induit alors une équivalence de catégories entre les \mathcal{O} -modules π -divisibles sur k et les triplets (D, F, V_{π}) où D est un $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ -module libre de rang fini, $F : D \rightarrow D$ est σ_E -linéaire, $V : D \rightarrow D$ est σ_E^{-1} -linéaire et $FV_{\pi} = V_{\pi}F = \pi$.

La théorie de Dieudonné covariante des \mathcal{O} -module π -divisibles est bien développée. Plus précisément, la théorie de Cartier des \mathcal{O} -modules formels π -divisibles est développée dans [13], [27], [30], [29] et le chapitre V.29 de [28]. Le point de vue cristallin de l'extension vectorielle universelle est développé dans [14] et l'appendice B de [16]. Nous utiliserons dans la suite la version contravariante suivante généralisant la théorie développée dans [18]. Si H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur k on peut montrer que le \mathcal{O} -module de Dieudonné précédent $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ s'identifie à

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(H, CW_{\mathcal{O}}).$$

De plus, $F : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ est induit par le morphisme $F : H \rightarrow H^{(q)}$ qui est la puissance f -ième du morphisme de Frobenius du groupe p -divisible H . Il y a une isogénie $V_{\pi} : H^{(q)} \rightarrow H$ induisant V_{π} sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$. Le \mathcal{O} -module π -divisible H se retrouve alors via la formule

$$H = \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}_E}(k)[F, V_{\pi}]}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), CW_{\mathcal{O}}).$$

Lorsque H est formel on peut de plus remplacer $CW_{\mathcal{O}}$ par les covecteurs de Witt formels, $\widehat{CW}_{\mathcal{O}}$.

7.3.2. Exemple. Nous utiliserons dans la suite l'exemple qui suit. Soient $d, h \geq 1$ avec $d \leq h$. Soit

$$\mathcal{G}_{d,h} = \ker \left(CW_{\mathcal{O}} \xrightarrow{F^{h-d} - V_{\pi}^d} CW_{\mathcal{O}} \right).$$

C'est un \mathcal{O} -module formel π -divisible de dimension d et de \mathcal{O} -hauteur h sur \mathbb{F}_q . Un système de coordonnées formelles est donné par (x_0, \dots, x_{d-1}) avec

$$\mathcal{G}_{d,h} = \left\{ \left[x_{b(i)}^{a(i)(h-d)} \right]_{i \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}} \right\}$$

où $-i = a(i)d + b(i)$ est la division euclidienne de $-i$ par d . Si $e \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{d,h}, CW_{\mathcal{O}})$ désigne le plongement canonique alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{d,h}) = \langle e, Fe, \dots, F^{h-d}e, V_{\pi}e, \dots, V_{\pi}^{d-1}e \rangle = \text{Hom}(\mathcal{G}_{d,h}, CW_{\mathcal{O}})$$

qui forme une base du \mathcal{O} -module de Dieudonné. Au système de coordonnées formelles précédent (x_0, \dots, x_{d-1}) est associé une loi de groupe formel sur \mathbb{F}_q ,

$$\mathfrak{F}_{d,h} = (\mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}, \dots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)}) \in \mathbb{F}_q[[x_0, \dots, x_{d-1}, y_0, \dots, y_{d-1}]]^d$$

où

$$(x_0, \dots, x_{d-1}) \underset{\mathfrak{F}_{d,h}}{+} (y_0, \dots, y_{d-1}) = (\mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}, \dots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)})$$

et avec les notations précédentes

$$\left[x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}} \right]_{i \leq 0} + \left[y_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}} \right]_{i \leq 0} = [\dots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)}, \dots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}]$$

dans $CW_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q[[x_0, \dots, x_{d-1}, y_0, \dots, y_{d-1}]])$.

Du point de vue de la théorie de Cartier covariante, le module de Cartier covariant de $\mathcal{G}_{d,h}$ est

$$M = \text{Hom}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, \mathcal{G}_{d,h})$$

qui est un module sur l'anneau de Cartier $\mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q} = \text{End}(\widehat{W}_{\mathcal{O}})^{\text{opp}}$. L'anneau de Cartier $\mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q}$ est le V -complété de $W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q)[F_{\pi}, V]$, c'est à dire

$$\left\{ \sum_{n,m \geq 0} V^n [a_{n,m}] F_{\pi}^m \mid a_{n,m} \in \mathbb{F}_q \text{ et } \forall n, a_{n,m} = 0 \text{ pour presque tout } m \right\}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_E = W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q) &\hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q} \\ \sum_{n \geq 0} V^n [a_n] &\mapsto \sum_{n \geq 0} V^n [a_n] F_{\pi}^n, \end{aligned}$$

l'action de $V \in \mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q} = \text{End}(\widehat{W}_{\mathcal{O}})^{\text{opp}}$ sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$ est donnée par l'opérateur F usuel agissant sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$, celle de $[a]$ est la multiplication par $[a]$ et celle de $F_{\pi} \in \mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q}$ est donnée par l'action de V_{π} . Soit

$$\begin{aligned} \epsilon : \widehat{W}_{\mathcal{O}} &\longrightarrow CW_{\mathcal{O}} \\ x &\longmapsto \sum_{n \geq 0} V_{\pi}^{-nd} F^{n(h-d)} x \text{ mod } W_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

où la somme infinie précédente est à valeurs dans les bivecteurs $BW_{\mathcal{O}}$ et on la réduit modulo $W_{\mathcal{O}}$, $BW_{\mathcal{O}}/W_{\mathcal{O}} = CW_{\mathcal{O}}$. On a $\epsilon \in M$ et comme $W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q)$ -module

$$M = \langle \epsilon, V\epsilon, \dots, V^{h-d}\epsilon, F_{\pi}\epsilon, \dots, F_{\pi}^{d-1}\epsilon \rangle.$$

qui forme une base du module de Cartier comme $\mathcal{O}_E = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_q)$ -module. Une V -base de ce module de Cartier est donnée par $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{d-1})$ où pour $0 \leq i \leq d-1$, $\epsilon_i = F_{\pi}^i \epsilon$. Les équations structurelles de M associées à cette V -base sont

$$\begin{cases} F_{\pi} \epsilon_i = \epsilon_{i+1} \text{ si } 0 \leq i < d-1 \\ F_{\pi} \epsilon_{d-1} = V^{h-d} \epsilon_0. \end{cases}$$

Elles fournissent une présentation du module de Cartier

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q}^d \xrightarrow{u} \mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q}^d \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où

$$u(x_0, \dots, x_{d-1}) = (x_{d-1} F_{\pi} - x_0 V^{h-d}, x_0 F_{\pi} - x_1, \dots, x_{d-2} F_{\pi} - x_{d-1}).$$

L'application

$$\begin{aligned} M = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, \mathcal{G}_{d,h}) &\longrightarrow \mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[[T]]) \\ u &\longmapsto u([T]) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme entre M et le sous- \mathcal{O}_E -module de $\mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[[T]])$ formé des courbes π -typiques. Puisque $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{d-1})$ est une V_{π} -base de M ,

$$\gamma = \sum_{i=0}^{d-1} \epsilon_i([x_i]) \in \mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[[x_0, \dots, x_{d-1}]])$$

définit un isomorphisme

$$\gamma : \text{Spf}(\mathbb{F}_q[[x_0, \dots, x_{d-1}]]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}.$$

On vérifie par un calcul immédiat que ces coordonnées formelles sont celles utilisées précédemment pour définir la loi de groupe formel $\mathfrak{F}_{d,h}$.

Soit maintenant \widetilde{M} le module de Cartier sur \mathcal{O}_E de V_π -base $(\tilde{\epsilon}_0, \dots, \tilde{\epsilon}_{d-1})$ et ayant pour équations structurelles

$$\begin{cases} F_\pi \tilde{\epsilon}_i = \tilde{\epsilon}_{i+1} \text{ si } 0 \leq i < d-1 \\ F_\pi \tilde{\epsilon}_{d-1} = V^{h-d} \tilde{\epsilon}_0. \end{cases}$$

Il admet la même présentation que la présentation précédente de M en remplaçant $\mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathbb{F}_q}$ par $\mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_E}$. Soit $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ le \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_E associé,

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} = \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}, \mathcal{O}_E}} \widetilde{M}.$$

On a donc $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \otimes \mathbb{F}_q = \mathcal{G}_{g,d}$ et une résolution sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$

$$0 \longrightarrow \widehat{W}_{\mathcal{O}}^d \xrightarrow{v} \widehat{W}_{\mathcal{O}}^d \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \longrightarrow 0$$

où

$$v(y_0, \dots, y_{d-1}) = (V_\pi y_{d-1} - F^{h-d} y_0, V_\pi y_0 - y_1, \dots, V_\pi y_{d-2} - y_{d-1}).$$

Pour $i \in \{0, \dots, d-1\}$

$$\tilde{\epsilon}_i([T]) \in \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}(\mathcal{O}_E[[T]])$$

est une courbe π -typique. Notons

$$\begin{aligned} \alpha_i : \mathcal{O}_E[[T]] &\longrightarrow \mathcal{O}_E[[x_0, \dots, x_{d-1}]] \\ T &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

Alors, si

$$\tilde{\gamma} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i*} \tilde{\epsilon}_i([T]) = \sum_{i=0}^{d-1} \tilde{\epsilon}_i([x_i]) \in \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}(\mathcal{O}_E[[x_0, \dots, x_{d-1}]]),$$

puisque $(\tilde{\epsilon}_i)_{0 \leq i \leq d-1}$ est une V -base du module de Cartier de $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$, il induit un isomorphisme

$$\tilde{\gamma} : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E[[x_0, \dots, x_{d-1}]]) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$$

c'est à dire un système de coordonnées formelles sur le groupe formel $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ et donc une loi de groupe formel en d variables. Ce système de coordonnées formelles de $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ relève celui utilisé précédemment pour $\mathcal{G}_{d,h}$.

Il existe alors un unique isomorphisme de \mathcal{O} -modules formels sur E

$$\log : \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \hat{\otimes} E \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_a^d$$

tel que l'isomorphisme induit au niveau des espaces tangents envoie la base de Lie $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ déduite de la V -base $(\tilde{\epsilon}_i)_{0 \leq i \leq d-1}$ sur la base canonique de Lie $\widehat{\mathbb{G}}_a^d = E^d$. Un tel isomorphisme est donné par des séries formelles

$$f = (f_0, \dots, f_{d-1}) \in E[[x_0, \dots, x_{d-1}]]^d$$

où (f_0, \dots, f_{d-1}) forme une base des logarithmes de notre loi de groupe formel que nous allons calculer explicitement. Pour $0 \leq i \leq d-1$ soit

$$g_i = (g_{i,0}, \dots, g_{i,d-1}) = \log \tilde{\epsilon}_i([T]) \in \widehat{\mathbb{G}}_a^d(E[[T]]) = E[[T]]^d.$$

Alors,

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} g_i(x_i).$$

De plus, pour $0 \leq i, j \leq d-1$, $g_{i,j}$ est une courbe π -typique de $\widehat{\mathbb{G}}_a$ vérifiant :

- (1) $F.g_{i,j} = g_{i+1,j}$ si $0 \leq i < d-1$
- (2) $F.g_{d-1,j} = V_\pi^{h-d}.g_{0,j}$
- (3) $g_{i,j}(T) \equiv 0 \pmod{T^2}$ si $i \neq j$ et $g_{i,i}(T) \equiv T \pmod{T^2}$.

Les courbes π -typiques de $\widehat{\mathbb{G}}_a(E[[T]]) = TE[[T]]$ sont les séries de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n T^{qn}$$

dans $E[[T]]$. L'opérateur V agit sur ces séries via $g(T) \mapsto g(T^q)$ et F_π via

$$\sum_{n \geq 0} a_n T^{qn} \mapsto \pi \sum_{n \geq 0} a_{n+1} T^{qn}.$$

On vérifie par un calcul explicite que les conditions (1), (2) et (3) imposent les formules

$$g_{i,j} = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{T^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} & \text{si } j \geq i \\ \sum_{n \geq 1} \frac{T^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} & \text{si } j < i. \end{cases}$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 7.7. *Considérons pour $0 \leq j \leq d-1$ la série*

$$f_j = \sum_{0 \leq i \leq j} \sum_{n \geq 0} \frac{x_i^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} + \sum_{j < i \leq d-1} \sum_{n \geq 1} \frac{x_i^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} \in E[[x_0, \dots, x_{d-1}]].$$

Alors, (f_0, \dots, f_{d-1}) sont les logarithmes d'une unique loi de \mathcal{O} -module formel de dimension d sur \mathcal{O}_E , $\widetilde{\mathfrak{F}}_{d,h}$, relevant la loi de \mathcal{O} -module formel $\mathfrak{F}_{d,h}$ sur \mathbb{F}_q .

Exemple 7.8. Si $d = 1$, $\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ est un groupe de Lubin-Tate associé à l'extension non-ramifiée E_h de E . Une loi de groupe formel associée à pour logarithme

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T^{q^{nh}}}{\pi^n}.$$

Cette loi de groupe formel est $\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,h} = f^{-1}(f(X) + f(Y)) \in \mathcal{O}_E[[X, Y]]$.

7.3.3. Quasi-logarithmes et leur interprétation rigide analytique. Soit $K|E$ un corps valué complet pour une valuation de rang un étendant la valuation π -adique de E . Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_K .

Écrivons $\mathcal{G} = \text{Spf}(R)$ où $R \simeq \mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_d]]$ avec $d = \dim(\mathcal{G})$. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_K$ un idéal contenant $\pi \mathcal{O}_K$. Soit $\widehat{R[\frac{1}{\pi}]}$ le complété de l'anneau $R[\frac{1}{\pi}]$ relativement à son idéal d'augmentation noyau du morphisme $R[\frac{1}{\pi}] \rightarrow K$,

$$\widehat{R[\frac{1}{\pi}]} \simeq K[[x_1, \dots, x_d]]$$

et $\mathcal{G} \hat{\otimes} K = \text{Spf}(\widehat{R[\frac{1}{\pi}]})$ est le groupe forme fibre générique de \mathcal{G} .

Définition 7.9. On note $\text{Quasilog}(\mathcal{G})$ les éléments f dans l'idéal maximal de $\widehat{R[\frac{1}{\pi}]}$ tels que $\Delta(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f \in R[\frac{1}{\pi}]$ et pour tout $a \in \mathcal{O}_E$, si $[a]_{\mathcal{G}} \in \text{End}(R)$ désigne l'action de a sur le \mathcal{O} -module \mathcal{G} , $f \circ [a]_{\mathcal{G}} - af \in R[\frac{1}{\pi}]$.

Le groupe des quasi-logarithmes contient l'idéal d'augmentation de $R[\frac{1}{\pi}]$. On note

$$\text{Quasilog}(\mathcal{G}) / \sim$$

le groupe quotient des classes d'équivalences de quasi-logarithmes. Le lemme qui suit dit que la définition précédente des quasi-logarithmes coïncide avec celle que l'on trouve dans le chapitre IV de [18] et dans le chapitre V de [31] (définition qui est donc trop forte).

Lemme 7.10. Fixons des coordonnées $R \simeq \mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_d]]$. Soit $f \in K[[x_1, \dots, x_d]]$ un quasi-logarithme. Alors pour $1 \leq i \leq d$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_d]][\frac{1}{\pi}]$.

Démonstration. Soit $\mathcal{G} \hat{\otimes} K \simeq \mathrm{Spf}(K[[x_1, \dots, x_d]])$ le groupe formel fibre générique du groupe formel \mathcal{G} . Voyons f comme un morphisme de schémas formels $f : \mathcal{G} \hat{\otimes} K \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_a$ envoyant la section unité de $\mathcal{G} \hat{\otimes} K$ sur celle de $\widehat{\mathbb{G}}_a$. Soit $\widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1$, resp. $\widehat{\Omega}_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1$, les formes différentielles sur $\mathcal{G} \hat{\otimes} K$, resp. \mathcal{G} . Le lemme équivaut alors à ce que la forme différentielle $f^*dT \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1$ vérifie

$$f^*dT \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1 \left[\frac{1}{\pi} \right].$$

Soit $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ une base des formes différentielles invariantes sur \mathcal{G} . On a alors

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1 = R\omega_1 \oplus \dots \oplus R\omega_d \subset \widehat{R \left[\frac{1}{\pi} \right]} \omega_1 \oplus \dots \oplus \widehat{R \left[\frac{1}{\pi} \right]} \omega_d = \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1.$$

Considérons le morphisme de K -schémas formels

$$\begin{aligned} g : \mathcal{G} \hat{\otimes} K \times_{\mathrm{Spf}(K)} \mathcal{G} \hat{\otimes} K &\longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_a \\ (x, y) &\longmapsto f(x+y) - f(x) - f(y). \end{aligned}$$

Notons

$$m : \mathcal{G} \hat{\otimes} K \times_{\mathrm{Spf}(K)} \mathcal{G} \hat{\otimes} K \rightarrow \mathcal{G} \hat{\otimes} K$$

la loi de groupe et pour $i = 1, 2$,

$$pr_i : \mathcal{G} \hat{\otimes} K \times_{\mathrm{Spf}(K)} \mathcal{G} \hat{\otimes} K \rightarrow \mathcal{G} \hat{\otimes} K$$

les deux projections. On a donc

$$g = f \circ m - f \circ pr_1 - f \circ pr_2.$$

L'invariance des formes ω_i , $i = 1, \dots, d$, se traduit en l'égalité

$$m^* \omega_i = pr_1^* \omega_i + pr_2^* \omega_i.$$

Si

$$f^*dT = \sum_{i=1}^d \lambda_i \omega_i$$

avec $\lambda_i \in \widehat{R \left[\frac{1}{\pi} \right]}$ on a donc

$$\begin{aligned} g^*dT &= \sum_i [(\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_1) pr_1^* \omega_i + (\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_2) pr_2^* \omega_i] \\ &\in \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K \times \mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1 = pr_1^* \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1 \oplus pr_2^* \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \hat{\otimes} K/K}^1. \end{aligned}$$

Mais puisque $g \in (R \hat{\otimes} R) \left[\frac{1}{\pi} \right]$,

$$g^*dT \in \widehat{\Omega}_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1 \left[\frac{1}{\pi} \right] = \widehat{\Omega}_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1 \left[\frac{1}{\pi} \right] \otimes_K R \left[\frac{1}{\pi} \right] \oplus R \left[\frac{1}{\pi} \right] \otimes_K \widehat{\Omega}_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}^1 \left[\frac{1}{\pi} \right].$$

On en déduit que pour tout i , $\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_1 \in (R \hat{\otimes} R) \left[\frac{1}{\pi} \right]$ i.e. la « fonction » $(x, y) \mapsto \lambda_i(x+y) - \lambda_i(x)$ est dans $(R \hat{\otimes} R) \left[\frac{1}{\pi} \right]$. Spécialisant en $x = 0$ on en déduit que pour tout i , $\lambda_i \in R \left[\frac{1}{\pi} \right]$. \square

Soit $\mathcal{G} \hat{\otimes} K$ la fibre générique du groupe formel \mathcal{G} comme K -groupe formel. Il y a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G} \hat{\otimes} K, \widehat{\mathbb{G}}_a) &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{Lie} \mathcal{G} \left[\frac{1}{\pi} \right])^* = \omega_{\mathcal{G}} \left[\frac{1}{\pi} \right] \\ f &\longmapsto f^*dT. \end{aligned}$$

Le K -espace vectoriel $\omega_{\mathcal{G}} \left[\frac{1}{\pi} \right]$ se plonge donc dans $\mathrm{Quasilog}(\mathcal{G}) / \sim$. Ce sous-espace vectoriel de l'espace des classes d'équivalence de quasi-logarithme est l'espace des logarithmes, c'est à dire les $f \in \widehat{R \left[\frac{1}{\pi} \right]}$ tels que $\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$. La filtration déduite sur les quasi-logarithmes est la filtration de Hodge.

Prenons maintenant un point de vue rigide analytique. On note G la fibre générique de \mathcal{G} comme K -groupe rigide analytique. En tant qu'espace rigide analytique, G est isomorphe à une boule ouverte de dimension $\dim \mathcal{G}$.

Définition 7.11. On note $\text{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{\text{rig}})$ les morphisme $f : G \rightarrow \mathbf{G}_a^{\text{rig}}$ d'espaces analytiques rigides vérifiant $f(0) = 0$,

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_\infty < +\infty$$

où $f(x+y) - f(x) - f(y) : G \times G \rightarrow \mathbf{G}_a^{\text{rig}}$ et pour tout $a \in \mathcal{O}_E$,

$$\|f(ax) - af(x)\|_\infty < +\infty.$$

On note $\text{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{\text{rig}})/\sim$ le quotient par le sous-groupe formé des $f : G \rightarrow \mathbf{G}_a^{\text{rig}}$ tels que $\|f\|_\infty < +\infty$.

Le groupe formel $\mathcal{G} \hat{\otimes} K$ se retrouve à partir du groupe analytique rigide G comme étant $\text{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{G,0})$ où $\mathcal{O}_{G,0}$ désigne l'anneau local des germes de fonctions analytiques rigides au voisinage de l'élément neutre de G . Tout morphisme d'espaces rigides $f : G \rightarrow \mathbf{G}_a^{\text{rig}}$ tel que $f(0) = 0$ définit donc naturellement un morphisme de schémas formels $\mathcal{G} \hat{\otimes} K \rightarrow \hat{\mathbb{G}}_a$. On vérifie en utilisant le lemme 7.10 que l'application naturelle

$$\text{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{\text{rig}}) \longrightarrow \text{Quasilog}(\mathcal{G})$$

est un isomorphisme.

Soit I un idéal de définition de R , via un isomorphisme $R \simeq \mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_d]]$ on peut prendre $I = (\pi, x_1, \dots, x_n)$ (on considère le groupe formel \mathcal{G} comme un groupe formel sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et non $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, auquel cas on aurait pris $I = (x_1, \dots, x_n)$). On a alors

$$CW_{\mathcal{O}}(R) = \varprojlim_{n \geq 0} CW_{\mathcal{O}}(R/I^n)$$

et donc

$$CW_{\mathcal{O}}(R) = \{[y_i]_{i \leq 0} \mid y_i \in R, \exists N, \exists k, (\sum_{i \leq N} R \cdot y_i)^k \subset I\}.$$

Il y a un morphisme \mathcal{O}_E -linéaire ([18], II.5 lorsque $E = \mathbb{Q}_p$)

$$\begin{aligned} w : CW_{\mathcal{O}}(R) &\longrightarrow \widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]} \\ [y_n]_{n \leq 0} &\longmapsto \sum_{n \geq 0} \pi^{-n} y_{-n}^{\pi^n}. \end{aligned}$$

Soit maintenant \mathfrak{a} un idéal de \mathcal{O}_K contenu dans son idéal maximal et tel que $\pi \in \mathfrak{a}$. Notons $\mathcal{G}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ d'algèbre $R_{\mathfrak{a}} = R/\mathfrak{a}R$. On a alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}, CW_{\mathcal{O}}) = \{[y_n]_{n \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}}) \mid [\Delta(y_n)]_{n \leq 0} = [y_n \otimes 1]_{n \leq 0} + [1 \otimes y_n]_{n \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}} \hat{\otimes} R_{\mathfrak{a}})\}$$

où $\Delta : R \rightarrow R \hat{\otimes} R$ désigne la comultiplication de notre groupe formel. D'après [18] chap. IV, il y a une application \mathcal{O}_E -linéaire

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}, CW_{\mathcal{O}}) &\longrightarrow \text{Quasilog}(\mathcal{G})/\sim \\ x &\longmapsto w(\hat{x}) \end{aligned}$$

où $\hat{x} \in CW_{\mathcal{O}}(R)$ est un relèvement quelconque de $x \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}})$. Notons k_K le corps résiduel de K que l'on suppose parfait et supposons fixé une section du morphisme $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \rightarrow k_K$ (lorsque la valuation de K est discrète le relèvement de Teichmüller fournit canoniquement une telle section). Soit \mathcal{G}_{k_K} la réduction de \mathcal{G} sur le corps résiduel. Faisons l'hypothèse suivante : l'identité de \mathcal{G}_{k_K} de relève en une quasi-isogénie (nécessairement unique)

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K} \otimes_{k_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

Par rigidité des quasi-isogénies, lorsque la valuation de K est discrète cette hypothèse est automatiquement vérifiée. Alors, toujours d'après [18] chap. IV, si $D = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{k_K}, CW_{\mathcal{O}})$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de \mathcal{G} , ρ et le morphisme précédent induisent un isomorphisme

$$D \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_K)} K \xrightarrow{\sim} \text{Quasilog}(\mathcal{G}) / \sim.$$

Exemple 7.12. Soit $\tilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ le \mathcal{O} -module formel sur \mathcal{O}_E de l'exemple 7.8. Une base de ses quasi-logarithmes est

$$\sum_{n \geq 0} \frac{T^q \pi^{nh+i}}{\pi^n}$$

lorsque i varie entre 0 et $h-1$.

7.4. Description de $(B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ en termes de \mathcal{O} -modules π -divisibles lorsque $d \leq h$. On va maintenant décrire géométriquement la structure d'espace de Banach sur \mathfrak{m}_F^d déduite de la bijection $\mathcal{L}_{d,h}$ de la proposition 7.6. Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur k . On note $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) = \text{Hom}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spf}(\mathcal{O}_F), \mathcal{G})$. Pour tout $s > 0$, si $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$, soit

$$\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F) = \ker(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)).$$

On vérifie aisément la proposition qui suit.

Proposition 7.13. *Le groupe $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ est un E -espace vectoriel. De plus, pour tout $s > 0$, $\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F)$ est un sous- \mathcal{O}_E -module π -adiquement complet de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ qui définit une structure d'espace de Banach sur $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$, c'est à dire est la boule unité d'une norme de Banach sur $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$. La topologie de Banach ainsi définie ne dépend pas du choix de $s > 0$.*

Soit

$$G = (\mathcal{G} \hat{\otimes} \mathcal{O}_F)^{rig}$$

la fibre générique du $\text{Spf}(\mathcal{O}_F)$ -schéma formel $\mathcal{G} \hat{\otimes} \mathcal{O}_F$ comme F -espace analytique rigide. Il s'agit d'un groupe analytique rigide sur F tel que

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) = G(F).$$

Pour tout $s > 0$, $s \in v(F^\times)$, il y a un sous-groupe affinoïde $G_s \subset G$, tel que

$$\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F) = G_s(F).$$

Après avoir fixé des coordonnées formels sur \mathcal{G} , c'est à dire un isomorphisme $\text{Spf}(k[[x_1, \dots, x_d]]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$, on a

$$G \simeq \mathbb{B}^d,$$

la boule ouverte unité rigide analytique de dimension $d = \dim(\mathcal{G})$ sur F et

$$G_s \simeq \mathbb{B}^d(0, q^{-s})$$

la boule fermée de rayon q^{-s} dans la boule ouverte. La multiplication par π , $\times \pi : G \rightarrow G$, vérifie alors que pour tout $s > 0$, on a un recouvrement admissible

$$\bigcup_{n \geq 1} \pi^{-n} G_s = G$$

et pour $s > t > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi^n G_s \subset G_t.$$

Remarquons enfin que le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ de la catégorie des \mathcal{O} -modules formels π -divisibles dans celle des E -espaces de Banach se factorise par la catégorie \mathcal{O} -modules formels π -divisibles à isogénies près.

Considérons maintenant le module de Dieudonné contravariant de \mathcal{G} ,

$$D = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, CW_{\mathcal{O}}).$$

Notons $F, V_\pi : D \rightarrow D$ son Frobenius et son Verschiebung. Il y a alors un isomorphisme naturel

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_\pi]}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)).$$

où si $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) &= \varprojlim_{s>0} \mathcal{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) \\ CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) &= \varprojlim_{s>0} CW(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) = \{[x_i]_{i \leq 0} \mid x_i \in \mathcal{O}_F, \liminf_{i \rightarrow -\infty} v(x_i) > 0\}. \end{aligned}$$

Puisque \mathcal{G} est formel, dans les formules précédentes on pourrait remplacer $CW_{\mathcal{O}}$ par $\widehat{CW}_{\mathcal{O}}$ et en particulier $CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ par

$$\widehat{CW}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) = \{[x_i]_{i \leq 0} \mid x_i \in \mathfrak{m}_F, \liminf_{i \rightarrow -\infty} v(x_i) > 0\}.$$

Proposition 7.14. *L'application de réduction $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \rightarrow CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ induit un isomorphisme de \mathcal{O}_E -modules*

$$\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_{\pi}]}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_{\pi}]}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)).$$

Démonstration. Puisque F est bijectif sur $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ et $CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ on a pour $* \in \{BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\}$,

$$\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D, *) = \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_{\pi}]}(D, *).$$

La suite exacte

$$0 \rightarrow W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \rightarrow BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \rightarrow CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow 0.$$

Pour $* \in \{W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\}$, le $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module $\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, *)$ est muni d'un opérateur σ^{-1} -linéaire ψ en posant $\psi(u) = F^{-1} \circ u \circ F$. La suite exacte précédente est une suite exacte de $W_{\mathcal{O}}(k)$ -modules munis d'un tel opérateur. En prenant les invariants sous un tel opérateur elle induit donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \rightarrow A$$

où

$$A = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{Id - \psi} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))).$$

Puisque F est topologiquement nilpotent sur D et bijectif sur $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$,

$$\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) = 0.$$

La nilpotence topologique de F sur D implique également que l'opérateur ψ agissant sur le $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ -module libre $\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ est π -adiquement topologiquement nilpotent. On en déduit que $Id - \psi$ est bijectif et donc $A = 0$. \square

Remarque 7.15. *Par définition, $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ où les applications de transition sont données par $V_{\pi} : CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \rightarrow CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. Soit $n \gg 0$ tel que $F^n D \subset V_{\pi} D$. Posons $\gamma = V_{\pi}^{-1} F^n$ l'endomorphisme associé de D . Alors, si $u : D \rightarrow CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ commute à F et V_{π} , l'unique relèvement donné par la proposition précédente est*

$$(F^{-n} \circ u \circ \gamma^n)_{n \geq 0} : D \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

De la proposition précédente, du théorème de Dieudonné-Manin et du point (1) de la proposition 7.6 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 7.16. *Il y a un isomorphisme de E -espaces vectoriels*

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_{\pi}]}(D[\frac{1}{\pi}], BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) = \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+)$$

où $D[\frac{1}{\pi}]$ est le \mathcal{O} -module de Dieudonné rationnel contravariant de \mathcal{G} .

Soient $1 \leq d \leq h$ et

$$\mathcal{G}_{d,h} = \ker \left(CW_{\mathcal{O}} \xrightarrow{F^{h-d} - V_{\pi}^d} CW_{\mathcal{O}} \right),$$

le \mathcal{O} -module formel de la section 7.3.2. Soit $e : \mathcal{G}_{d,h} \hookrightarrow CW_{\mathcal{O}}$ le générateur canonique de son module de Dieudonné, c'est à dire le plongement canonique. Soit (x_0, \dots, x_{d-1}) les coordonnées formelles sur $\mathcal{G}_{d,h}$ de la section 7.3.2, c'est à dire l'isomorphisme

$$\mathrm{Spf}(k[[x_0, \dots, x_{d-1}]]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}$$

tel que composé avec $e : \mathcal{G}_{d,h} \hookrightarrow CW_{\mathcal{O}}$ ce soit

$$[\dots, x_0^{q^{(h-d)}}, x_{d-1}, \dots, x_0] = [x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}]_{i \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(k[[x_0, \dots, x_{d-1}]])$$

où $-i = a(i)d + b(i)$ est la division euclidienne de $-i$ par d . Ce choix de coordonnées formelles induit une bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)[F, V_{\pi}]}(D, B^+) &\xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi^h = \pi^d} \\ u &\longmapsto u(e). \end{aligned}$$

Proposition 7.17. *Soit $\mathfrak{F}_{d,h}$ la loi de groupe formel associée à $\mathcal{G}_{d,h}$ et au choix précédent de coordonnées formelles. Via ces choix, l'isomorphisme de E -espaces vectoriels*

$$\left(\mathfrak{m}_F^d, + \right)_{\mathfrak{F}_{d,h}} \xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$$

est donné par

$$(x_0, \dots, x_{d-1}) \longmapsto \pi^{-d} \mathcal{L}_{d,h}(x_{d-1}^{q^{d-1}}, \dots, x_1^q, x_0)$$

où $\mathcal{L}_{d,h}$ est l'application de la proposition 7.6.

Démonstration. La bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h = \pi^d}$$

est donnée par

$$(x_0, \dots, x_{d-1}) \longmapsto \sum_{i \leq 0} V_{\pi}^i [x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}] = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n \leq 0} V_{\pi}^{nd-i} [x_i^{q^{-n(h-d)}}].$$

La bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h = \pi^d}$$

associe donc à (x_0, \dots, x_{d-1})

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_{\pi}^{nd-i} [x_i^{q^{-n(h-d)}}] &= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_i^{q^{-n(h-d) - (nd-i)}}] \pi^{nd-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_i^{q^{-nh+i}}] \pi^{nd-i}. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. \square

On a défini sur le E -espace vectoriel $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F)$ une structure d'espace de Banach (prop. 7.13). De plus (cf. section 7.1.2) $(B_E^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ est un sous-espace de Banach de l'espace de Fréchet B^+ . Utilisant la formule explicite fournie par la proposition précédente on vérifie facilement la proposition qui suit.

Proposition 7.18. *L'isomorphisme précédent $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} (B_E^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ est un homéomorphisme d'espaces de Banach.*

On a donc obtenu une interprétation géométrique de l'espace de Banach $(B_E^+)^{\varphi^h = \pi^d}$.

Exemple 7.19. Supposons $E = \mathbb{Q}_p$ et $d = h = 1$. Soit la loi de groupe formel $\tilde{\mathfrak{F}}$ sur \mathbb{Z}_p de logarithme $\sum_{n \geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n}$ et \mathfrak{F} sa réduction sur \mathbb{F}_p . Il y a un isomorphisme de E -espaces de Banach

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : (\mathfrak{m}_F, +_{\tilde{\mathfrak{F}}}) &\xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n^{p^{-n}}] p^n. \end{aligned}$$

Soit

$$E = \exp \left(\sum_{n \geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n} \right) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$$

l'exponentielle d'Artin-Hasse. Elle induit un isomorphisme de lois de groupe formel

$$E : \mathfrak{F} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_m.$$

On en déduit que l'on a un diagramme commutatif d'isomorphismes d'espaces de Banach

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{m}_F, +_{\tilde{\mathfrak{F}}}) & & \\ \downarrow E \simeq & \searrow \mathcal{L} & \\ (1 + \mathfrak{m}_F, \times) & & (B^+)^{\varphi=p} \end{array}$$

(Les flèches diagonales sont étiquetées avec \simeq et $\log([-])$)

7.5. Lien avec l'application des périodes d'un groupe p -divisible.

7.5.1. *Un résultat de relèvement.* Soit A une \mathcal{O}_E -algèbre π -adique et \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur A .

Définition 7.20. Si B est une A -algèbre adique pour un idéal contenant π , posant $\mathcal{G}(B) := \text{Hom}_{\text{Spf}(A)}(\text{Spf}(B), \mathcal{G})$, on note

$$X(\mathcal{G})(B) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathcal{G}(B) \text{ et } \pi x_{n+1} = x_n\}.$$

Remarquons que $X(\mathcal{G})(B)$ est un E -espace vectoriel ne dépendant que de la classe d'isogénie de \mathcal{G} .

Proposition 7.21. Soit B une A -algèbre J -adique avec $(\pi) \subset J$. Soit $I \subset J$ un idéal de B fermé pour la topologie J -adique. Munissons B de la topologie J -adique et B/I de la topologie J/I -adique. L'application de réduction modulo I induit alors un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$X(\mathcal{G})(B) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})(B/I).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(B) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k \geq 1} \mathcal{G}(B/J^k) \\ \mathcal{G}(B/I) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k \geq 1} \mathcal{G}(B/I + J^k). \end{aligned}$$

qui induisent donc des bijections

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G})(B) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k \geq 1} X(\mathcal{G})(B/J^k) \\ X(\mathcal{G})(B/I) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k \geq 1} X(\mathcal{G})(B/I + J^k). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer B par B/J^k , I par $I + J^k/J^k$ et \mathcal{G} par $\mathcal{G} \otimes B/J^k$ pour un $k \geq 1$ on peut donc supposer qu'il existe un entier k tel $J^k = 0$. On a donc en particulier $I^k = 0$ et $\pi^k B = 0$. L'application de réduction

$$\mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I)$$

se dévisse en

$$\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B/I^k) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^{k-1}) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^{k-2}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^2) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I).$$

Pour un indice l compris entre 1 et k , puisque $\pi^k B = 0$ et donc $\pi^k \text{Lie } \mathcal{G} = 0$,

$$\ker(\mathcal{G}(B/I^l) \rightarrow \mathcal{G}(B/I^{l-1}))$$

est annulé par π^k . On en déduit que

$$\ker(\mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I))$$

est annulé par π^{k^2} .

Soit maintenant

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ker(X(\mathcal{G})(B) \rightarrow X(\mathcal{G})(B/I)).$$

On a donc pour tout n , $\pi^{k^2} x_n = x_{n+k^2} = 0$. Cela étant vrai pour tout n , $x = 0$. L'application de réduction

$$X(\mathcal{G})(B) \longrightarrow X(\mathcal{G})(B/I)$$

est donc injective.

Soit maintenant $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(B/I)$ et pour tout n , $\hat{x}_n \in \mathcal{G}(B)$ un relèvement quelconque de x_n . D'après le résultat précédent, pour tout n la suite

$$(\pi^m \hat{x}_{n+m})_{m \geq 0}$$

est constante pour $m \gg 0$. On vérifie alors facilement que l'application

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \lim_{m \rightarrow +\infty} \pi^m \hat{x}_{n+m}$$

induit un inverse à l'application de réduction modulo I . □

7.5.2. Interprétation de l'isomorphisme $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi^h = \pi^d}$ en termes de quasi-logarithmes. Soit maintenant \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur $W_{\mathcal{O}_E}(k)$. On note \mathcal{G}_k sa réduction sur le corps résiduel. Munissons $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ de la topologie $(\pi, [a])$ -adique pour n'importe quel $a \in \mathfrak{m}_F$ non nul (il s'agit de la topologie faible). D'après la proposition 7.21 l'application de réduction modulo π induit une bijection

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}_k)(\mathcal{O}_F).$$

De plus,

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G}_k)(\mathcal{O}_F) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto x_0. \end{aligned}$$

On dispose donc d'un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F).$$

Soit $G = \mathcal{G}^{rig}$ la fibre générique de \mathcal{G} comme $W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}$ -groupe rigide analytique. Soit $\Gamma(G, \mathcal{O}_G) = \text{Hom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les domaines affinoïdes de G c'est un E -espace de Frechet. De plus, l'espace vectoriel $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_G)[\frac{1}{\pi}] = \text{Hom}(\mathcal{G}, \widehat{\mathbb{G}}_a)[\frac{1}{\pi}]$, les fonctions rigides analytiques bornées, est dense dans cet espace de Frechet. Si $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ il y a une application d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{G}, \widehat{\mathbb{G}}_a)[\frac{1}{\pi}] &\longrightarrow B^{b,+} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Lemme 7.22. *Pour $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, l'application d'évaluation précédente s'étend en une unique application continue entre espaces de Frechet*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G, \mathbb{G}_a^{rig}) &\longrightarrow B^+ \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $r > 0$ notons w_r la valuation de Gauss qui est la borne inférieure de la valuation d'une fonction rigide analytique sur la boule de rayon q^{-r} dans l'espace rigide G . On vérifie par un calcul en coordonnées que pour $f \in \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_G) \left[\frac{1}{\pi} \right]$,

$$v_r(f(x)) \geq w_{v_r(x)}(f).$$

□

On peut donc définir pour $f \in \text{Quasilog}(\mathcal{G}) = \text{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$ (cf. section 7.3.3) et $x \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$, $f(x) \in B^+$. Concrètement, si (T_1, \dots, T_d) est un système de coordonnées formelles sur \mathcal{G} , $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} T_1^{\alpha_1} \dots T_d^{\alpha_d}$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \subset W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^d$,

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

dans B^+ où

$$\mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) = \{(x_1, \dots, x_d) \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^d \mid \forall i, x_i \bmod \pi \in \mathfrak{m}_F\}.$$

Lemme 7.23. *Soit $f : G \rightarrow \mathbb{G}_a^{rig}$ un quasi-morphisme. Il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|\pi^m f - f \circ \pi^m\|_{\infty} \leq A$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|\pi^{m+1} f - f \circ \pi^{m+1}\|_{\infty} \leq \sup\{\|\pi(\pi^m f - f \circ \pi^m)\|_{\infty}, \|(\pi f - f \circ \pi) \circ \pi^m\|_{\infty}\}$$

pour en déduire par récurrence sur m que

$$\|\pi^m f - f \circ \pi^m\|_{\infty} \leq \|\pi f - f \circ \pi\|_{\infty}.$$

□

Lemme 7.24. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ et $f \in \text{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (1) *La suite $(\pi^n f(x_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est convergente dans B^+ .*
- (2) *Si f est borné, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n) = 0$.*
- (3) *Si y est un autre élément de $X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(y_n).$$

Démonstration. Soit $r > 0$. On reprend les notations de la démonstration du lemme 7.22. Pour $n, m \geq 0$,

$$\begin{aligned} v_r(\pi^{n+m} f(x_{n+m}) - \pi^n f(x_n)) &= nr + v_r(\pi^m f(x_{n+m}) - \pi^n f(x_n)) \\ &\geq nr + w_{v_r(x_{n+m})}(\pi^m f - f \circ \pi^m) \\ &\geq nr + \inf_{r' > 0} w_{r'}(\pi^m f - f \circ \pi^m). \end{aligned}$$

Puisque f est un quasi-morphisme, d'après le lemme 7.23 il existe une constante A indépendante de m telle que $\inf_{r' > 0} w_{r'}(\pi^m f - f \circ \pi^m) \geq A$. On en déduit aussitôt que la suite $(\pi^n f(x_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans B^+ , d'où le point (1). Le point (2) est immédiat et le point (3) ne pose pas de problème. □

Du lemme précédent on déduit que l'on dispose d'un morphisme de E -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) &\longrightarrow \text{Hom}(\text{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig}) / \sim, B^+) \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto [f \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n)]. \end{aligned}$$

Soit

$$D = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_k, CW_{\mathcal{O}})$$

le module de Dieudonné contravariant de \mathcal{G}_k . Rappelons (cf. fin de la section 7.3.3) qu'il y a un isomorphisme

$$D\left[\frac{1}{\pi}\right] \xrightarrow{\sim} \text{QuasiLog}(\mathcal{G})/\sim.$$

On a de plus vu qu'on a un isomorphisme canonique

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F).$$

On obtient donc un morphisme

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \text{Hom}_E(D\left[\frac{1}{\pi}\right], B^+).$$

Proposition 7.25. *Le morphisme $\mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \text{Hom}_E(D\left[\frac{1}{\pi}\right], B^+)$ construit via les quasi-logarithmes de \mathcal{G} coïncide avec le morphisme du corollaire 7.16.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = \text{Spf}(R)$ et $\mathcal{G}_k = \text{Spf}(R/\pi R)$. Si

$$g = [g_n]_{n \leq 0} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_k, CW_{\mathcal{O}}) \subset CW_{\mathcal{O}}(R/\pi R),$$

on note pour tout n , $\hat{g}_n \in R$ un relèvement quelconque de g_n dans l'idéal d'augmentation de R et

$$\sum_{n \leq 0} \pi^n \hat{g}_n^{q^{-n}} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$$

le quasi-logarithme associé. Remarquons que la série précédente est convergente pour la topologie de Fréchet de $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$. Pour tout $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, l'évaluation du quasi-logarithme précédent sur x vaut donc dans B^+

$$\sum_{n \leq 0} \pi^n \hat{g}_n(x)^{q^{-n}}.$$

Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ il lui correspond l'application qui au quasi-logarithme précédent associe

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \hat{g}_n(x_m)^{q^{-n}}.$$

Commençons par vérifier que cette application $D\left[\frac{1}{\pi}\right] \rightarrow B^+$ commute au Frobenius. Du point de vue des classes d'équivalence de quasi-logarithmes, l'action du Frobenius sur le module de Dieudonné est donnée par

$$\sum_{n \leq 0} \pi^n \hat{g}_n^{q^{-n}} \longmapsto \sum_{n \leq 0} \pi^n \hat{g}_n^{q^{-n+1}}.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \varphi(\hat{g}_n(x_m))^{q^{-n}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} (\hat{g}_n(x_m)^q)^{q^{-n}}.$$

Or on a dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{g}_n(x_m)) &\equiv \hat{g}_n(x_m)^q \pmod{\pi} \\ \implies \varphi(\hat{g}_n(x_m))^{q^{-n}} &\equiv (\hat{g}_n(x_m)^q)^{q^{-n}} \pmod{\pi^{-n+1}} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \varphi(\hat{g}_n(x_m))^{q^{-n}} - \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} (\hat{g}_n(x_m)^q)^{q^{-n}} \in \pi^m W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$$

qui tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. On a donc montré que notre morphisme commute au Frobenius.

Puisque le morphisme de Frobenius du module de Dieudonné D est π -adiquement topologiquement nilpotent, deux morphismes de D à valeurs dans B^+ compatibles aux Frobenius coïncident si et seulement si leur différence est à valeurs dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. À $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ est associé $\bar{x}_0 := x_0 \pmod{\pi}$ dans $\mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F)$. Pour montrer le théorème il suffit donc de montrer que

$$\sum_{n \leq 0} V_{\pi}^n [g_n(\bar{x}_0)] - \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \hat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

On a

$$\sum_{n \leq 0} V_\pi^n [g_n(\bar{x}_0)] = \sum_{n \leq 0} \pi^n [g_n(\bar{x}_0)^{q^{-n}}].$$

Puisque $[g_n]_{n \leq 0}$ est un morphisme de \mathcal{G}_k à valeurs dans $CW_{\mathcal{O}}$ il commute à l'action de π^m . Écrivant $\pi^m = V_\pi^m F^m$ comme endomorphisme de $CW_{\mathcal{O}}$ et utilisant le fait que $\pi^m x_m = x_0$ on obtient que lorsque $n \leq 0$, $m \geq 0$ et $n + m \leq 0$ on a

$$\begin{aligned} \widehat{g}_n(x_m)^{q^m} &\equiv \widehat{g}_{n+m}(x_0) \pmod{\pi} \\ &\equiv [g_{n+m}(\bar{x}_0)] \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

On a donc sous les conditions précédentes

$$\widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} \equiv [g_{n+m}(\bar{x}_0)^{q^{-(n+m)}}] \pmod{\pi^{-(n+m)+1}}.$$

Écrivons pour $m \geq 0$

$$\sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} = \sum_{m+n \leq 0} \pi^{n+m} \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} + \sum_{-m < n \leq 0} \pi^{n+m} \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}}.$$

Le second termes est dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. De plus, d'après la congruence établie précédemment

$$\sum_{m+n \leq 0} \pi^{n+m} \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} - \sum_{n \leq 0} V_\pi^n [g_n(\bar{x}_0)] \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

Puisque $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ est fermé dans B^+ on en déduit le résultat en passant à la limite sur m . \square

Exemple 7.26. Soit (T_0, \dots, T_{d-1}) un système de coordonnées formelles sur \mathcal{G} et \mathfrak{F} la loi de groupe formel associée. Soit $f \in E[[T_0, \dots, T_{d-1}]]$ un logarithme. Si $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, $\pi^n f(y_n) = f(y_0)$. Le morphisme défini par f ,

$$(\mathfrak{m}_F^d, +)_{\mathfrak{F}} \longrightarrow B^+$$

est donc donné par

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, x_{d-1}) &\longmapsto f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} [\pi^n]_{\mathfrak{F}}([x_0^{(n)}], \dots, [x_{d-1}^{(n)}])\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f([x_0^{(n)}], \dots, [x_{d-1}^{(n)}]). \end{aligned}$$

où $[\pi^n]_{\mathfrak{F}}(x_0^{(n)}, \dots, x_{d-1}^{(n)}) = (x_0, \dots, x_{d-1}) \in \mathfrak{m}_F^d$.

Exemple 7.27. Soit $\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,h}$ la loi de groupe formel de l'exemple 7.8 de réduction $\mathfrak{F}_{1,h}$ modulo π . Soit $f(T) = \sum_{k \geq 0} \frac{T^k}{\pi^k}$ son logarithme. On a $[\pi]_{\mathfrak{F}_{1,h}} = T^q$. L'isomorphisme associé

$$(\mathfrak{m}_F, +)_{\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,h}} \xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi^h = \pi}$$

est donc donné par

$$\begin{aligned} x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f([x^{q^{-n}}]) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \frac{[x^{q^{k-n}}]}{\pi^{k-n}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{[x^{q^k}]}{\pi^k}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la formule donnée par la proposition 7.17 lorsque $d = 1$. On peut vérifier plus généralement en utilisant les formules données par la proposition 7.7 que l'on retrouve bien la formule de la proposition 7.17 lorsque d est quelconque.

7.5.3. *Application des périodes.* Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos muni d'une identification $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_F$ (cela ne signifie rien de plus que C est muni d'un isomorphisme avec un corps $C_{\mathfrak{m}}$ pour un $\mathfrak{m} \in Y$, cf. 6.2). Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_C . Notons \mathcal{G}_k sa réduction sur le corps résiduel de \mathcal{O}_C . Nous ferons l'hypothèse suivante : il existe une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{G}_k \otimes_k \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$$

relevant l'identité de \mathcal{G}_k après réduction via $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \rightarrow k$. Une telle quasi-isogénie est alors unique. Cette hypothèse est équivalente à demander l'existence un idéal \mathfrak{a} dans \mathfrak{m}_C contenant $p\mathcal{O}_C$ et un isomorphisme

$$\rho_{\mathfrak{a}} : \mathcal{G}_k \otimes_k \mathcal{O}_C/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$$

déformant l'identité de \mathcal{G}_k . En effet, étant donnée une quasi-isogénie ρ comme précédemment, pour un idéal \mathfrak{a} suffisamment grand dans \mathfrak{m}_C contenant $p\mathcal{O}_C$, la réduction modulo \mathfrak{a} de ρ est un isomorphisme. Réciproquement, utilisant la rigidité des quasi-isogénies, un isomorphisme $\rho_{\mathfrak{a}}$ induit une quasi-isogénie ρ . Cette hypothèse est par exemple vérifiée s'il existe un sous-corps valué complet de valuation discrète K de C , tel que \mathcal{G} provienne par extension des scalaires d'un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K à \mathcal{O}_C .

Considérons maintenant

$$\mathfrak{X}(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C),$$

un E -espace vectoriel. Si $G = \mathcal{G}^{rig} \simeq \mathbb{B}^d$ est la fibre générique de \mathcal{G} comme espace analytique rigide en groupes, il s'agit de la limite projective des C -points du système projectif de boules ouvertes

$$\dots \xleftarrow{\times\pi} G \xleftarrow{\times\pi} G \xleftarrow{\times\pi} \dots$$

L'espace vectoriel $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C)$ ne dépend ainsi que du groupe rigide analytique G . On a donc $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) = X(G)(C)$ où

$$X(G)(C) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in G(C), \pi x_{n+1} = x_n\}.$$

Proposition 7.28. *Posons pour $r \in]0, +\infty[$,*

$$X(\mathcal{G})_r(\mathcal{O}_C) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \mid x_0 \in \ker(\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}_r))\}.$$

où $\mathfrak{a}_r = \{y \in \mathcal{O}_C \mid v(y) \geq r\}$. *C'est un sous- \mathcal{O}_E -module π -adiquement complet du E -espace vectoriel $X(\mathcal{G})(C)$ définissant une structure d'espace de Banach sur $X(\mathcal{G})(C)$. La topologie de Banach ainsi définie ne dépend pas du choix d'un tel r .*

Si $G_r \subset G$ désigne le sous-groupe analytique rigide affinoïde tel que $G_r(\mathcal{O}_C) = \ker(\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}_r))$, après choix d'un système de coordonnées formelles sur \mathcal{G} , G_r s'identifie à la boule fermée de rayon q^{-r} dans $G \simeq \mathbb{B}^d$. Le morphisme d'espaces rigides $G \xrightarrow{\times\pi} G$ est étale fini, c'est un revêtement galoisien de groupe $\mathcal{G}[\pi](\mathcal{O}_C)$. Notons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi^n G_r \subset G$ l'image réciproque de G_r par le morphisme $G \xrightarrow{\times\pi^{-n}} G$ si $n \leq 0$ et l'image par le morphisme $G \xrightarrow{\times\pi^n} G$ de G_r si $n \geq 0$. C'est un sous-groupe affinoïde de G . Alors, le réseau $X(\mathcal{G})_r(\mathcal{O}_C)$ de $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) = X(G)(C)$ s'identifie à la limite projective des C -points du système projectif de groupes analytiques rigides affinoïdes

$$\dots \xleftarrow{\times\pi} \pi^{n+1} G_r \xleftarrow{\times\pi} \pi^n G_r \xleftarrow{\times\pi} \pi^{n-1} G_r \xleftarrow{\times\pi} \dots$$

où les morphismes de transition sont des revêtements galoisiens de groupe $\mathcal{G}[\pi](\mathcal{O}_C)$.

Soit

$$\log : G \longrightarrow \mathrm{Lie} G \otimes \mathbf{G}_a^{rig}$$

le logarithme de \mathcal{G} . C'est un revêtement étale au sens de de Jong ([11]) \ll galoisien de groupe le groupe discret $G[\pi^\infty](\mathcal{O}_K) \gg$. En restriction au sous-groupe affinoïde G_r , $\log|_{G_r} : G_r \rightarrow \mathrm{log}(G_r)$ est un revêtement étale galoisien fini de groupe $G_r \cap G[\pi^\infty](C)$. En particulier, si $r_0 = \inf\{r \mid G_r \cap G[\pi] = \emptyset\}$, en restriction à la boule ouverte $\cup_{r > r_0} G_r$, \log est un isomorphisme sur son image,

d'inverse donné par l'exponentielle du groupe formel (dont le plus grand domaine de convergence est justement $\cup_{r>r_0} \log(G_r)$). Le logarithme définit un morphisme de E -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \log : X(G)(C) &\longrightarrow \text{Lie } G = \text{Lie } \mathcal{G}\left[\frac{1}{p}\right] \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \log(x_0) \end{aligned}$$

de noyau le module de Tate rationnel de \mathcal{G} ,

$$V_\pi(\mathcal{G}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_C), \pi x_{n+1} = x_n, x_n = 0 \text{ pour } n \ll 0\}.$$

On a donc une suite exacte d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G}) \longrightarrow X(G)(C) \xrightarrow{\log} \text{Lie } G \longrightarrow 0$$

où $V_\pi(\mathcal{G})$ est un E -espace vectoriel de dimension finie et $\text{Lie } G$ un C -espace vectoriel de dimension finie. Une fois de plus, cette suite exacte ne dépend que du groupe rigide analytique G .

De la proposition 7.21 on déduit que pour tout idéal non nul $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_C$, l'application de réduction modulo \mathfrak{a}

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \longrightarrow X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})$$

est un isomorphisme de E -espaces vectoriels d'inverse donné par

$$(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^k \hat{y}_{n+k} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

où $\hat{y}_n \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$ est un relèvement quelconque de y_n .

Choisissons \mathfrak{a} tel que $\pi \mathcal{O}_C \subset \mathfrak{a}$ et la réduction modulo \mathfrak{a} de ρ ,

$$\rho_{\mathfrak{a}} : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{O}_C/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$$

soit un isomorphisme. Composant l'isomorphisme précédent avec $\rho_{\mathfrak{a}}^{-1}$ on obtient un isomorphisme canonique de E -espaces vectoriels

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}_k)(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}).$$

Considérons maintenant le système projectif des $(\mathcal{G}_k^{(q^{-n})})_{n \geq 0}$ avec comme morphismes de transition le morphisme de Frobenius :

$$\mathcal{G}_k \xleftarrow{F} \mathcal{G}_k^{(p^{-1})} \xleftarrow{F} \dots \xleftarrow{F} \mathcal{G}_k^{(p^{-n})} \xleftarrow{F} \dots$$

La limite projective des $\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$ -points du système projectif précédent est canoniquement

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbb{N}}} \mathcal{G}_k^{(p^{-n})}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}).$$

Remarquons maintenant qu'il y a un morphisme de systèmes projectif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G}_k & \xleftarrow{\times \pi} & \mathcal{G}_k & \xleftarrow{\times \pi} & \dots & \xleftarrow{\times \pi} & \mathcal{G}_k & \xleftarrow{\times \pi} & \dots \\ \parallel & & \downarrow V_\pi & & & & \downarrow V_\pi^n & & \\ \mathcal{G}_k & \xleftarrow{F} & \mathcal{G}_k^{(q^{-1})} & \xleftarrow{F} & \dots & \xleftarrow{F} & \mathcal{G}_k^{(q^{-n})} & \xleftarrow{F} & \dots \end{array}$$

Lemme 7.29. *Le morphisme de systèmes projectifs précédents induit un isomorphisme de E -espaces vectoriels*

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbb{N}, \times \pi}} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbb{N}, F}} \mathcal{G}_k^{(q^{-n})}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}) = \mathcal{G}_k(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})).$$

Démonstration. Cela résulte de ce que \mathcal{G} étant formel, pour n grand on peut écrire $F^n = \pi u$ où u est une isogénie. \square

Puisqu'on a des identifications canoniques $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})$ on a donc défini un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$X(G)(C) = X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F).$$

Rappelons (section 7.4) que l'on a défini une structure d'espace de Banach sur le E -espace vectoriel $\mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F)$. On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 7.30. *L'isomorphisme de E -espaces vectoriels*

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F)$$

est un homéomorphisme d'espaces de Banach.

Soit $D[\frac{1}{\pi}]$ le module de Dieudonné contravariant rationnel de \mathcal{G}_k . Des résultats précédents on déduit donc que l'on a des isomorphismes d'espaces de Banach

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}[F, V_{\pi}]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \lambda = \frac{d}{h}, (d, h) = 1}} \left((B^+)^{\varphi^h = \pi^d} \right)^{\oplus m_{\lambda}}$$

où m_{λ} est la multiplicité de la pente λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $(D[\frac{1}{\pi}], F)$.

À l'identification $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_F$ est associée un morphisme

$$\theta : W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

qui s'étend en

$$\theta : B^+ \longrightarrow C.$$

On peut alors interpréter géométriquement le morphisme composé

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}[F, V_{\pi}]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) \xrightarrow{\theta_*} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}}(D[\frac{1}{\pi}], C).$$

Plus précisément, on dispose du lemme suivant analogue du lemme 7.24.

Lemme 7.31. *Si $f \in \text{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(G)(C)$, la suite $(\pi^n f(x_n))_{n \geq 0}$ est convergente dans C . Cela définit un morphisme de E -espaces vectoriels*

$$\begin{aligned} X(G)(C) &\longrightarrow \text{Hom}_C(\text{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig}) / \sim, C) \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n). \end{aligned}$$

La proposition qui suit donne l'interprétation géométrique annoncée dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 7.32. *Via l'identification $D[\frac{1}{\pi}] \otimes C = \text{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{rig})$, le morphisme composé*

$$X(G)(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}[F, V_{\pi}]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) \xrightarrow{\theta_*} \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}}(D[\frac{1}{\pi}], C) = \text{Hom}_C(D[\frac{1}{\pi}] \otimes C, C)$$

coïncide avec le morphisme $(x_n)_n \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n f(x_n)$ du lemme précédent.

Des résultats précédents on déduit la proposition suivante.

Proposition 7.33. *Soit $D_C = D \otimes_{W_{\mathcal{O}(k)}} C$. Si l'on note $\text{Fil } D_C^*$ la filtration de Hodge du dual de D_C et*

$$\text{Fil } \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}[F]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) = \theta_*^{-1}(\text{Fil } D_C),$$

il y a un isomorphisme de suites exactes d'espaces de Banach

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_{\pi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & X(G)(C) & \xrightarrow{\log} & \text{Lie } G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & \text{Fil } \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}[F]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) & \longrightarrow & \text{Hom}_{W_{\mathcal{O}(k)}_{\mathbb{Q}}[F]}(D[\frac{1}{\pi}], B^+) & \xrightarrow{\theta_*} & D_C^* / \text{Fil } D_C^* \longrightarrow 0. \end{array}$$

Exemple 7.34. *Soit $\tilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ le \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_E de l'exemple 7.8. Si $C = \widehat{E}$, $\mathcal{O}_F = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$, la suite exacte*

$$0 \longrightarrow V_{\pi}(\tilde{\mathcal{G}}_{1,h}) \longrightarrow X(\tilde{\mathcal{G}}_{1,h}) \longrightarrow \text{Lie } \tilde{\mathcal{G}}_{1,h}[\frac{1}{\pi}] \otimes C \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\theta|_{(B^+)^{\varphi^h = \pi}}) \longrightarrow (B^+)^{\varphi^h = \pi} \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0.$$

Les morphismes $\theta, \theta \circ \varphi, \dots, \theta \circ \varphi^{h-1} : (B^+)^{\varphi^h = \pi} \rightarrow C$ sont donnés par les quasi-logarithmes de $\tilde{\mathcal{G}}_{1,h}$, θ correspondant au logarithme.

8. ESPACES VECTORIELS FORMELS ET SPECTRAUX

Dans cette section on va encore plus loin dans l'interprétation géométrique des espaces de Banach de la section 7 précédente. On garde les notations de la section précédente.

8.1. E -espaces vectoriels formels.

8.1.1. *Définition.* Soit R une \mathcal{O}_E -algèbre anneau I -adique pour un idéal I contenant π . Considérons le $\mathrm{Spf}(R)$ -schéma formel

$$\widehat{\mathbb{A}}^d = \mathrm{Spf}(R[[x_1, \dots, x_d]])$$

où $R[[x_1, \dots, x_d]]$ est muni de la topologie $I + (x_1, \dots, x_d)$ -adique. Comme faisceau fppf sur $\mathrm{Spf}(R)$, pour un $\mathrm{Spf}(R)$ -schéma U ,

$$\widehat{\mathbb{A}}^d(U) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^d \mid \forall i, x_i \text{ est nilpotent}\}.$$

Soit

$$\alpha : \widehat{\mathbb{A}}^d \longrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^d$$

défini par $\alpha^* x_i = x_i^p$. Considérons le système projectif

$$\widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \dots \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \dots$$

Sa limite projective $\widehat{\mathcal{A}}_R^d$ comme faisceau fppf sur $\mathrm{Spf}(R)$ est représentée par le schéma formel qui est le spectre formel de l'anneau

$$\left(\bigcup_{n \geq 0} R[[x_1^{p^{-n}}, \dots, x_d^{p^{-n}}]] \right)^\wedge$$

où la complétion est pour la topologie $I + (x_1, \dots, x_d)$ -adique. Concrètement,

$$\begin{aligned} & \left(\bigcup_{n \geq 0} R[[x_1^{p^{-n}}, \dots, x_d^{p^{-n}}]] \right)^\wedge \\ &= \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}[\frac{1}{p}]^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \mid \forall A > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \{\alpha \mid |\alpha| \leq A, a_\alpha \notin I^k\} \text{ est fini} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, si la topologie de R est la topologie discrète il s'agit des séries formelles à exposants fractionnaires dans $\mathbb{N}[\frac{1}{p}]$ à support localement fini dans \mathbb{R}_+^d . Nous adopterons la notation suivante.

Définition 8.1. Si R est un anneau adique nous noterons

$$R\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\} := \left(\bigcup_{n \geq 0} R[[x_1^{p^{-n}}, \dots, x_d^{p^{-n}}]] \right)^\wedge.$$

Définition 8.2. Un E -espace vectoriel formel de dimension d sur $\mathrm{Spf}(R)$ est un $\mathrm{Spf}(R)$ -schéma formel en E -espaces vectoriels isomorphe à $\widehat{\mathcal{A}}_R^d$ en tant que $\mathrm{Spf}(R)$ -schéma formel pointé.

8.1.2. E -espace vectoriel formel associé à \mathcal{O} -module formel π -divisible en caractéristique positive. Soit R une \mathcal{O}_E -algèbre adique.

Définition 8.3. Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur R . On note $X(\mathcal{G})$ le faisceau fppf

$$X(\mathcal{G}) = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathcal{G}$$

où les applications de transition sont $\mathcal{G} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{G}$.

Supposons maintenant R annulé par π . Alors, $\widehat{\mathcal{A}}_R^d = \varprojlim_{\mathbb{N}} \widehat{\mathbb{A}}^d$ où les applications de transition sont données par le Frobenius relatif de $\widehat{\mathbb{A}}^d/\mathrm{Spf}(R)$. Si de plus R est parfait alors

$$R\{\{x_1, \dots, x_d\}\} = (R[[x_1, \dots, x_d]]^{\mathrm{perf}})^{\widehat{}}$$

Proposition 8.4. *Supposons R parfait. Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible.*

- (1) $X(\mathcal{G})$ est un E -espace vectoriel formel
- (2) Comme foncteurs

$$R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels}$$

il y a un isomorphisme canonique

$$X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ \mathcal{R}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : R\text{-algèbres adiques} &\longrightarrow R\text{-algèbre topologiques} \\ A &\longmapsto \varprojlim_{\mathbb{N}, \mathrm{Frob}_q} A \end{aligned}$$

muni de la topologie limite projective.

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme 7.29, il y a un morphisme de systèmes projectifs

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & \xleftarrow{\times\pi} & \mathcal{G} & \xleftarrow{\times\pi} & \dots & \xleftarrow{\times\pi} & \mathcal{G}_k & \xleftarrow{\times\pi} & \dots \\ \parallel & & \downarrow V_\pi & & & & \downarrow V_\pi^n & & \\ \mathcal{G} & \xleftarrow{F} & \mathcal{G}^{(q^{-1})} & \xleftarrow{F} & \dots & \xleftarrow{F} & \mathcal{G}^{(q^{-n})} & \xleftarrow{F} & \dots \end{array}$$

qui induit un isomorphisme

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}, \times\pi} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}, F} \mathcal{G}^{(q^{-n})}.$$

□

Bien sûr, si A est une R -algèbre adique parfaite

$$X(\mathcal{G})(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\mathcal{R}(A)) = \mathcal{G}(A).$$

8.1.3. *Relèvement canonique en caractéristique 0.* Toute \mathbb{F}_q -algèbre parfaite A possède un unique relèvement en une \mathcal{O}_E -algèbre π -adique sans π -torsion, $W_{\mathcal{O}}(A)$. Si de plus A est I -adique alors $W_{\mathcal{O}}(A)$ est adique relativement à l'idéal $(\pi) + ([a])_{a \in I}$. Cela définit un plongement de catégories

$$W_{\mathcal{O}} : \mathbb{F}_q\text{-algèbres adiques parfaites} \hookrightarrow \mathcal{O}_E\text{-algèbres adiques sans } \pi\text{-torsion}.$$

Lemme 8.5. *Soit R une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite et $W_{\mathcal{O}}(R)$ la \mathcal{O}_E -algèbre adique associée. Le morphisme de $W_{\mathcal{O}}(R)$ -algèbres*

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \geq 0} W_{\mathcal{O}}(R)[[x_1^{p^{-n}}, \dots, x_d^{p^{-n}}]] &\longrightarrow W_{\mathcal{O}}(R\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}) \\ x_i^{p^{-n}} &\longmapsto [x_i^{p^{-n}}] \end{aligned}$$

s'étend en un isomorphisme de $W_{\mathcal{O}}(R)$ -algèbres adiques

$$W_{\mathcal{O}}(R)\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}(R\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}).$$

Démonstration. Le morphisme est continu et s'étend donc aux complétés. Les deux algèbres sont π -adiques sans π -torsion de réduction modulo π des algèbres parfaites. Il suffit donc de vérifier que le morphisme annoncé induit un isomorphisme modulo π . \square

De ce lemme on déduit que si R est une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite et $\mathfrak{E} = \mathrm{Spf}(A)$ est un E -espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(R)$ alors $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(A))$ est un E -espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(R))$.

Définition 8.6. Soit R une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite et \mathfrak{E} un E -espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(R)$. On note $\tilde{\mathfrak{E}}$ le E -espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(R))$ égal à $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(A))$ que l'on appelle le relèvement canonique de \mathfrak{E} .

Proposition 8.7. Soit R une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite et \mathfrak{E} un E -espace vectoriel formel sur R .

(1) Comme foncteurs

$$W_{\mathcal{O}}(R)\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels,}$$

il y a un isomorphisme

$$\tilde{\mathfrak{E}} \simeq \mathfrak{E} \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R).$$

(2) Comme foncteurs

$$R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels}$$

il y a un isomorphisme

$$\mathfrak{E} \simeq \tilde{\mathfrak{E}} \circ W_{\mathcal{O}}.$$

où

$$W_{\mathcal{O}} : R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow W_{\mathcal{O}}(R)\text{-algèbres adiques.}$$

Démonstration. Cela résulte de la propriété d'adjonction de la proposition 5.40 (tout du moins une version améliorée de cette proposition pour des anneaux topologiques). \square

Par exemple, si \mathcal{G} est un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur R et $\tilde{X}(\mathcal{G})$ désigne le relèvement canonique de $X(\mathcal{G})$,

$$\tilde{X}(\mathcal{G}) \simeq X(\mathcal{G}) \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq \mathcal{G} \circ \mathcal{R} \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq \mathcal{G} \circ \mathcal{R},$$

l'isomorphisme $\mathcal{R} \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq \mathcal{R}$ résultant de la proposition 5.40.

8.1.4. *Espace vectoriel formel associé à un \mathcal{O} -module formel π -divisible en inégales caractéristiques.*

Proposition 8.8. Soit R une \mathcal{O}_E -algèbre adique et \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur R . Supposons qu'il existe une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite A munie d'un morphisme $A \rightarrow R/\pi R$ ainsi qu'un \mathcal{O} -module formel π -divisible \mathcal{H} sur A et une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{H} \otimes_A R/\pi R \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_R R/\pi R.$$

Alors :

(1) $X(\mathcal{G})$ est un E -espace vectoriel formel.

(2) Soit $W_{\mathcal{O}}(A) \rightarrow R$ le relèvement canonique du morphisme $A \rightarrow R/\pi R$. La quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme

$$\tilde{X}(\mathcal{H}) \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(A)} R \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})$$

où $\tilde{X}(\mathcal{H})$ désigne le relèvement canonique de $X(\mathcal{H})$.

Démonstration. Il suffit de montrer le point (2). La proposition 7.21 se traduit en disant qu'il y a un isomorphisme de foncteurs sur les R -algèbres adiques

$$X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}) \circ (- \otimes_R R/\pi R).$$

Maintenant, si B est une R -algèbre adique, il y a une suite d'isomorphismes fonctoriels en B

$$\begin{array}{ccc} X(\mathcal{G})(B) & \xrightarrow{\sim} & X(\mathcal{G})(B/\pi B) \\ & \xrightarrow{X(\rho)^{-1}} & X(\mathcal{H})(B/\pi B) \\ & \xrightarrow{\sim} & \tilde{X}(\mathcal{H})(B). \end{array}$$

On en déduit facilement la proposition. \square

Corollaire 8.9. *Soit $K|E$ un corps valué complet de corps résiduel k_K parfait. Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_K de fibre spéciale \mathcal{G}_{k_K} sur le corps résiduel. Fixons une section de la projection $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \rightarrow k_K$ (si la valuation de K est discrète le relèvement de Teichmüller fournit canoniquement une telle section). Supposons que l'identité de \mathcal{G}_{k_K} se relève en une quasi-isogénie (nécessairement unique)*

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K} \otimes_{k_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

C'est bien sûr toujours le cas si la valuation de K est discrète. Il y a alors un isomorphisme

$$X(\mathcal{G}) \simeq \tilde{X}(\mathcal{G}_{k_K}) \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(k_K)} \mathcal{O}_K.$$

En particulier, l'espace vectoriel formel $X(\mathcal{G})$ ne dépend que de la fibre spéciale de \mathcal{G} .

Exemple 8.10. *Considérons le cas de $\hat{\mathbb{G}}_m$ sur \mathbb{Z}_p . Soit le système inductif $(\mathbb{Z}_p[[U_i]])_{i \in \mathbb{N}}$ où $U_i \mapsto (1 + U_{i+1})^p - 1$. Il y a alors un isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\} & \longrightarrow & \left(\bigcup_{i \geq 0} \mathbb{Z}_p[[U_i]] \right) \widehat{} \\ T^{p^{-n}} & \longmapsto & \lim_{k \rightarrow +\infty} U_{n+k}^{p^k} \end{array}$$

où la complétion est pour la topologie (p, U_0) -adique. La loi de \mathbb{Q}_p -espace vectoriel formel associée au système de coordonnées précédent sur $X(\hat{\mathbb{G}}_m)$,

$$\Delta : \mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\} \rightarrow \mathbb{Z}_p\{\{X^{p^{-\infty}}, Y^{p^{-\infty}}\}\},$$

est alors donnée par

$$\Delta(T^{p^{-n}}) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}[\frac{1}{p}] \cap [0, 1] \\ \alpha + \beta \geq 1}} a_{\alpha, \beta} X^{\alpha p^{-n}} Y^{\beta p^{-n}}$$

où

$$a_{\alpha, \beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{p^n}{p^n(1-\alpha), p^n(1-\beta), p^n(\alpha+\beta-1)},$$

un entier p -adique qui lorsque $p \neq 2$ et $\alpha \neq 1$ ou bien $\beta \neq 1$ est de valuation $1 - \inf\{v_p(\alpha), v_p(\beta), v_p(\alpha + \beta)\}$.

8.2. Espaces spectraux. Étant donné un système projectif d'espaces rigides analytiques $(X_n)_{n \geq 0}$ dont les morphismes de transition sont finis et surjectifs, en général l'espace $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ n'a pas de

sens dans le contexte de la géométrie analytique rigide de Tate. Dans cette section on donne un sens à ces objets lorsque chacun des X_n est un espace rigide réduit quasi-Stein, le point étant qu'un espace rigide réduit quasi-Stein X est complètement déterminé par l'algèbre de Frechet $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts admissibles quasicompacts. On adopte pour cela le point de vue de Berkovich concernant la géométrie analytique p -adique ([4]).

8.2.1. *Généralités.* On fixe $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans \mathbb{R} étendant la valuation p -adique.

Définition 8.11. *Soit \mathcal{A} une K -algèbre topologique.*

(1) *On note*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A})$$

l'ensemble des valuations $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ continues étendant la valuation de K .

(2) *Si $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{A}$ on notera $v(f(x)) := x(f)$ et $|f(x)| := p^{-v(f(x))}$.*

(3) *Si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{A}$ on note*

$$\|f\|_{\Omega} = \sup\{|f(x)| \mid x \in \Omega\}.$$

(4) *Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dit borné s'il existe un voisinage U de 0 dans \mathcal{A} tel que $\sup\{\|f(x)\| \mid f \in U, x \in \Omega\} < +\infty$.*

Dire que les valuations que l'on considère sont continues est équivalent à dire que pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, l'ensemble $\{x\}$ est borné. Bien sûr, si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné la quantité $\|f\|_{\Omega}$ est finie. Cela définit alors une semi-norme sous-multiplicative

$$\|\cdot\|_{\Omega} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant de plus pour tout entier positif n , $\|f^n\|_{\Omega} = \|f\|_{\Omega}^n$. Remarquons qu'une union finie d'ensembles bornés est bornée et que bien sûr, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ avec Ω_2 borné implique que Ω_1 l'est également.

Définition 8.12. *Une K -algèbre spectrale est une K -algèbre topologique \mathcal{A} telle que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit union dénombrable d'ensembles bornés, la topologie de \mathcal{A} soit la topologie définie par la famille de semi-normes $(\|\cdot\|_{\Omega})_{\Omega \text{ borné}}$ et \mathcal{A} soit séparée complète.*

Nous adopterons la définition suivante concernant la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Définition 8.13. *Soit \mathcal{A} une K -algèbre topologique. Munissons tout sous-ensemble borné de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de la topologie faible des applications de \mathcal{A} à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est alors la topologie limite inductive obtenue en écrivant $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{\Omega \text{ borné}} \Omega$.*

Les algèbres spectrales \mathcal{A} telles que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit borné sont les algèbres de Banach spectrales. Dans ce cas là, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact non vide ([4] 1.2.1). On notera alors $\|\cdot\|_{\infty} := \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$.

Il résulte de la définition des algèbres spectrales que ce sont des espaces de Frechet. On vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 8.14. *Soit \mathcal{A} une K -algèbre topologique.*

(1) *Tout sous-ensemble borné de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact.*

(2) *Si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné alors le complété $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\Omega})^{\wedge}$ est une algèbre de Banach spectrale de spectre un sous-ensemble borné $\Omega^c \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ contenant Ω (\ll l'enveloppe convexe holomorphe \gg de Ω). De plus, comme normes sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\Omega})^{\wedge}$, $\|\cdot\|_{\Omega} = \|\cdot\|_{\infty}$ et comme normes sur \mathcal{A} , $\|\cdot\|_{\Omega} = \|\cdot\|_{\Omega^c}$.*

(3) *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ s'écrive comme une union dénombrable d'ensembles bornés. L'algèbre*

$$\mathcal{A}^{sp} := \varprojlim_{\Omega \text{ borné}} (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\Omega})^{\wedge}$$

est une algèbre spectrale munie d'un morphisme continu $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{sp}$ qui induit un homéomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A})$. De plus, \mathcal{A} est spectrale si et seulement si $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{sp}$ est un isomorphisme. Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{sp}$ est un adjoint à droite à l'inclusion de la catégorie des algèbres spectrales dans celle des K -algèbres topologiques dont le spectre est union dénombrable d'ensembles bornés.

(4) *Si $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système projectif d'algèbres de Banach spectrales alors $\mathcal{A} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est spectrale. Si de plus les morphismes de transition $\mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n$ sont d'image dense alors $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ et $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_n)})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_n$.*

Rappelons que si $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système projectif d'espaces de Banach à applications de transition d'image dense et $V = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est l'espace de Frechet associé alors les projections

$$\varprojlim_n V_n \xrightarrow{pr_i} V_i \text{ sont d'image dense et pour tout espace de Banach } W,$$

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(V_n, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W).$$

De cela on déduit la proposition suivante.

Proposition 8.15. *La catégorie des K -algèbres spectrales est équivalente à la pro-catégorie des systèmes projectifs de K -algèbres de Banach spectrales $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les morphismes de transition sont d'image dense où par pro-catégorie on entend la relation*

$$\text{Hom}\left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n, \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_m\right) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_m)$$

pour $(\mathcal{A}_n)_n$ et $(\mathcal{B}_m)_m$ deux systèmes projectifs du type précédent.

Nous adopterons la définition suivante.

Définition 8.16. *La catégorie des K -espaces spectraux est la catégorie opposée à celle des K -algèbres spectrales. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'espace spectral associé à \mathcal{A} . Si X est un K -espace spectral on note $|X|$ l'espace topologique associé*

Tout système inductif $(X_n)_{n \geq 0} = \mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ d'espaces spectraux bornés possède une limite inductive $\mathcal{M}(\varinjlim_n \mathcal{A}_n)$ dans la catégorie des espaces spectraux. De plus, si l'on se restreint aux systèmes inductifs du type précédent en supposant de plus que les images des morphismes $\mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n$ sont denses, cela définit une équivalence entre la ind-catégorie de tels systèmes inductifs et la catégorie des espaces spectraux.

Tout espace spectral X définit un foncteur

$$\begin{aligned} K\text{-algèbres de Banach spectrales} &\longrightarrow \text{Ensembles} \\ \mathcal{A} &\longmapsto X(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

qui caractérise complètement l'espace spectral X . Si $X = \varinjlim_n X_n$ avec $X_n = \text{sp}(\mathcal{A}_n) \rightarrow \text{sp}(\mathcal{A}_{n+1}) = X_{n+1}$ et $\mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{A}_n$ d'image dense alors le foncteur précédent est une limite inductive

$$X(-) = \varinjlim_n X_n(-).$$

Soit X un espace spectral. Tout $x \in X$ définit un corps valué complet $\mathcal{K}(x)$. Si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et x correspond à la valuation $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soit $\mathfrak{p}_x = v^{-1}(\{+\infty\}) \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ son support. Alors, $\mathcal{K}(x)$ est le complété du corps des fractions de $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ relativement à v . Si $L|K$ est une extension valuée complète, $\mathcal{M}(L)$ est réduit à un seul point et il y a une application

$$\text{Hom}(\mathcal{M}(L), X) = X(L) \longrightarrow |X|.$$

Chaque $x \in |X|$, est l'image d'un élément canonique dans $X(\mathcal{K}(x))$ qui s'envoie sur x via l'application précédente. En particulier,

$$X(K) \subset |X|$$

qui est un sous-espace topologique totalement discontinu égal à

$$\{x \in |X| \mid \mathcal{K}(x) = K\}.$$

Enfin, d'après ([4] 1.3.4) $|X|$ est réduit à un seul point si et seulement si il est de la forme $\mathcal{M}(L)$ avec $L|K$ valuée complète.

La catégorie des espaces spectraux possède des produits fibrés. Plus précisément, si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ sont des espaces spectraux bornés alors

$$X \times Y = \mathcal{M}((\mathcal{A} \hat{\otimes}_K \mathcal{B})^{sp})$$

où $(\mathcal{A} \hat{\otimes}_K \mathcal{B})^{sp}$ est le complété spectral de $\mathcal{A} \hat{\otimes}_K \mathcal{B}$ qui est également le complété spectral de la K -algèbre normée $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$. Si $X = \varinjlim_n X_n$, $Y = \varinjlim_n Y_n$ avec pour tout n X_n et Y_n borné alors

$$X \times Y = \varinjlim_n X_n \times Y_n.$$

Remarquons enfin que si $L|K$ est une extension valuée complète on dispose d'un foncteur extension des scalaires des K -espaces spectraux vers les L -espaces spectraux

$$X \mapsto X \hat{\otimes}_K L$$

défini par $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \hat{\otimes}_K L = \mathcal{M}((\mathcal{A} \otimes_K L)^{sp})$.

8.2.2. Espaces spectraux associés aux espaces rigides quasi-Stein. Soit $X = \text{sp}(\mathcal{A})$ un K -espace rigide affinoïde réduit. Alors, \mathcal{A} est une K -algèbre de Banach spectrale ([6] 6.2.4) et définit donc un espace spectral que nous noterons X^{an} . Cela définit un foncteur pleinement fidèle

$$K\text{-espaces rigides affinoïdes réduits} \hookrightarrow K\text{-espaces spectraux bornés.}$$

L'espace topologique associé à l'espace spectral est l'espace sous-jacent de l'espace analytique de Berkovich.

Soit plus généralement X un K -espace rigide quasi-Stein réduit. Rappelons que cela signifie que X possède un recouvrement affinoïde admissible $X = \cup_{n \geq 0} U_n$ avec $U_n \subset U_{n+1}$ un domaine de Weierstrass (c'est à dire $\Gamma(U_{n+1}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U_n, \mathcal{O}_X)$ d'image dense). Munissons $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts admissibles quasicompacts de X . Alors, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une K -algèbre spectrale. Nous noterons $X^{an} = \mathcal{M}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ l'espace spectral associé. L'espace topologique $|X^{an}|$ est celui de l'espace analytique de Berkovich associé à X . Cela définit un foncteur pleinement fidèle

$$K\text{-espaces rigides de Stein réduits} \hookrightarrow K\text{-espaces spectraux.}$$

Les sous-ensembles bornés de $|X^{an}|$ sont ceux contenus dans un domaine affinoïde. De plus, si $X = \cup_{n \geq 0} U_n$ est un recouvrement affinoïde admissible de X avec $U_n \subset U_{n+1}$ un domaine de Weierstrass,

$$X^{an} = \varinjlim_n U_n^{an}$$

dans la catégorie des espaces spectraux.

Exemple 8.17. L'espace spectral associé à la boule ouverte de dimension d , \mathbb{B}^d est le spectre de l'algèbre de Frechet

$$\left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \mid \forall \rho < 1, \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} = 0 \right\}$$

munie de la famille de normes de Gauss $(\|\cdot\|_\rho)_{\rho < 1}$ associée aux limites précédentes.

8.2.3. Espaces spectraux étales. Soit X un espace topologique compact totalement discontinu. Considérons l'algèbre de Banach des fonctions continues sur X à valeurs dans K , $\mathcal{C}^0(X, K)$ munie de la norme sup. Il s'agit d'une K -algèbre de Banach spectrale. De plus l'application naturelle

$$X \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

est un homéomorphisme. De tout cela on déduit que l'on a un foncteur pleinement fidèle

$$\text{Espaces topologiques compacts tot. discontinus} \hookrightarrow \text{Espaces spectraux bornés}$$

On notera

$$X \mapsto X^{\text{ét}} = \text{sp}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

ce foncteur.

Plus généralement, soit \overline{K} une clôture algébrique de K et $C = \widehat{\overline{K}}$. Notons $G_K = \text{Gal}(\overline{K}|K)$. Soit X un espace topologique compact totalement discontinu muni d'une action continue de G_K . Dans la suite le symbole \mathcal{C}^∞ désigne les fonctions localement constantes. Faisons agir G_K sur les fonctions de X à valeurs dans \overline{K} via la formule $(\sigma.f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x)))$. Considérons la K -algèbre

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X, \overline{K})^{G_K}$$

munie de la norme de la convergence uniforme. Il y a un homéomorphisme

$$X/G_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}).$$

On note alors

$$X^{\text{ét}} := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}).$$

Comme précédemment, la correspondance $X \mapsto X^{\text{ét}}$ est fonctorielle. Remarquons de plus que l'on a $X^{\text{ét}} \widehat{\otimes}_K C = X^{\text{ét}}$ où dans le membre de droite on a oublié l'action de G_K . Néanmoins on prendra garde qu'à priori en général $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_K C \neq \mathcal{C}^0(X, C)$.

Plus généralement, soit X un espace topologique localement compact totalement discontinu union dénombrable de compacts et $\mathcal{C}^0(X, K)$ la K -algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans K . Munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X c'est une algèbre spectrale. De plus

$$X \xrightarrow{\sim} \text{sp}(\mathcal{C}^0(X, K)),$$

les sous-ensembles bornés étant les sous-ensembles relativement compacts de X . Notons

$$X^{\text{ét}} = \text{sp}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

comme espace spectral. Alors,

$$X^{\text{ét}} = \varinjlim_{\Omega} \Omega^{\text{ét}}$$

où Ω parcourt les sous-ensembles compacts de X . Comme précédemment, ce foncteur s'étend en un foncteur $X \mapsto X^{\text{ét}}$ de la catégorie des espaces topologiques localement compacts totalement discontinus union dénombrables de compacts munis d'une action continue de G_K vers les K -espaces spectraux.

8.2.4. Limite projective de tours d'espaces rigides quasi-Stein. Afin de construire de nouveaux espaces spectraux à partir des espaces rigides nous avons besoin de la construction suivante. Supposons donné un système projectif $(X_n)_{n \geq 0}$ de K -espaces rigides réduits affinoïdes dont les morphismes de transition $X_{n+1} \rightarrow X_n$ sont finis et surjectifs. Notons $X_n = \text{sp}(\mathcal{A}_n)$. L'hypothèse sur les morphismes de transition implique que les morphismes induits d'algèbres de Banach

$$(\mathcal{A}_n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{A}_{n+1}, \|\cdot\|_\infty)$$

sont des isométries. Munissons l'algèbre limite inductive

$$\mathcal{A}_\infty = \varinjlim_n \mathcal{A}_n$$

de la norme associée $\|\cdot\|_\infty$ telle que pour tout n le plongement

$$\mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}_\infty$$

soit une isométrie. Notons

$$\widehat{\mathcal{A}_\infty}$$

le complété de \mathcal{A}_∞ relativement à cette norme. On vérifie alors aisément que :

- $(\widehat{\mathcal{A}_\infty}, \|\cdot\|_\infty)$ est une K -algèbre de Banach spectrale.
- L'application naturelle d'espaces topologiques $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n) \rightarrow \varprojlim_n \mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ est un homéomorphisme
- Si $X = \mathcal{M}(\widehat{\mathcal{A}_\infty})$ comme espace spectral borné alors les morphismes naturels $X \rightarrow X_n^{an}$, $n \in \mathbb{N}$, identifient X à une limite projective du système $(X_n^{an})_{n \geq 0}$ dans la catégorie des espaces spectraux.

Plaçons nous maintenant dans un cadre plus général. Faisons les mêmes hypothèses que précédemment concernant le système projectif $(X_n)_{n \geq 0}$ mis à part le fait que l'on suppose seulement que les $(X_n)_n$ sont des K -espaces rigides réduits quasi-Stein qui ne sont pas nécessairement affinoïdes. Écrivons X_0 sous la forme

$$X_0 = \bigcup_{i \geq 0} U_i,$$

un recouvrement affinoïde admissible avec $U_i \subset U_{i+1}$ un domaine de Weierstrass. Si $p_n : X_n \rightarrow X_0$, notons

$$U_{i,n} = p_n^{-1}(U_i).$$

Pour tout i , le système projectif $(U_{i,n})_{n \geq 0}$ satisfait les hypothèses précédentes et on peut donc considérer l'espace spectral borné

$$\lim_{\leftarrow n \geq 0} U_{i,n}.$$

Lorsque i varie ces espaces spectraux forment un système inductifs. De plus si on note $\text{sp}(\mathcal{B}_i)$ cet espace spectral alors les morphisme $\mathcal{B}_{i+1} \rightarrow \mathcal{B}_i$ sont d'image dense. On vérifie alors que

$$\lim_{\rightarrow i \geq 0} \lim_{\leftarrow n \geq 0} U_{i,n} = \text{sp}\left(\lim_{\leftarrow i \geq 0} \mathcal{B}_i\right)$$

est une limite inductive du système projectif $(X_n)_{n \geq 0}$ dans la catégorie des espaces spectraux. Cette limite projective s'écrit également de la façon suivante. Soit pour tout n , $X_n = \text{sp}(\mathcal{A}_n)$. La norme sup sur l'ensemble $U_{i,n}$ définit une semi-norme $\|\cdot\|_{i,n}$ sur \mathcal{A}_n . Les inclusions $(\mathcal{A}_n, \|\cdot\|_{i,n}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_n, \|\cdot\|_{i,n+1})$ étant des isométries cela définit une semi-norme $\|\cdot\|_i$ sur

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_n \mathcal{A}_n.$$

Alors, $\lim_{\leftarrow n} X_n$ est le spectre de l'algèbre spectrale complétée de \mathcal{A}_∞ relativement à la famille de semi-normes $(\|\cdot\|_i)_{i \geq 0}$.

Exemple 8.18. Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Supposons donné un système projectif $(X_n)_{n \geq 0}$ de K -espaces rigides étales ayant un nombre dénombrable de composantes connexes à morphismes de transition finis surjectifs. Chaque X_n étant un espace rigide de Stein cela définit un système projectif d'espaces spectraux $(X_n^{\text{ét}})_n$. Soit $X = \lim_{\leftarrow n} X_n(\bar{K})$ muni de son action continue de G_K . Alors,

$$\lim_{\leftarrow n} X_n^{\text{ét}} = \left(\lim_{\leftarrow n} X_n(\bar{K})\right)^{\text{ét}}.$$

Exemple 8.19. Soit \mathcal{G} un groupe p -divisible sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ de fibre générique $\mathcal{G}_\eta = (\mathcal{G}[p^n] \otimes K)_{n \geq 1}$ sur $\text{Spec}(K)$. Pour tout n , $\mathcal{G}_\eta[p^n]$ est un K -schéma étale fini et $\Gamma = \lim_{\rightarrow n} \mathcal{G}_\eta[p^n]^{\text{rig}}$ définit donc un K -espace rigide étale en groupes. Alors,

$$\lim_{\leftarrow \mathbb{N}} \Gamma^{\text{ét}} \simeq V_p(\mathcal{G})^{\text{ét}}$$

où les morphismes de transition dans la limite projective sont $\Gamma^{\text{ét}} \xrightarrow{\times p} \Gamma^{\text{ét}}$.

8.2.5. *Fibre générique de certains schémas formels.* Il y a un foncteur fibre générique

$$\mathfrak{X} \longmapsto \mathfrak{X}^{\text{rig}}$$

de la catégorie des $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ -schémas formels affines formellement de type fini, c'est à dire dont l'algèbre est de la forme

$$\mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_n]]\langle y_1, \dots, y_m \rangle / \text{Idéal}$$

avec pour idéal de définition (p, x_1, \dots, x_n) , vers les K -espaces rigides quasi-Stein. Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, I est un idéal de définition de A alors l'algèbre de Frechet $\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}})$ admet la description suivante :

$$\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}) = \varprojlim_{k \geq 0} \left((A[\frac{x}{\pi}]_{x \in I^k})^\widehat{\left[\frac{1}{\pi} \right]} \right)$$

comme limite projective d'algèbres de Banach où la complétion dans la formule précédente est la complétion π -adique.

Définition 8.20. Soit \mathfrak{X} un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C)$ -schéma formel affine, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ avec A adique et I un idéal de définition de A . Pour tout $k \geq 0$ considérons la \mathcal{O}_K -algèbre

$$A_k = A[\frac{x}{\pi}]_{x \in I^k}$$

et \widehat{A}_k son complété π -adique. Soit $\widehat{A}_k[\frac{1}{\pi}]$ l'algèbre de Banach associée et

$$B = \varprojlim_{k \geq 0} \widehat{A}_k[\frac{1}{\pi}],$$

une K -algèbre de Frechet. Soit B^{sp} son complété spectral. On note alors

$$\mathfrak{X}^{an} := \mathrm{sp}(B^{sp})$$

comme K -espace spectral.

Ainsi si \mathfrak{X} est un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ -schéma formel affine formellement de type fini réduit, via le plongement $X \mapsto X^{an}$ des K -espace rigides réduits quasi-Stein dans les C -espaces spectraux on retrouve la définition classique de \mathfrak{X}^{an} , c'est à dire avec les notations précédentes $(\mathfrak{X}^{rig})^{an} = \mathfrak{X}^{an}$.

Comme foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{an} : K\text{-Algèbres de Banach spectrales} &\longrightarrow \text{Ensembles} \\ \mathcal{A} &\longmapsto \mathfrak{X}(\mathcal{A}^0) \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}^0 = \{a \in \mathcal{A} \mid \|a\|_\infty \leq 1\}$. Cela caractérise complètement l'espace spectral \mathfrak{X}^{an} .

Proposition 8.21. Soit $(\mathfrak{X}_n)_{n \geq 0}$ un système projectif de $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ -schémas formels affines formellement de type fini dont les morphismes de transition sont adiques finis libres et surjectifs. Il y a alors un isomorphisme canonique

$$\left(\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n \right)^{an} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n^{an}$$

où si $\mathfrak{X}_n = \mathrm{Spf}(A_n)$, I est un idéal de définition de A_0 , $\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n$ est le spectre formel du complété

I -adique de $\bigcup_{n \geq 0} A_n$.

Démonstration. Les projections $\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n \rightarrow \mathfrak{X}_k$ lorsque k varie induisent des morphismes compatibles $(\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n)^{an} \rightarrow \mathfrak{X}_k^{an}$ lorsque k varie et donc un morphisme naturel comme dans l'énoncé. Si \mathcal{A} est une K -algèbre de Banach spectrale on a

$$\begin{aligned} \left(\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n \right)^{an}(\mathcal{A}) &= \left(\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n \right)(\mathcal{A}^0) \\ &= \varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n(\mathcal{A}^0) \\ &= \varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n^{an}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Le morphisme précédent est donc un isomorphisme. \square

Définition 8.22. On note $K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}} \rangle\rangle$ la K -algèbre

$$\left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}[\frac{1}{p}]^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \mid a_\alpha \in K, \forall \rho < 1 \lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty} |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} = 0 \right\}.$$

Pour une série $f = \sum_{\alpha} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ dans cette algèbre et $\rho < 1$ on pose

$$\|f\|_\rho = \sup \{ |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} \mid \alpha \in \mathbb{N}[\frac{1}{p}]^d \}.$$

On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 8.23.

(1) La K -algèbre $K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}} \rangle\rangle$ munie de la famille de normes $(\|\cdot\|_\rho)_{0 < \rho < 1}$ est spectrale.

(2) On a

$$\text{Spf}(\mathcal{O}_K\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\})^{an} = \mathcal{M}(K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}} \rangle\rangle).$$

(3) On a

$$\mathcal{M}(K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}} \rangle\rangle) = \varprojlim_{n \geq 0} \mathring{\mathbb{B}}^d$$

où $\mathring{\mathbb{B}}^d$ est la boule ouverte de dimension d spectrale et les morphismes de transition sont donnés sur les coordonnées de cette boule par $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1^p, \dots, x_d^p)$. Via cette identification, pour $0 < \rho < 1$ la norme $\|\cdot\|_\rho$ est la norme sup sur le compact

$$\varprojlim_{n \geq 0} |\mathbb{B}^d(0, \rho^{p^{-n}})| \subset \varprojlim_{n \geq 0} |\mathring{\mathbb{B}}^d|$$

où $\mathbb{B}^d(0, \rho^{p^{-n}})$ désigne la boule spectrale fermée de dimension d et de rayon $\rho^{p^{-n}}$.

8.2.6. *Lien avec les algèbres de Frechet B^+ .* L'anneau B^+ défini précédemment (5.2.3) admet la généralisation suivante.

Définition 8.24. Soit R une \mathbb{F}_q -algèbre adique parfaite. Si J est un idéal ouvert de R notons

$$B_J^+ := \left(W_{\mathcal{O}_E}(R) \left[\frac{[x]}{\pi} \right]_{x \in J} \right)^\wedge \left[\frac{1}{\pi} \right],$$

une E -algèbre de Banach où la complétion est pour la topologie π -adique. Si I est un idéal de définition de R on pose alors

$$B_R^+ := \varprojlim_{k \geq 1} B_{I^k}^+$$

comme E -algèbre de Frechet.

Bien sûr la définition de B^+ précédente ne dépend pas du choix de l'idéal de définition I choisit. On vérifie que le Frobenius des vecteurs de Witt s'étend en un Frobenius bijectif φ sur B^+ . L'anneau noté B^+ précédemment n'est rien d'autre que $B_{\mathcal{O}_F}^+$.

On vérifie aussitôt la proposition suivante en utilisant le lemme 8.5.

Proposition 8.25. Il y a un isomorphisme canonique d'algèbres de Frechet

$$B_{k\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}}^+ \simeq W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}} \rangle\rangle.$$

8.3. Espaces de Banach spectraux associés aux espaces vectoriels formels. Soit $K|E$ une extension valuée complète et \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_K . Notons k_K le corps résiduel de \mathcal{O}_K et \mathcal{G}_{k_K} la réduction de \mathcal{G} sur ce corps résiduel. On suppose que k_K est parfait et on fixe une section $k_K \rightarrow \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ de la projection $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \rightarrow k_K$. Comme précédemment on fait l'hypothèse que l'identité de \mathcal{G}_{k_K} se relève en une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

Notons

$$G = (\mathcal{G}^{rig})^{an} = \mathcal{G}^{an}$$

le groupe spectral associé à la fibre générique \mathcal{G}^{rig} de \mathcal{G} .

Définition 8.26. *On note*

$$X(G) = \varprojlim_{\mathbb{N}} G$$

dans la catégorie des K -espaces spectraux où les applications de transition dans la limite projective sont $G \xrightarrow{\times\pi} G$.

Bien sûr $X(G)$ est un groupe dans la catégorie des espaces spectraux et même un E -espace vectoriel dans cette même catégorie. Le plongement $X(G)(K) \subset |X(G)|$ et la topologie de $|X(G)|$ munissent $X(G)(K)$ d'une structure d'espace topologique dont on vérifie qu'il s'agit d'une structure de E -espace de Banach. Plus précisément, si $U \subset \mathcal{G}^{rig}$ est un sous-groupe affinoïde du groupe rigide \mathcal{G}^{rig} alors

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (p^{-n}U)^{an} \subset X(G)$$

est un sous- \mathcal{O}_E -module spectral borné compact du E -espace vectoriel spectral $X(G)$ dont les K -points forment un réseaux définissant la topologie de Banach de $X(G)(K)$.

Proposition 8.27. *Soit $\tilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})$ le relèvement canonique sur $W_{\mathcal{O}}(k_K)$ de l'espace vectoriel formel $X(\mathcal{G}_{k_K})$. Il y a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels spectraux*

$$\tilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an} \hat{\otimes} K \simeq X(G).$$

En particulier, $X(G)$ ne dépend que de la fibre spéciale \mathcal{G}_{k_K} de \mathcal{G} .

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 8.21 et du corollaire 8.9. \square

On vérifie également que cet isomorphisme induit un homéomorphisme d'espaces de Banach

$$X(\mathcal{G}_{k_K})(\mathcal{R}(\mathcal{O}_K)) \simeq X(G)(K).$$

8.4. Interprétation géométrique de l'application des périodes.

8.4.1. Morphismes de Banach spectraux associés aux quasi-logarithmes. Soit $K|E$ une extension valuée complète et \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_K . Notons $G = \mathcal{G}^{an}$ comme \mathcal{O} -module spectral. Soit $f : \mathcal{G}^{rig} \rightarrow \mathbf{G}_a^{rig}$ un quasi-morphisme (def. 7.11). Soit $U \subset \mathcal{G}^{rig}$ un sous- \mathcal{O}_E -module affinoïde et U^{an} le groupe spectral compact associé. Notons

$$X(U) = \varprojlim_{\mathbb{N}} (p^{-n}U)^{an} = \mathcal{M}(\mathcal{A}_U).$$

Pour tout entier n la fonction rigide

$$p^{-n}U \xrightarrow{f_{p^{-n}U}} \mathbf{G}_a^{rig}$$

définit par composition avec la projection

$$X(U) \longrightarrow (p^{-n}U)^{an}$$

une fonction $f_{U,n} \in \mathcal{A}_U$.

Lemme 8.28. *La suite $(p^n f_{U,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans l'algèbre de Banach spectrale \mathcal{A}_U . Si f est un quasi-morphisme borné cette suite tend vers 0.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 7.24. \square

Notons

$$g_U = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{U,n} \in \mathcal{A}_U.$$

Faisant varier U on obtient un élément

$$g \in \varprojlim_U \mathcal{A}_U.$$

Cependant,

$$X(G) = \varinjlim_U X(U) = \mathcal{M}(\varprojlim_U \mathcal{A}_U)$$

et donc g définit un morphisme

$$X(G) \longrightarrow \mathbf{G}_a^{an}$$

dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'un morphisme de E -espace vectoriels spectraux.

On a donc défini un morphisme de K -espaces vectoriels

$$\text{QuasiHom}(\mathcal{G}^{rig}, \mathbf{G}_a^{rig}) / \sim \longrightarrow \text{Hom}_{E\text{-e.v. spectraux}}(X(G), \mathbf{G}_a^{an}).$$

Exemple 8.29. Reprenons l'exemple 8.10, c'est à dire le cas du groupe multiplicatif formel. L'isomorphisme $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\}) \xrightarrow{\sim} X(\widehat{\mathbb{G}}_m)$, c'est à dire la loi de \mathbb{Q}_p -espace vectoriel formel de l'exemple 8.10, induit un isomorphisme d'espaces spectraux $\text{sp}(\mathbb{Q}_p\langle\langle T^{p^{-\infty}} \rangle\rangle) \xrightarrow{\sim} X(\widehat{\mathbb{G}}_m^{rig})$, ou encore une loi de groupe spectral en une variable. Dans ces coordonnées, le logarithme

$$\log : X(\widehat{\mathbb{G}}_m^{an}) \longrightarrow \mathbf{G}_a^{rig}$$

est donné par la série

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}[\frac{1}{p}] \\ \alpha > 0}} \epsilon(\alpha) \frac{T^\alpha}{\alpha} \in \mathbb{Q}_p\langle\langle T^{p^{-\infty}} \rangle\rangle$$

où $\epsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$ est égal à 1 si $p = 2$ et $(-1)^{\alpha \bmod 2}$ sinon.

8.4.2. *Interprétation géométrique de l'application des périodes et géométrisation des espaces de Banach-Colmez.* Soit \mathcal{G} un \mathcal{O} -module formel π -divisible sur \mathcal{O}_K comme précédemment. Il y a une suite exacte pour la topologie étale de \mathcal{O} -modules rigides analytiques

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{rig}[\pi^\infty] \longrightarrow \mathcal{G}^{rig} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \text{Lie } \mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{rig} \longrightarrow 0.$$

Elle induit une suite de \mathcal{O} -modules spectraux

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{rig}[\pi^\infty]^{an} \longrightarrow \mathcal{G}^{an} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \text{Lie } \mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

Appliquant le foncteur $\varprojlim_{\mathbb{N}} (-)$ à cette suite, où les morphismes de transition sont donnés par

$(-) \xrightarrow{\times \pi} (-)$, on obtient une suite de E -espaces vectoriels spectraux

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G})^{\acute{e}t} \longrightarrow \widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an} \widehat{\otimes} K \longrightarrow \text{Lie } \mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

Cette suite est exacte au sens suivant. Dans la catégorie des groupes spectraux, $V_\pi(\mathcal{G})^{\acute{e}t}$ est le noyau du morphisme de droite. De plus, si $C|K$ est une extension valuée complète algébriquement close alors le morphisme induit

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an}(C) \longrightarrow \text{Lie } \mathcal{G} \otimes C$$

est surjectif. On vérifie en fait que si $K = C$ est algébriquement clos et \mathcal{A} une C -algèbre de Banach sympathique au sens de [9] alors la suite associée d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G}) \longrightarrow (\widetilde{X}(\mathcal{G}_k)^{an} \widehat{\otimes} C)(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Lie } \mathcal{G} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

est exacte. La suite précédente est donc une suite exacte d'espaces de Banach de dimension finie au sens de Colmez ([9]). Le point supplémentaire que l'on a gagné par rapport à [9] est que les

espaces de Banach-Colmez précédents ne sont pas seulement définis comme foncteurs abstraits sur des C -algèbres sympathiques mais possèdent un faisceau structural. Ainsi, si $X(\mathcal{G}_k) = \mathrm{Spf}(R)$ alors

$$\tilde{X}(\mathcal{G}_k)^{an} \hat{\otimes} C = \mathcal{M}(B_R^+ \hat{\otimes} C).$$

9. L'ALGÈBRE GRADUÉE $P_{E,\pi}$

9.1. Généralités.

9.1.1. *Définition.* On reprend les notations de la section 5.

Définition 9.1. *On note*

$$P_{E,\pi} = \bigoplus_{d \geq 0} (B_E^+)^{\varphi_E = \pi^d},$$

une E -algèbre graduée dont on note $P_{E,\pi,d} = (B^+)^{\varphi_E = \pi^d}$ ses éléments homogènes de degré d .

L'application canonique $P_\pi \rightarrow B^+$ est injective et identifie P_π à une sous- E -algèbre de B^+ . D'après la proposition 7.1 les éléments homogènes de degré 0 sont

$$P_{E,\pi,0} = E.$$

9.1.2. *Changement d'uniformisante.* Soit π' une autre uniformisante de E . Notons

$$L_{\pi,\pi'} = \{u \in W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q} \mid \varphi(u)\pi = u\pi'\},$$

un E -espace vectoriel de dimension 1. Il y a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$u_{\pi,\pi'} : P_\pi \otimes_E \mathrm{Sym}_E^\bullet L_{\pi,\pi'} \xrightarrow{\sim} P_{\pi'}$$

donné par la recette de la section 7.1.4. De plus, si π'' est une troisième uniformisante, via l'isomorphisme canonique

$$L_{\pi,\pi'} \otimes_E L_{\pi',\pi''} \xrightarrow{\sim} L_{\pi,\pi''}$$

on a

$$u_{\pi,\pi''} = u_{\pi',\pi''} \circ u_{\pi,\pi'}.$$

9.1.3. *Changement de corps E .* Soit $E_h|E$ l'extension non-ramifiée de degré h de E , $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(k)^{\varphi^h = \mathrm{Id}}$. On a alors

$$P_{E_h,\pi} = \bigoplus_{d \geq 0} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^d}.$$

D'après la section 6.3 on a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$P_{E,\pi,\bullet} \otimes_E E_h \xrightarrow{\sim} P_{E_h,\pi,h\bullet}.$$

Soit maintenant $E'|E$ une extension totalement ramifiée et $\pi_{E'}, \pi_E$, des uniformisantes. Soit

$$L_{\pi_{E'},\pi_E} = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q} \mid \varphi(x)\pi_E = u\pi_{E'}^{[E':E]}\},$$

un E -espace vectoriel de dimension 1. Il y a alors un isomorphisme canonique

$$P_{E,\pi_E,\bullet} \otimes_E \mathrm{Sym}_E^\bullet L_{\pi_E,\pi_{E'}} \xrightarrow{\sim} P_{E',\pi_{E'},[E':E]\bullet}.$$

9.2. Produits de Weierstraß.

Définition 9.2. Notons pour $d \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{M}_d = \{x \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \setminus \pi W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \mid x \equiv \pi^d \text{ mod } W_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_F)\}.$$

Les éléments de \mathbb{M}_d sont primitifs de degré d au sens de la définition 6.41. Par exemple, soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q(X) \equiv X^q \text{ mod } \pi$ et $Q(X) \equiv \pi X \text{ mod } X^2$. Soit $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ alors

$$u_{\epsilon} = \frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q} \in \mathbb{M}_1$$

(cf. déf. 6.27). Pour $b \in \mathbb{M}_d$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d} = 1$$

dans B^+ . Le produit infini

$$\prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d}$$

est donc convergent dans B^+ . On aimerait associer à un tel b un élément $\ll \prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d} \cdot \prod_{n < 0} \varphi^n(b) \gg$ dans

$P_{\pi,d}$. Malheureusement le produit $\prod_{n < 0} \varphi^n(b)$ n'est pas convergent et on ne sait pas définir en toute

généralité des éléments dans B^+ de diviseur fixé à l'avance (cf. 6.56), c'est à dire ici un élément de B^+ de diviseur $\sum_{n < 0} \text{div}(\varphi^n(b))$. On va voir que l'on peut tout de même le définir de façon détournée en remarquant qu'il doit satisfaire une équation fonctionnelle.

Remarque 9.3. Notons $x = b \text{ mod } \pi \in \mathcal{O}_F$. Bien que le produit $\prod_{n < 0} \varphi^n(b)$ ne soit pas convergent, on peut donner un sens à sa réduction modulo π de la façon suivante : on a

$$\ll \prod_{n < 0} x^{q^n} = x^{\sum_{n < 0} q^n} = x^{\frac{1}{q-1}} \gg.$$

Bien sûr, aucune de ces expressions n'a de sens. Ceci dit, $x^{\frac{1}{q-1}}$ a bien un sens à multiplication par un élément de \mathbb{F}_q^\times -près. C'est grâce à ce type de « miracle » que l'on peut définir $\prod_{n < 0} \varphi^n(b)$ à un E^\times -multiple près grâce au lemme qui suit.

Proposition 9.4. Pour tout $b \in B^{b,+}$ non nul, le E -espace vectoriel

$$\{x \in B^{b,+} \mid \varphi(x) = bx\}$$

est de dimension 1.

Démonstration. Si b_1, b_2 sont dans cet espace vectoriel et non-nuls, $b_1/b_2 \in W_{\mathcal{O}}(F)[\frac{1}{\pi}]$ vérifie $\varphi(b_1/b_2) = b_1/b_2$. Puisque $W_{\mathcal{O}}(F)_{\mathbb{Q}}^{\varphi=Id} = E$ on en déduit que la dimension de l'espace vectoriel en question est inférieure ou égale à 1. Il faut maintenant montrer qu'il est non nul. On peut supposer que $b \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \setminus \pi W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. Définissons par récurrence sur n une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ telle que $x_{n+1} \equiv x_n \text{ mod } \pi^n$, $x_1 \notin \pi W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ et

$$\varphi(x_n) \equiv bx_n \text{ mod } \pi^n.$$

Soit $b_0 \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ le terme constant de b , $b \equiv b_0 \text{ mod } \pi$. On pose $x_1 = [a]$ où a est une solution de l'équation $X^{q-1} = b_0$. Supposons défini x_n . Soit $z \in \mathcal{O}_F$ tel que $\varphi(x_n) \equiv bx_n + \pi^n[z] \text{ mod } \pi^{n+1}$. On cherche x_{n+1} sous la forme $x_n + \pi^n[u]$. On voit facilement qu'il suffit de prendre pour u une solution de l'équation $U^q - b_0U - z = 0$. \square

Définition 9.5. Pour $b \in \mathbb{M}_d$, on note

$$\Pi^+(b) = \prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d}$$

et $\Pi^-(b)$ n'importe quel élément non nul de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ vérifiant $\varphi(\Pi^-(b)) = b\Pi^-(b)$. On pose alors $\Pi(b) = \Pi^+(b)\Pi^-(b)$.

Les éléments $\Pi^-(b)$ et $\Pi(b)$ ne sont donc définis qu'à multiplication par un élément de E^\times près. Soit

$$\mathbb{M} = \bigcup_{d \geq 0} \mathbb{M}_d,$$

un monoïde pour la loi de multiplication. On vérifie immédiatement que pour $b_1, b_2 \in \mathbb{M}$,

$$\Pi(b_1 b_2) = \Pi(b_1) \Pi(b_2)$$

à un élément de E^\times près. De plus pour $b \in \mathbb{M}_0$, on a $\Pi(b) \in E^\times$ et \mathbb{M}_0 est un sous-groupe de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^\times$,

$$\mathbb{M}_0 = \ker(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^\times \rightarrow W_{\mathcal{O}}(k)^\times).$$

L'application Π définit donc un morphisme de monoïdes

$$\Pi : \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 \longrightarrow (P_\pi \setminus \{0\})/E^\times.$$

Remarquons de plus que l'application $b \mapsto W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)b$ induit un plongement de \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 dans le monoïde des idéaux principaux non nuls de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$.

9.2.1. *Diviseurs sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$.* Reprenons les notations de la section 6.7.

Définition 9.6. On note $\text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ les diviseurs $D \in \text{Div}^+(Y)$ vérifiant $\varphi^* D = D$.

Si $D \in \text{Div}^+(Y)$ est un diviseur de support fini on vérifie que la somme infinie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*} D \in \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

est bien définie. Cela résulte de la formule $\rho \circ \varphi = q\rho$ (cf. sect.6.7). Cela définit un morphisme de monoïdes

$$\text{Div}^+(Y)_{\text{finis}} \xrightarrow{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*}} \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

dont on vérifie facilement qu'il est surjectif. Notons maintenant

$$\mathcal{P} = \bigcup_{d \geq 0} P_d \setminus \{0\}$$

comme monoïde multiplicatif. La fonction diviseur définit alors un morphisme de monoïdes

$$\text{div} : \mathcal{P}/E^\times \longrightarrow \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}).$$

On vérifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{P}/E^\times \\ \text{div} \downarrow & & \downarrow \text{div} \\ \text{Div}^+(Y)_{\text{finis}} & \xrightarrow{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*}} & \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

est commutatif.

Théorème 9.7. Dans le diagramme précédent de monoïdes les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) *Le morphisme diviseur*

$$\text{div} : \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 \longrightarrow \text{Div}^+(Y)_{\text{finis}}$$

est un isomorphisme.

(2) *Le morphisme*

$$\Pi : \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 \longrightarrow \mathcal{P}/E^\times$$

est surjectif

(3) *Le morphisme diviseur*

$$\text{div} : \mathcal{P}/E^\times \longrightarrow \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

est un isomorphisme.

(4) *Le monoïde \mathcal{P}/E^\times est le monoïde abélien libre sur $(P_1 \setminus \{0\})/E^\times$.*

Démonstration. Commençons par l'assertion (1). Si $D = \sum_{\mathfrak{m} \in Y} a_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$ est un diviseur à support fini sur Y , $\mathfrak{m} = (x_{\mathfrak{m}})$ où $x_{\mathfrak{m}} \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ est primitif de degré 1 alors $\text{div}(\prod_{\mathfrak{m}} x_{\mathfrak{m}}^{a_{\mathfrak{m}}}) = D$. Le morphisme est donc surjectif. Pour $x, y \in \mathbb{M}$, d'après le théorème 6.42, on peut écrire $x = \prod_{i \in I} x_i^{a_i}$ et $y = \prod_{j \in J} y_j^{b_j}$ où les $(x_i)_{i \in I}$, resp. $(y_j)_{j \in J}$, sont primitifs de degré 1 et engendrent des idéaux distincts de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. L'égalité $\text{div}(x) = \text{div}(y)$ implique alors qu'il existe une bijection $u : I \xrightarrow{\sim} J$ tels que pour tout $i \in I$ on ait $a_i = b_{u(i)}$ et $(x_i) = (y_{u(i)})$ comme idéaux de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. On en déduit que $(x) = (y)$ et que donc, x et y ont même classe dans \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 .

Passons aux assertions (2) et (3). Soit $f \in P_d$ non nul. Soient $\mu_0 \geq \dots \geq \mu_{d-1}$ les pentes de $\text{Newt}(f)$ sur les segments $[i, i+1]$, $0 \leq i \leq d-1$. Les pentes de $\text{Newt}(f)$ sont alors les $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$ et l'on a pour $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq i < d$,

$$\lambda_{kd+i} = q^{-k} \mu_i.$$

On en déduit que si $\mathfrak{m}_0, \dots, \mathfrak{m}_{d-1} \in Y$ sont les « zéros de f » associés aux pentes $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$ (cf. prop. 6.52),

$$\text{div}(f) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq i \leq d-1}} [\varphi^n(\mathfrak{m}_i)].$$

Écrivons pour $0 \leq i < d$, $\mathfrak{m}_i = ([z_i] - \pi)$ avec $z_i \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on peut écrire f sous la forme

$$f = g_n \cdot \prod_{i=0}^{d-1} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{[z_i^{q^k}]}{\pi}\right)$$

avec $g_n \in B^+$. Comme dans la preuve du théorème 6.50 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g \in B^{b,+}$ et

$$f = g \cdot \prod_{i=0}^{d-1} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{[z_i^{q^k}]}{\pi}\right).$$

Soit maintenant

$$x = \prod_{i=0}^{d-1} (\pi - [z_i]) \in \mathbb{M}_d.$$

La relation $\varphi(f) = \pi^d f$ implique

$$\varphi(g) = xg$$

et donc à un élément de E^\times près, $g = \Pi^-(x)$, soit

$$f = \Pi(x).$$

Les points (2) et (3) en résultent. Le point (4) est alors une conséquence de ce que $\text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ est le monoïde abélien libre sur l'ensemble quotient $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$. \square

9.3. Produits de Weierstraß associés aux éléments de degré 1 et logarithmes. Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \pmod{\pi}$ et $Q \equiv \pi X \pmod{X^2}$. Soit $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q$ la loi de groupe formelle de Lubin-Tate telle que $[\pi]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q} = Q$. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 9.8. *Dans l'espace de Fréchet des fonctions rigides analytiques sur la boule ouverte de dimension 1 sur E , la suite*

$$\frac{[\pi^n]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}}{\pi^n}$$

converge vers le logarithme de $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q$.

Démonstration. Rappelons que l'on note $Q_n = [\pi^n]_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$. Montrons d'abord que la suite de l'énoncé est convergente. Soit $r > 0$. Pour $f = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ notons $w_r(f) = \inf_{k \geq 0} \{v(a_k) + kr\}$.

Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_r(\pi^{-(n+1)} Q_{n+1} - \pi^{-n} Q_n) = +\infty.$$

Constatons que

$$\pi^{-(n+1)} Q_{n+1} - \pi^{-n} Q_n = \pi^{-(n+1)} \cdot (Q(X) - \pi X) \circ Q_n.$$

Puisque $Q(X) - \pi X \in X^2 \mathcal{O}_E[X]$, on a donc

$$w_r(\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n) \geq -(n+1) + 2w_r(Q_n).$$

Choisissons m un entier positif tel que $r > \frac{1}{q^m - q^{m-1}}$. Notons pour tout entier k , $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^k]$ les points de π^k -torsion de la loi de groupe formel de Lubin-Tate $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q$ dans une clôture algébrique fixée de E . Pour $n > m$ on a alors

$$\begin{aligned} w_r(Q_n) &\geq w_r(Q_n/Q_m) \\ &= \sum_{\zeta \in \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^n] \setminus \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^m]} w_r(X - \zeta) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{\zeta \in \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^{k+1}] \setminus \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^k]} w_r(X - \zeta). \end{aligned}$$

Mais si $\zeta \in \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^{k+1}] \setminus \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^k]$, on a $v(\zeta) = \frac{1}{q^{k+1} - q^k}$ et donc si $k \geq m$

$$w_r(X - \zeta) = v(\zeta) = \frac{1}{q^{k+1} - q^k}.$$

On obtient alors que

$$w_r(Q_n) \geq n - m$$

ce qui implique que

$$w_r(\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n) \geq n - 1 - 2m \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On a donc prouvé la convergence de la suite $(\pi^{-n}Q_n)_{n \geq 1}$. Notons f sa limite, une fonction rigide analytique sur le disque ouvert de rayon 1. Les zéros de f sont exactement les points de torsion de la loi de groupe formel $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q$ et coïncident donc avec ceux de son logarithme $\log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}$. La fonction méromorphe $g = f / \log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}$ est donc holomorphe sur le disque ouvert de rayon 1 et sans zéros. De plus, pour tout entier positif n

$$g \circ [\pi^n]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q} = g.$$

Or, pour un point $x \in \mathring{\mathbb{B}}(\bar{E})$, la boule ouverte de rayon 1,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\pi^n]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}(x) = 0.$$

La fonction g est donc constante. Puisque $f'(0) = 1$ on conclut que $f = \log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}$. \square

Remarque 9.9. *Supposons le polynôme Q unitaire. On aimerait développer le logarithme en produit de Weierstrass sous la forme*

$$X \prod_{\zeta \in \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^\infty]} \left(1 - \frac{X}{\zeta}\right).$$

Malheureusement ce produit n'est pas convergent puisque dans l'expression précédente $|\zeta| \rightarrow 1$. La proposition précédente nous dit que quitte à regrouper les termes on peut former un tel produit convergent et obtenir un développement comme dans [36]

$$\log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q} = X \prod_{n \geq 0} \left(\prod_{\zeta \in \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^{n+1}] \setminus \mathcal{L}\mathcal{T}_Q[\pi^n]} \left(1 - \frac{X}{\zeta}\right) \right).$$

Soit $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $u_\epsilon = \frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q} \in \mathbb{M}_1$ (déf. 6.27). De la proposition précédente on conclut que

$$\Pi^+(u_\epsilon) = \log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}([\epsilon]_Q) \cdot \frac{1}{\pi[\epsilon^{1/q}]_Q}.$$

Or on a $\Pi^-(u_\epsilon) = [\epsilon^{1/q}]_Q$. On en déduit donc que

$$\Pi(u_\epsilon) = \log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}([\epsilon]_Q).$$

Il s'en suit que l'on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} & \longrightarrow & (\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times & \xrightarrow{\sim} & Y & \longrightarrow & Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} P_{E,\pi,1} \setminus \{0\}/E^\times \\
\downarrow \simeq \mathcal{L} & & & & & & \nearrow \\
(B^+)^{\varphi=\pi} \setminus \{0\} & & & & & &
\end{array}$$

où le morphisme horizontal $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \rightarrow Y$ est donné par $\epsilon \mapsto (u_\epsilon)$, le morphisme $Y \rightarrow P_{E,\pi,1} \setminus \{0\}/E^\times$ par l'application qui à l'idéal (a) avec $a \in \mathbb{M}_1$ associe $\Pi(a)E^\times$ et le morphisme vertical \mathcal{L} est celui de la proposition 7.6.

9.4. La suite exacte fondamentale.

Théorème 9.10. *Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_d \in Y$ de générateurs $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{M}_1$. Soit pour $1 \leq i \leq d$, $t_i = \Pi(a_i) \in (B^+)^{\varphi=\pi}$. Il y a alors une suite exacte d'espaces de Banach*

$$0 \longrightarrow E \cdot \prod_{i=1}^d t_i \longrightarrow (B^+)^{\varphi=\pi^d} \longrightarrow B^+/\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_d \longrightarrow 0.$$

Démonstration. L'exactitude au milieu est une conséquence du point (3) du théorème 9.7. Pour tout i , le morphisme $(B^+)^{\varphi=\pi} \rightarrow B^+/\mathfrak{m}_i = C_{\mathfrak{m}_i}$ s'identifie à l'application logarithme d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur h sur le corps $C_{\mathfrak{m}_i}$ et est surjective (cf. section 7.5). On montre alors facilement par récurrence sur d que le morphisme de gauche est surjectif. \square

Exemple 9.11. *Si $E = \mathbb{Q}_p$, $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, $u_\epsilon = \frac{[1+\epsilon]-1}{[1+\epsilon^{1/p}]-1}$, $\mathfrak{m} = (u_\epsilon)$, $t_{\mathfrak{m}} = \log([1+\epsilon])$, il y a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \cdot t_{\mathfrak{m}}^d \longrightarrow (B^+)^{\varphi=p^d} \longrightarrow B^+/\mathfrak{m}^d \longrightarrow 0.$$

On retrouve donc la suite exacte fondamentale de [19].

Corollaire 9.12. *Soit $t \in P_{E,\pi,1}$, $t \neq 0$ et $\mathfrak{m} \in Y$ tel que $\text{div}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*} \mathfrak{m}$. Il y a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées*

$$P_{E,\pi}/tP_{E,\pi} \xrightarrow{\sim} \{f \in C_{\mathfrak{m}}[T] \mid f(0) \in E\}.$$

Démonstration. Soit $\theta_{\mathfrak{m}} : B^+ \rightarrow C_{\mathfrak{m}}$. Le morphisme d'algèbres graduées $P_{E,\pi} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}[T]$ donné en degré d par $x \mapsto \theta_{\mathfrak{m}}(x)T^d$ induit un morphisme $P_{E,\pi}/tP_{E,\pi} \rightarrow C_{\mathfrak{m}}[T]$. Utilisant le théorème 9.10 on vérifie que c'est une injection d'image les polynômes à terme constant dans E . \square

On peut également généraliser la proposition 5.1.3 de [19].

Théorème 9.13. *Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_d \in Y$ de générateurs $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{M}_1$. Soient $\Pi^-(a_1), \dots, \Pi^-(a_d) \in B^{b,+}$ normalisés de telle manière à ce qu'ils appartiennent à $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \setminus \pi W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. L'idéal de $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ formé des $x \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ tels que $\forall n \geq 0$, $\varphi^n(x) \in \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_d$ est l'idéal engendré par $\Pi^-(a_1) \dots \Pi^-(a_d)$.*

Démonstration. Dire que pour tout $n \geq 0$, $\varphi^n(x) \in \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_d$ est équivalent à dire que

$$\text{div}(x) \geq \sum_{i=1}^d \sum_{n \leq 0} [\varphi^n(\mathfrak{m}_i)].$$

Le théorème se déduit alors du point (1) du théorème 6.55. \square

10. LA COURBE

10.1. Définition et théorème principal. On reprend les notations des sections précédentes.

Définition 10.1. *On note*

$$X_E = \text{Proj}(P_{E,\pi_E}).$$

La notation précédente $\ll X_E \gg$ ne fait pas référence à l'uniformisante π_E pour une bonne raison ; bien que l'algèbre graduée P_{E,π_E} dépende du choix de cette uniformisante, d'après l'isomorphisme noté $u_{\pi,\pi'}$ de la section 9.1.2 et [24] prop. 3.1.8 (iii) le schéma X_E ne dépend pas canoniquement de ce choix. Notons enfin que puisque $P_{E,\pi_E,0} = E$, X_E est un E -schéma.

Théorème 10.2.

- (1) Le schéma X_E est une courbe complète de corps de définition E dont tous les points fermés sont de degré 1.
- (2) Si $E'|E$ il y a un isomorphisme canonique $X_{E'} \xrightarrow{\sim} X_E \otimes_E E'$.
- (3) Pour tout $t \in P_{E,\pi,1}$ non nul, $V^+(t) = \{\infty_t\}$, le lieu d'annulation de la section hyperplane définie par t , est formé d'un seul point. De plus, le corps résiduel C_t de X_E en ∞_t est un corps valué complet algébriquement clos extensions de E . On a alors une identification canonique à une puissance de Frobenius près $\mathcal{R}(\mathcal{O}_{C_t}) = \mathcal{O}_F$.
- (4) L'application

$$\begin{array}{ccc} (P_{E,\pi,1} \setminus \{0\})/E^\times & \longrightarrow & |X_E| \\ t.E^\times & \longmapsto & \infty_t \end{array}$$

est une bijection. Il y a de plus une bijection naturelle

$$Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_E|.$$

- (5) Pour un tel t , l'anneau local $\mathcal{O}_{X_E,\infty_t}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t . Son complété s'identifie canoniquement à l'anneau de valuation discrète B_{dR}^+ associé au corps résiduel en ∞_t .
- (6) Soit $B_{cris,E}^+$ l'anneau de Fontaine associé au corps résiduel en ∞_t . Il y a une identification canonique

$$B_E^+ = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(B_{cris,E}^+).$$

Soit

$$B_e = \left(B_{cris,E}^+ \left[\frac{1}{t} \right] \right)^{\varphi_E = Id} = \left(B_E^+ \left[\frac{1}{t} \right] \right)^{\varphi_E = Id}.$$

On a alors

$$D^+(t) = X_E \setminus \{\infty_t\} = \text{Spec}(B_e)$$

et B_e est un anneau principal. De plus, si ord_{∞_t} est la valuation sur B_e induite par le plongement $B_e \subset B_{dR}$, le couple $(B_e, -\text{ord}_{\infty_t})$ est presque euclidien (def. 1.8).

- (7) Si $E'|E$, via le revêtement étale $X_{E'} \rightarrow X_E$ l'image réciproque d'un point fermé $x \in |X_E|$ est constituée de $[E' : E]$ -points de même corps résiduel que celui de x .
- (8) L'application degré induit un isomorphisme

$$\text{Pic}(X_E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

- (9) On a $H^1(X_E, \mathcal{O}_{X_E}) = 0$.

Démonstration. D'après les théorèmes 9.7, 9.10 et son corollaire 9.12, les hypothèses du théorème 1.13 sont vérifiées. Utilisant également les résultats de la section 2.3, on en déduit facilement toutes les assertions du théorème, hormis les points (2) et (7). Le point (2) se déduit de [24] 2.4.7 (i) et de la section 9.1.3 dont il résulte qu'il y a un isomorphisme d'algèbres graduées

$$P_{E,\pi_E,\bullet} \otimes_E E' \xrightarrow{\sim} P_{E,\pi_{E'},[E':E]\bullet}.$$

Le point (7) résulte de ce que le morphisme $X_{E'} \rightarrow X_E$ est étale fini de degré $[E' : E]$ et de ce que le corps résiduel en un point fermé de X_E est algébriquement clos. \square

Notons pour tout $h \geq 1$, $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(k)^{\varphi_E^h = Id}$ l'extension non-ramifiée de degré h de E .

Corollaire 10.3. La tour de courbes $(X_{E_h})_{h \geq 1}$ est une sphère de Riemann généralisée au sens de la définition 4.20.

10.2. Uniformisation rigide analytique et choix d'un fibré ample. Soit $\mathcal{M}(B_E^+)$ l'espace topologique de Berkovich introduit dans la section 6.2.3. Soit $\mathring{\mathbb{B}} \setminus \{0\}$ le disque ouvert épointé comme espace rigide analytique sur F . Il y a un homéomorphisme et un plongement (cf. section 6.2 et prop. 6.30)

$$\begin{aligned} (\mathring{\mathbb{B}}(F) \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times &\xrightarrow{\sim} Y \hookrightarrow \mathcal{M}(B_E^+) \\ \epsilon \cdot \mathcal{O}_E^\times &\longmapsto (u_\epsilon). \end{aligned}$$

On peut alors penser aux éléments de Y comme aux « points classiques » de l'espace de Berkovich $\mathcal{M}(B_E^+)$. Les points fermés de la courbe $|X_{E_h}|$ sont alors uniformisés par ces points classiques,

$$Y/\varphi^{h\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_{E_h}|.$$

On peut alors penser au choix d'un fibré en droites sur la courbe X_E comme correspondant au choix d'un facteur d'automorphie, un cocycle dans $Z^1(\varphi^{\mathbb{Z}}, (B_E^+)^\times) = Z^1(\varphi^{\mathbb{Z}}, (B_E^{b,+})^\times)$. Les classes d'isomorphisme de fibrés sont alors en bijection avec $H^1(\varphi^{\mathbb{Z}}, (B_E^{b,+})^\times)$ qui sont les classes de φ -conjugaison dans $(B_E^{b,+})^\times$. Celle-ci sont classifiées par leur valuation π -adique,

$$\begin{aligned} (B_E^{b,+})^\times / \sim &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \\ [b] &\longmapsto v_\pi(b). \end{aligned}$$

Faisons comme si l'uniformisation précédente avait un sens précis. Si $b \in (B_E^{b,+})^\times$ notons \mathcal{L}_b le fibré en droites sur X_E obtenu via l'uniformisation précédente, moralement celui-ci a pour réalisation géométrique

$$(Y \times \mathbb{A}^1)/\mathbb{Z} \longrightarrow Y/\mathbb{Z}$$

où \mathbb{Z} agit sur Y via les puissances de φ et sur \mathbb{A}^1 via les puissances de b . On a donc

$$H^0(X_E, \mathcal{L}_b) = (B^+)^{\varphi=b}.$$

Une des premières étapes dans la preuve des théorèmes de classification de Kedlaya et Hartl-Pink consiste à montrer que si M est un φ -module alors pour $n \gg 0$, $H^0(M(n)) \neq 0$ où $M(n)$ est obtenu à partir de M en tordant le Frobenius par π^n . Cela nous pousse à décréter que le fibré \mathcal{L}_π est ample. Nous avons en quelque sorte forcé cela en définissant la courbe comme étant le schéma associé à l'algèbre graduée des puissances tensorielles de $\mathcal{L}_\pi = \mathcal{O}_X(1)$.

10.3. Le corps des fonctions rationnelles sur la courbe. Notons $E(X_E)$ le corps des fonctions rationnelles sur la courbe X_E c'est à dire $\mathcal{O}_{X_E, \eta}$ où η est le point générique de X_E . Il s'agit du sous-corps de $\text{Frac}(P_{E, \pi})$ formé des éléments de la forme $\frac{x}{y}$ avec x et y homogènes de même degré. La proposition qui suit dit que ce corps s'identifie en fait à un corps de « fonctions méromorphes sur l'espace $\mathcal{M}(B_E^+)$ » invariants sous φ .

Proposition 10.4. *On a l'égalité $E(X_E) = \text{Frac}(B_E^+)^{\varphi=Id}$.*

Démonstration. On a bien sûr $E(X_E) \subset \text{Frac}(B_E^+)^{\varphi=Id}$. Dans l'autre direction, soient $x, y \in B_E^+ \setminus \{0\}$ tels que

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}.$$

Le diviseur $\text{div}(x) - \text{div}(y) \in \mathbb{Z}^Y$ est donc invariant sous φ . On en déduit facilement qu'il existe $D_1, D_2 \in \text{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ tels que

$$\text{div}(x) - \text{div}(y) = D_1 - D_2.$$

D'après le point (3) du théorème 9.7 il existe $d, d' \in \mathbb{N}$, $a \in P_d$ et $b \in P_{d'}$ tels que $\text{div}(a) = D_1$ et $\text{div}(b) = D_2$. On obtient alors dans $\text{Div}^+(Y)$,

$$\text{div}(ay) = \text{div}(bx).$$

D'après le point (2) du théorème 6.55 cela implique l'existence d'une unité $c \in B^+[\frac{1}{|\alpha|}]^\times$, $\alpha \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, telle que

$$bx = cay.$$

Appliquant φ à l'équation précédente on obtient

$$\varphi(c) = \pi^{d'-d}c.$$

Cette équation implique que $v_0(c) = 0$ et donc

$$c \in B^+ = \{z \in B^+[\frac{1}{\alpha}] \mid v_0(z) \geq 0\}.$$

On a donc $d' \geq d$ et $c \in P_{d'-d}$. Cela implique que $\frac{x}{y} \in E(X_E)$. \square

11. DEUX RÉSULTATS SUR LES PÉRIODES DES GROUPES p -DIVISIBLES

Les résultats de cette section seront utilisés dans la preuve du théorème de classification des fibrés sur la courbe X_E construite précédemment.

11.1. Le cas de l'espace de Lubin-Tate. Soit $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de \mathbb{F}_q dans k , $n \geq 1$ un entier et \mathbb{H} un \mathcal{O} -module formel π -divisible de dimension 1 et de \mathcal{O} -hauteur n (cf. sec. 7.3). Un tel \mathcal{O} -module formel est unique à isomorphisme non-unique près. Notons $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ le \mathcal{O} -module de Dieudonné covariant de \mathbb{H} (on prendra garde que dans la section 7.3 cette notation désignait le module de Dieudonné contravariant). Il est muni d'un opérateur V associé à l'isogénie $F^{f_E} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{(q)}$. On a

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}) = \langle e, Ve, \dots, Ve \rangle$$

où $V^n e = \pi e$. Soit $\widehat{E}^{nr} = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et \mathfrak{X} l'espace des déformations par isomorphismes de \mathbb{H} sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E}^{nr}})$. C'est un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E}^{nr}})$ -schéma formel non canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E}^{nr}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

Soit \mathfrak{X}^{an} la fibre générique de \mathfrak{X} comme \widehat{E}^{nr} -espace analytique de Berkovich. Cet espace est isomorphe à une boule ouverte de dimension $n - 1$. Si $K|\widehat{E}^{nr}$ est une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans \mathbb{R} ,

$$\mathfrak{X}^{an}(K) = \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) = \{(H, \rho)\} / \sim$$

où H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K et

$$\rho : \mathbb{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K \longrightarrow H \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K$$

est une quasi-isogénie de hauteur 0 de \mathcal{O} -modules π -divisibles. Soit \mathbb{P} le \widehat{E}^{nr} -espace analytique de Berkovich associé à la variété algébrique qui est l'espace projectif sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$. Il y a alors un morphisme de périodes

$$\check{\pi} : \mathfrak{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{P}$$

défini par Gross et Hopkins dans [22] et généralisé par Rapoport et Zink dans [40], chap. 5. Nous n'aurons besoin de sa définition qu'au niveau des points. Soit $K|\widehat{E}^{nr}$ comme précédemment et $[(H, \rho)] \in \mathfrak{X}^{an}(K)$. On peut alors définir une \mathcal{O} -extension vectorielle universelle $E_{\mathcal{O}}(H)$ ([16], appendice B.3) et considérer son algèbre de Lie, $\mathrm{Lie} E_{\mathcal{O}}(H)$, qui est un \mathcal{O}_K -module libre de rang $\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}(H)$. Elle est munie d'une filtration de Hodge

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie} E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie} H \longrightarrow 0.$$

où $V_{\mathcal{O}}(H)$, la partie vectorielle de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle, est égale à $\omega_{H^D} / I\omega_{H^D}$ avec H^D le dual de Cartier de H et $I = \ker(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_K)$. Le \mathcal{O} -module de Dieudonné $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ s'interprète comme l'évaluation d'un cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle (cf. [16], app. B.3). La quasi-isogénie ρ induit alors un isomorphisme

$$\rho_* : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})[\frac{1}{\pi}] \otimes_{\widehat{E}^{nr}} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} E_{\mathcal{O}}(H)[\frac{1}{\pi}].$$

Via ρ_* , la filtration de Hodge précédente définit donc un point de $\mathbb{P}(K)$ qui est l'image de $[(H, \rho)]$ par l'application des périodes $\check{\pi}$.

Théorème 11.1 ([34], [22]). *Le morphisme des périodes $\check{\pi} : \mathfrak{X}^{an} \rightarrow \mathbb{P}$ est surjectif.*

Le théorème précédent se traduit plus concrètement de la façon suivante. Il dit que pour tout $K|\widehat{E}^{nr}$, tout $y \in \mathbb{P}(K)$, il existe $L|K$ une extension de degré fini et $x \in \mathfrak{X}^{an}(L)$ tel que $\tilde{\pi}(x) = y$. Dans [34] le théorème est démontré lorsque K est de valuation discrète et $E = \mathbb{Q}_p$, mais les arguments s'adaptent aussitôt au cas général. On déduit également facilement ce théorème du corollaire 23.15 de [22].

Voici maintenant la traduction du théorème précédent en termes de théorie de Hodge p -adique.

Théorème 11.2. *Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos tel que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_F$, c'est à dire $C = C_{\mathfrak{m}}$ pour un $\mathfrak{m} \in Y$. Soit $\theta : B_E^+ \rightarrow C$ le morphisme déduit. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in C$ non tous nuls. Alors, le morphisme*

$$\begin{aligned} (B_E^+)^{\varphi_E^n = \pi} &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta(\varphi_E^i(x)) \end{aligned}$$

est surjectif de noyau un E -espace vectoriel de dimension n , V . De plus, si $t_E \in B_E^+$ désigne la période d'un \mathcal{O} -module formel π -divisible de dimension 1 et de hauteur 1 sur \mathcal{O}_C (un groupe de Lubin-Tate), avec les notations de la définition 9.5 $t_E = \Pi(x)$ où $x \in \mathbb{M}_1$ est un générateur de \mathfrak{m} , le morphisme B_E^+ -linéaire

$$\begin{aligned} V \otimes_E B_E^+ &\longrightarrow (B_E^+)^n \\ v \otimes 1 &\longmapsto (x, \varphi_E(x), \dots, \varphi_E^{n-1}(x)) \end{aligned}$$

est injectif de conoyau annulé par t_E .

11.2. Le cas de l'espace de Drinfeld. On garde les notations de la section précédente. Soit maintenant D une algèbre à division centrale sur E d'invariant $\frac{1}{n}$. Écrivons

$$D = \mathcal{O}_{E_n}[\Pi],$$

$W_{\mathcal{O}_E}(k)^{\varphi_E^n = Id} = E_n|E$ étant l'extension non-ramifiée de degré n et Π une uniformisante de D ; $\Pi^n = \pi$ et $\forall x \in E_n$ on a $\Pi x = \sigma_E(x)\Pi$. On note $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{E_n}[\Pi]$ son ordre maximal.

Soit S un \mathcal{O}_E -schéma sur lequel p est nilpotent, resp. $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$ -schéma formel. Rappelons que d'après Drinfeld ([12]), un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur S est \mathcal{O} -module formel π -divisible G sur S muni d'une action de \mathcal{O}_D tel que $\mathrm{Lie} G$ soit un $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_S$ -module libre de rang 1. Concrètement, cette dernière condition signifie que localement pour la topologie étale sur S (en fait il suffit de prendre le revêtement $S \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_n} \rightarrow S$), si

$$\mathrm{Lie} G = \bigoplus_{\tau: \mathcal{O}_{E_n} \hookrightarrow \mathcal{O}_S} (\mathrm{Lie} G)_{\tau}$$

où $\mathcal{O}_{E_n} \subset \mathcal{O}_D$ agit sur $(\mathrm{Lie} G)_{\tau}$ via τ , pour tout τ , $(\mathrm{Lie} G)_{\tau}$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang 1.

Notons $can : E_n \hookrightarrow W_{\mathcal{O}}(k)$ le plongement canonique. Soit G un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur k . Son \mathcal{O} -module de Dieudonné covariant se décompose en

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i$$

où \mathcal{O}_{E_n} agit sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i$ via $\sigma_E^{-i} \circ can : \mathcal{O}_{E_n} \rightarrow W_{\mathcal{O}}(k)$. Relativement à cette graduation du module de Dieudonné on a

$$\mathrm{deg}(V) = \mathrm{deg}(\Pi) = +1.$$

On peut donc associer à un tel G un \mathcal{O} -isocristal

$$(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0[\frac{1}{\pi}], V^{-1}\Pi).$$

Supposons maintenant que G soit de \mathcal{O} -hauteur n^2 , c'est à dire $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$ est un $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module de rang n . Si $M \subset \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$ est un réseau et $\Lambda = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \Pi^i M$ on a

$$n = \dim G = [\Lambda : V\Lambda] = n[V^{-1}\Pi M : M] + \underbrace{[M : \pi M]}_n$$

et donc $[V^{-1}\Pi M : M] = 0$. Le point terminal du polygone de Newton de $(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)[\frac{1}{\pi}], V^{-1}\Pi)$ est donc 0. De plus,

$$\text{Lie } G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i / V\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i-1}$$

où chacun des éléments de la graduation est un k -espace vectoriel de dimension 1. Puisque $\Pi^n = \pi$, qui induit le morphisme nul sur $\text{Lie } G$, il existe un indice $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\Pi \cdot \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i_0} = V\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i_0}$. Alors, $\Pi^{-i_0} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i_0}$ est un réseau invariant sous $V^{-1}\Pi$ dans $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$. De tout cela on déduit que

$$(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0[\frac{1}{\pi}], V^{-1}\Pi)$$

est un \mathcal{O} -isocristal unité i.e. isocline de pente 0. On montre alors que la correspondance

$$G \longmapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0[\frac{1}{\pi}], V^{-1}\Pi)$$

induit une équivalence entre les \mathcal{O}_D -modules formels spéciaux de hauteur n^2 à isogénies près et les \mathcal{O} -isocristaux unité.

En particulier, si k est algébriquement clos, la correspondance

$$G \longmapsto \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0[\frac{1}{\pi}]^{V=\Pi}$$

induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O}_D -modules formels spéciaux à isogénie près et les E -espaces vectoriels de dimension n .

Soit maintenant \mathbb{G} un \mathcal{O}_D -module formel spécial de hauteur n^2 sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de \mathbb{F}_{q^n} . Notons

$$W = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})_0[\frac{1}{\pi}]^{V=\Pi},$$

un E -espace vectoriel de dimension n . Soit $\widehat{\Omega}$ le $\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{E^{nr}}})$ -schéma formel paramétrant les déformations par quasi-isogénies de hauteur 0 de \mathbb{G} . Soit $\Omega = \widehat{\Omega}^{an}$ la fibre générique de $\widehat{\Omega}$ comme $\widehat{E^{nr}}$ -espace analytique de Berkovich. Soit \mathbb{P} l'espace analytique de Berkovich associé à l'espace projectif $\mathbb{P}(W)_{\widehat{E^{nr}}}$. Il y a alors un morphisme de périodes

$$\tilde{\pi} : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}.$$

Nous n'aurons besoin de sa définition qu'au niveau des points. Soit donc $K|\widehat{E^{nr}}$ une extension valuée complète et $[(G, \rho)] \in \widehat{\Omega}(\mathcal{O}_K) = \Omega(K)$. Ici, G est un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur \mathcal{O}_K et

$$\rho : \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K \longrightarrow G \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K$$

est une quasi-isogénie de hauteur 0. On a une décomposition de l'algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extensions vectorielle universelle

$$\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G)_i$$

où E_n agit sur $\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G)_i$ via $E_n \hookrightarrow \widehat{E^{nr}} \xrightarrow{\sigma_E^{-i}} \widehat{E^{nr}} \xrightarrow{\text{can}} K$. On a de même une décomposition de la filtration de Hodge

$$\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G)_i \twoheadrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Lie}(G)_i = \text{Lie } G$$

sur laquelle Π agit comme un opérateur homogène de degré +1. De plus, ρ induit un isomorphisme gradué

$$\rho_* : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})[\frac{1}{\pi}] \otimes_{\widehat{E^{nr}}} K \xrightarrow{\sim} \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G)[\frac{1}{\pi}]$$

et donc sur la partie homogène de degré 0,

$$\rho_* : W \otimes_E K = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})_0[\frac{1}{\pi}] \otimes_{\widehat{E^{nr}}} K \xrightarrow{\sim} \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(G)_0[\frac{1}{\pi}].$$

Via ρ_* , la filtration de Hodge de G définit donc un morphisme surjectif

$$W \otimes_E K \rightarrow (\mathrm{Lie} G)_0 \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

et donc un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(K)$. Cet élément est $\check{\pi}([(G, \rho)])$.

Théorème 11.3 ([12]). *Le morphisme des périodes $\check{\pi} : \Omega \rightarrow \mathbb{P}$ induit un isomorphisme entre Ω et l'ouvert de \mathbb{P}*

$$\mathbb{P} \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}(W)(E)} H^{an}$$

qui est le complémentaire des hyperplans E -rationnels dans l'espace analytique \mathbb{P} sur le E -espace vectoriel W .

Remarque 11.4. Dans [35], Lafaille démontre également que l'image du morphisme de périodes précédent est celle annoncée.

Voici la traduction du théorème précédent en termes de théorie de Hodge p -adique.

Théorème 11.5. *Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos tel que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_F$, c'est à dire $C = C_{\mathfrak{m}}$ pour un $\mathfrak{m} \in Y$. Soit $\theta : B_E^+ \rightarrow C$ le morphisme déduit. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in C$ linéairement indépendants sur E . Alors, le morphisme*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=0}^{n-1} (B_E^+)^{\varphi_E^n = \pi} &\longrightarrow C^n \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) &\longmapsto \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta(\varphi^j(x_i)) \right)_{0 \leq j \leq n-1} \end{aligned}$$

est surjectif de noyau un E -espace vectoriel de dimension n^2 .

Plus précisément, munissons $\bigoplus_{i=0}^{n-1} (B^+)^{\varphi^n = \pi}$ de la structure de D -espace vectoriel définie par

$$\Pi.(x_0, \dots, x_{n-1}) = (\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_{n-1}))$$

et pour tout $a \in E_n$, $a.(x_0, \dots, x_{n-1}) = (ax_0, \dots, ax_{n-1})$ via la plongement canonique $E_n \subset (B^+)^{\varphi^n = \mathrm{Id}}$. Alors, ce noyau V est un sous- D -espace vectoriel de dimension 1 de $\bigoplus_{i=0}^{n-1} (B^+)^{\varphi^n = \pi}$. De plus, le morphisme naturel

$$\begin{aligned} V \otimes_E B_E^+ &\longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} (B_E^+)^n \\ (x_0, \dots, x_{n-1}) \otimes 1 &\longmapsto (\varphi^j(x_0), \dots, \varphi^j(x_{n-1}))_{0 \leq j \leq n-1} \end{aligned}$$

est injectif de conoyau annulé par t_E^n .

12. FIBRÉS VECTORIELS

12.1. Fibrés en droites.

12.1.1. Classification et cohomologie.

Définition 12.1. *Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si $P_{E,\pi}[d]$ désigne l'algèbre graduée $P_{E,\pi}$ décalée de d vue comme $P_{E,\pi}$ -module gradué, on note*

$$\mathcal{O}_{X_E}(d) = \widetilde{P_{E,\pi}[d]}$$

comme faisceau de \mathcal{O}_{X_E} -modules (cf. [24] 2.5.3).

Pour tout d , $\mathcal{O}_{X_E}(d)$ est un fibré en droites sur X_E i.e. $\mathcal{O}_{X_E}(d)$ est localement libre de rang 1. De plus,

$$\mathcal{O}_{X_E}(d) = \mathcal{O}_{X_E}(1)^{\otimes d}.$$

Bien que nous ne l'indiquions pas dans la notation, contrairement à la courbe X_E qui ne dépend pas canoniquement du choix de l'uniformisante π (cf. remarque après la def. 10.1), le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(1)$

en dépend. Bien sûr le choix d'une autre uniformisante fournit un fibré isomorphe, mais non canoniquement.

Comme anneau gradué,

$$P_{E,\pi} = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d))$$

et on peut donc penser à $\mathcal{O}_{X_E}(1)$ comme « un fibré très ample ». Un élément $s \in P_{E,\pi,d} \setminus \{0\}$ définit un diviseur de Cartier $(\mathcal{O}_{X_E}(d), s)$. Si $s = \prod_{i=1}^d t_i$ avec $t_i \in P_{E,\pi,1}$, $V^+(t_i) = \{\infty_i\}$, on a l'égalité de diviseurs de Weil

$$\operatorname{div}(s) = \sum_{i=1}^d [\infty_i] \in \operatorname{Div}(X_E).$$

Soit $t \in P_{E,\pi,1} \setminus \{0\}$ et $V^+(t) = \{\infty\}$ de corps résiduel C . Soit $B^+ \xrightarrow{\theta} C$ le morphisme associé (il est bien défini à composition par une puissance de φ près). On a $X \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec}(B_e)$ avec $B_e = (B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=Id}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{X_E,\infty} = B_{dR}^+$ d'uniformisante t . Rappelons (prop. 2.2) que les fibrés sur X_E s'identifient aux couples (M, N) où

- N est un B_{dR}^+ -module libre,
- $M \subset N[\frac{1}{t}]$ est un sous- B_e -module libre de même rang que N engendrant le B_{dR} -espace vectoriel $N[\frac{1}{t}]$ (de façon équivalente M est un sous B_e -module libre de $N[\frac{1}{t}]$ tel que $M \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} N[\frac{1}{t}]$).

D'après la proposition 2.3, si le fibré \mathcal{E} correspond à la paire (M, N) , le complexe de cohomologie $R\Gamma(X_E, \mathcal{E})$ s'identifie à

$$\begin{aligned} M \oplus N &\longrightarrow N[\frac{1}{t}] \\ (m, n) &\longmapsto m - n. \end{aligned}$$

Le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(d)$ correspond alors au couple $(B_e, t^{-d}B_{dR}^+)$. Soit $\operatorname{deg} = -v_\infty : B_e \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Il y a alors une identification

$$H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d)) = B_e \cap t^{-d}B_{dR}^+ = B_e^{\operatorname{deg} \leq d}$$

via l'isomorphisme

$$\begin{aligned} P_{E,\pi,d} &\xrightarrow{\sim} B_e^{\operatorname{deg} \leq d} \\ x &\longmapsto \frac{x}{t^d}. \end{aligned}$$

La suite d'inclusions donnée par le cup-produit par $t \in H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_E}(1))$

$$H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}) \xrightarrow{\times t} H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(1)) \xrightarrow{\times t} \dots H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d)) \xrightarrow{\times t} \dots$$

s'identifie alors à la filtration de l'anneau B_e

$$E = B_e^{\operatorname{deg} \leq 0} \subset B_e^{\operatorname{deg} \leq 1} \subset \dots \subset B_e^{\operatorname{deg} \leq d} \subset \dots$$

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 12.2.

(1) Il y a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X_E) \\ d &\longmapsto [\mathcal{O}_{X_E}(d)] \end{aligned}$$

d'inverse donné par le degré

$$\operatorname{deg} : \operatorname{Pic}(X_E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

(2) On a

$$H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d)) = \begin{cases} P_{E,\pi,d} & \text{si } d \geq 0 \\ 0 & \text{si } d < 0 \end{cases}$$

qui s'identifie à $B_e^{\operatorname{deg} \leq d}$ après choix d'un point $\infty \in |X_E|$.

(3) On a après choix d'un point $\infty \in |X_E|$, si $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$ d'uniformisante t ,

$$H^1(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq 0 \\ B_{dR}^+ / (B_{dR}^+ t^d + E) & \text{si } d < 0 \end{cases}$$

12.1.2. *Comportement via le changement de niveau.* Soit $E'|E$ et

$$\pi_{E'/E} : X_{E'} \longrightarrow X_E.$$

Il y a alors un isomorphisme non canonique

$$\pi_{E'/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(d) \simeq \mathcal{O}_{X_{E'}}([E' : E]d).$$

Lorsque $E' = E_h = W_{\mathcal{O}_E}(k)^{\varphi_E^h = Id}$ est l'extension non-ramifiée de degré h et que l'on utilise l'uniformisante π_E de E comme uniformisante de E_h pour définir $\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d)$ il y a un isomorphisme

$$\pi_{E_h/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_{E_h}}(hd)$$

canonique.

12.1.3. *Interprétation géométrique de la suite exacte fondamentale.* Soit $d \geq 1$ et $s \in H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d)) = P_{E,\pi,d}$ non nul. Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E} \xrightarrow{\times s} \mathcal{O}_{X_E}(d) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

où \mathcal{F} est un faisceau cohérent de torsion sur X_E . Puisque $H^1(X_E, \mathcal{O}_{X_E}) = 0$, la suite exacte précédente induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\times s} P_{E,\pi,d} \longrightarrow H^0(X_E, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

Si $s = \prod_{i=1}^r t_i^{a_i}$ où $t_i \in P_{E,\pi,1}$, $V^+(t_i) = \{x_i\}$, pour $i \neq j$ on a $x_i \neq x_j$,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r i_{x_i*} \mathcal{O}_{X_E, x_i} / (t_i^{a_i}),$$

où $i_{x_i} : \{x_i\} \hookrightarrow X_E$. Si l'on note $B_{dR,i}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E, x_i}$, la suite exacte précédente se réécrit donc

$$0 \longrightarrow E \cdot \prod_{i=1}^r t_i^{a_i} \longrightarrow P_{E,\pi,d} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r B_{dR,i}^+ / (t_i^{a_i}) \longrightarrow 0.$$

Ce n'est rien d'autre que la suite exacte du théorème 9.10.

12.2. Le cône sur la courbe X_E et sa désingularisation canonique. Commençons par quelques rappels non présents dans [24]. Soit $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ un anneau gradué engendré par ses éléments de degré 1 comme A_0 -algèbre et $X = \text{Proj}(A)$, un $\text{Spec}(A_0)$ -schéma. Posons $\mathcal{O}_X(1) = \widehat{A[1]}$, un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 et

$$\mathbb{E} = \mathbb{V}(\mathcal{O}_X(1)) = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-1)) \longrightarrow X$$

la réalisation géométrique de ce fibré en droites. Soit

$$\mathbb{C} = \text{Spec}(A)$$

le cône sur X , un $\text{Spec}(A_0)$ -schéma. Il est muni d'une action de \mathbb{G}_m via la graduation de l'anneau A où \mathbb{G}_m agit sur les éléments homogènes de degré d , A_d , via le caractère $z \mapsto z^d$. Le morphisme $\mathbb{C} \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ est \mathbb{G}_m -invariant. Il est de plus muni d'une section canonique

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \downarrow \curvearrowright V(A^+) \\ \text{Spec}(A_0) \end{array}$$

qui est « l'origine du cône », donnée par le sous-schéma fermé associé à l'idéal d'augmentation A^+ de A . Il y a alors un isomorphisme

$$(\mathbb{C} \setminus V(A^+)) / \mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} X.$$

Plus précisément, il y a un morphisme \mathbb{G}_m -invariant $\mathbb{C} \setminus V(A^+) \rightarrow X$ qui est le \mathbb{G}_m -torseur $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ associé à $\mathcal{O}_X(1)$. L'identification entre $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus V(A^+)$ se prolonge en un morphisme \mathbb{G}_m -équivariant

$$\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui identifie \mathbb{E} à l'éclatement du sous-schéma fermé $V(A^+)$ de \mathbb{C} , la fibre exceptionnelle étant la section nulle du fibré \mathbb{E} . Ainsi, le cône \mathbb{C} est obtenu par « contraction » de la section nulle de \mathbb{E} . Dans le cas de notre courbe X_E , l'éclatement $\mathbb{E} \rightarrow \text{Spec}(P_{E,\pi})$ est une « désingularisation » de $\text{Spec}(P_{E,\pi})$ puisque \mathbb{E} est un schéma régulier de dimension 2. Résumons les propriétés de $\text{Spec}(P_{E,\pi})$ que l'on peut déduire des résultats sur la courbe X_E .

Proposition 12.3. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (1) L'anneau $P_{E,\pi}$ n'est pas noethérien, l'idéal d'augmentation $P_{E,\pi}^+$ n'étant pas de type fini.
- (2) Le schéma $\text{Spec}(P_{E,\pi}) \setminus V(P_{E,\pi}^+)$ est noethérien régulier de dimension 2.
- (3) Si $t_1, t_2 \in P_{E,\pi,1}$ sont linéairement indépendants sur E alors $\text{Spec}(P_{E,\pi}) \setminus V(P_{E,\pi}^+) = D(t_1) \cup D(t_2)$. On a alors $P_{E,\pi}^+ = \sqrt{(t_1, t_2)}$.
- (4) L'éclatement du schéma $\text{Spec}(P_{E,\pi})$ le long du sous-schéma fermé $V(P_{E,\pi}^+)$ est noethérien régulier de dimension 2.

12.3. Fibrés de rang supérieur : définitions et premières propriétés. Pour $h \geq 1$ on note $\pi_h : X_{E_h} \rightarrow X_E$.

Définition 12.4. *Soit $h \geq 1$.*

- (1) Pour $d \in \mathbb{Z}$ on note

$$\mathcal{O}_{X_E}(d, h) = \pi_{h*} \mathcal{O}_{X_{E_h}}(d).$$

- (2) Pour $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$ avec $(d, h) = 1$ et $h \geq 1$ on note

$$\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = \mathcal{O}_{X_E}(d, h).$$

Puisque le morphisme π_h est étale fini de degré h , $\mathcal{O}_{X_E}(d, h)$ est un fibré de rang h et de degré d . On a l'égalité de pentes

$$\mu(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)) = \lambda.$$

On a la description suivante en termes de modules gradués. Soit

$$M(d, h) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^{ih+d}}.$$

C'est un $P_E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (B^+)^{\varphi = \pi^i}$ -module gradué. Alors,

$$\mathcal{O}_{X_E}(d, h) = \widetilde{M(d, h)}$$

et

$$M(d, h) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d, h) \otimes \mathcal{O}_{X_E}(i)).$$

Soit $t \in P_{E,\pi,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$. Soit $X_E \setminus \{\infty\} = \text{Spec}(B_e)$ avec $B_e = (B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E = Id}$ et $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E, \infty}$. On a alors

$$\pi_h^{-1}(X_E \setminus \{\infty\}) = \text{Spec}(B_E^+[\frac{1}{t}]^{\varphi_E^h = Id}).$$

En les termes de la classification de la proposition 2.1, le fibré vectoriel $\mathcal{O}_{X_h}(d, r)$ correspond au triplet (M, N, u) où

- M est le B_e -module libre $B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi_E^h = \pi^d}$
- $N = (B_{dR}^+)^h$
- on a

$$\begin{aligned} u : B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi_E^h = \pi^d} \otimes_{B_e} B_{dR} &\xrightarrow{\sim} (B_{dR})^r \\ x \otimes 1 &\longrightarrow (x, \varphi_E(x), \dots, \varphi_E^{(h-1)}(x)). \end{aligned}$$

Puisque $(X_{E_h})_{h \geq 1}$ est une sphère de Riemann généralisée, les résultats de la proposition 4.23 sont disponibles. Nous ne les réécrivons pas. La proposition qui suit est laissée au lecteur, elle ne pose aucun problème.

Proposition 12.5.

- (1) $H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d, h)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^d} & \text{si } d \geq 0 \end{cases}$
- (2) Soit $t \in P_{E, \pi, 1} \setminus \{0\}$, $\{\infty\} = V^+(t)$ et $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E, \infty}$. Alors,

$$H^1(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d, h)) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \geq 0 \\ B_{dR}^+ / (t^d B_{dR}^+ + E_h) & \text{si } d < 0 \end{cases}$$

Définition 12.6. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ nous noterons D_λ l'algèbre à division centrale sur E définie par $D_\lambda = E_h[\Pi]$ si $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d, h) = 1$, avec $\Pi^h = \pi^d$ et pour tout $x \in E_h$, $\Pi x = \sigma_E(x)\Pi$.

Proposition 12.7. Il y a un isomorphisme

$$D_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)).$$

Démonstration. Si $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d, h) = 1$,

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda), \mathcal{O}_{X_E}(\lambda)) = H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_E}(-\lambda) \otimes \mathcal{O}_{X_h}(\lambda)).$$

Or, d'après le point (4) de la proposition 4.23 on a

$$\mathcal{O}_{X_E}(-\lambda) \otimes \mathcal{O}_{X_E}(\lambda) \simeq \mathcal{O}_{X_E}^{\oplus h^2}.$$

On a donc

$$\dim_E \text{End}(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)) = h^2.$$

Il suffit donc de construire un plongement $D_\lambda \hookrightarrow \text{End}(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda))$. Écrivons $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = \widetilde{M}(d, h)$ où $M(d, h) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (B^+)^{\varphi^h = \pi^{ih+d}}$. Bien sûr, $M(d, h)$ est un E_h -espace vectoriel. On vérifie alors que le morphisme

$$\begin{aligned} D_\lambda &\longrightarrow \text{End}_{P_{E, \pi}\text{-mod. gradué}}(M(d, h)) \\ \Pi &\longmapsto \bigoplus_{i \geq 0} \pi^{-i} \varphi_E \end{aligned}$$

induit le plongement cherché. □

12.4. Classification des fibrés : énoncé du théorème.

Théorème 12.8.

- (1) Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, les fibrés semi-stables de pente λ sur X_E sont les fibrés isomorphes à des somme directes finies du fibré $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$.
- (2) Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, il n'y a sur X_E , à isomorphisme près, qu'un seul fibré stable de pente λ , $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$. La catégorie abélienne des fibrés semi-stables de pente λ est équivalente à celle des D_λ^{opp} -espaces vectoriels de dimension finie.
- (3) La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X_E est scindée.
- (4) L'application

$$\begin{aligned} \{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Q}^n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\} &\longrightarrow \{\text{Classes d'isomorphismes de fibrés sur } X_E\} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \left[\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_E}(\lambda_i) \right] \end{aligned}$$

est une bijection.

D'après le théorème 4.26, le théorème précédent pour tout corps E se ramène à prouver le théorème suivant pour tout E .

Théorème 12.9. *Soit une suite exacte de fibrés*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E} \left(-\frac{1}{n} \right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1) \longrightarrow 0.$$

On a alors $H^0(X_E, \mathcal{E}) \neq 0$.

Nous allons donner deux preuves de ce théorème dans la suite.

12.5. Preuve via les espaces de Banach-Colmez.

12.5.1. *Espaces de Banach-Colmez.* Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos. Colmez a construit dans [9] et [10] une catégorie abélienne que nous noterons \mathcal{BC} et qu'il appelle espaces de Banach de dimension finie. Cette catégorie est munie d'un foncteur exact fidèle

$$\begin{aligned} \mathcal{BC} &\longrightarrow \text{Banach} \\ X &\longmapsto X(C) \end{aligned}$$

vers la catégorie des E -espaces de Banach. Notons Vect_C , resp. Vect_E , la catégorie des C -espaces vectoriels, resp. des E -e.v., de dimension finie. Cette catégorie est munie de deux foncteurs pleinement fidèles exacts

$$\begin{aligned} \text{Vect}_C &\longrightarrow \mathcal{BC} \\ W &\longmapsto W^{an} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Vect}_E &\longrightarrow \mathcal{BC} \\ V &\longmapsto V^{\text{ét}} \end{aligned}$$

tels que composés avec le foncteur de \mathcal{BC} vers les espaces de Banach on retrouve les plongements canoniques $\text{Vect}_C \hookrightarrow \text{Banach}$, $\text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow \text{Banach}$. En d'autres termes, on a des identifications canoniques $W^{an}(C) = W$ et $V^{\text{ét}}(C) = V$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{BC}$, il existe $Y \in \mathcal{BC}$ s'écrivant comme une extension

$$0 \longrightarrow V^{\text{ét}} \longrightarrow Y \longrightarrow W^{an} \longrightarrow 0$$

et un sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie $V' \subset Y(C)$ tel que $X \simeq Y/V'^{\text{ét}}$. Colmez a alors démontré qu'il existe deux fonctions additives

$$\begin{cases} \dim : \mathcal{BC} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \text{ht} : \mathcal{BC} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{cases}$$

caractérisées par les propriétés

$$\dim W^{an} = \dim_C W, \quad \dim V^{\text{ét}} = 0$$

et

$$\text{ht } W^{an} = 0, \quad \text{ht } V^{\text{ét}} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

On a de plus que $\text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} = \{X \in \mathcal{BC} \mid \dim X = 0\}$.

En fait, le plongement $\text{Vect}_C \hookrightarrow \mathcal{BC}$ s'étend en un plongement de la catégorie des B_{dR}^+ -modules de longueur finie dans \mathcal{BC} , Vect_C s'identifiant aux B_{dR}^+ -modules de longueur finie annulés par t .

Pour $d, h \in \mathbb{N}$, il y a un espace de Banach-Colmez $X(d, h) \in \mathcal{BC}$ tel que

$$X(d, h)(C) = (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi_E^d}.$$

Il est de dimension d et de hauteur h . Du point de vue de Colmez, les espaces de Banach-Colmez sont des foncteurs de la catégorie des C -algèbres sympatiques vers les E -espaces de Banach. Cependant dans [38], Plût développe une théorie des espaces de Banach-Colmez équivalente à celle de Colmez dans laquelle certains de ces espaces (ceux qui sont extension d'un C -espace vectoriel de dimension finie par un E -espace vectoriel de dimension finie) possèdent un faisceau structural. Plus précisément, ce sont des E -espace vectoriel spectraux au sens de la section 8.2. De ce point de vue, lorsque $d \neq 0$, l'espace de Banach-Colmez $X(d, h)$ précédent n'est alors rien d'autre que le E -espace vectoriel spectral $\tilde{X}(\mathcal{G}_{d,h})^{an} \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}(k)_{\mathbb{Q}}}} C$ défini dans la section 8.3 où $\mathcal{G}_{d,h}$ est le \mathcal{O} -module

formel défini dans la section 7.3.2. Le choix d'un relèvement $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}_{d,h}$ à \mathcal{O}_C satisfaisant l'hypothèse de la section 8.3 (l'existence d'une quasi-isogénie ρ , cf. 8.3) induit un isomorphisme de E -espaces vectoriels spectraux

$$\tilde{X}(\mathcal{G}_{d,h})^{an} \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}} C \simeq X(\tilde{\mathcal{G}}^{rig})$$

et une présentation comme extension (cf. section 8.4.2)

$$0 \longrightarrow V_{\pi}(\tilde{\mathcal{G}})^{\acute{e}t} \longrightarrow X(\tilde{\mathcal{G}}^{rig}) \longrightarrow \text{Lie } \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

12.5.2. *Preuve du théorème 12.9.* Voyons maintenant comment démontrer le théorème 12.9 en utilisant les espaces de Banach-Colmez. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(-\frac{1}{n}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1) \longrightarrow 0$$

une suite exacte. La classe de l'extension précédente vit dans

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X_E}(-1 - \frac{1}{n})) = H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n - 1)).$$

Soit $\xi \in H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n - 1))$ cette classe. Il s'agit alors de vérifier que le noyau du morphisme composé

$$H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(1)) \xrightarrow{\pi_n^*} H^0(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(n)) \xrightarrow{-\cup \xi} H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-1))$$

est non nul où $\pi_n : X_{E_n} \rightarrow X_E$. Soit $t \in P_{E, \pi_E, 1} \setminus \{0\}$, $\{\infty\} = V^+(t)$, $B_{dR}^+ = \hat{\mathcal{O}}_{X_E, \infty}$. Il y a des identifications

$$\begin{cases} H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E} \\ H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-1)) = C/E_n \\ H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n - 1)) = B_{dR}^+ / (t^{n+1} B_{dR}^+ + E_n). \end{cases}$$

Soit $x \in B_{dR}^+ / t^{n+1} B_{dR}^+$ induisant ξ lorsqu'on le réduit modulo E_n . Le morphisme précédent s'identifie alors au morphisme composé

$$(B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E} \hookrightarrow (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E^n} \hookrightarrow B_{dR}^+ / t^{n+1} B_{dR}^+ \xrightarrow{\times x} B_{dR}^+ / t^{n+1} B_{dR}^+ \longrightarrow \underbrace{(B_{dR}^+ / t^{n+1} B_{dR}^+) / (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E^n}}_{\simeq C/E_n}.$$

Il s'agit donc d'un morphisme d'espaces de Banach induit par un morphisme d'espaces Banach-Colmez

$$u : X(1, 1) \longrightarrow C^{an} / E_n^{\acute{e}t}.$$

Si u était injectif, puisque $\dim X(1, 1) = \dim C^{an} / E_n^{\acute{e}t} = 1$, on aurait

$$\dim \text{coker}(u) = 0$$

et donc $\text{coker } u \in \text{Vect}_E$. Or, $\text{Hom}(C^{an}, E^{\acute{e}t}) = 0$, et l'épimorphisme composé

$$C^{an} \twoheadrightarrow C^{an} / E^{\acute{e}t} \twoheadrightarrow \text{coker}(u)$$

serait donc nul. Cela impliquerait que $\text{coker}(u) = 0$ et donc, u serait un isomorphisme. Puisque $\text{ht } X(1, 1) = 1$ et $\text{ht } C/E_n = -n$, cela est impossible si $n > 1$. Si $n = 1$, il faut utiliser le fait que $\text{Hom}(C^{an}, X(1, 1)) = 0$ pour conclure que l'on n'a pas $X(1, 1) \simeq C^{an} / E^{\acute{e}t}$.

12.6. Preuve via les périodes des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld.

12.6.1. Deux résultats sur les modifications de fibrés.

Théorème 12.10.

- (1) Soit \mathcal{E} un sous- \mathcal{O}_{X_E} -module localement libre de $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})$ tel que le quotient $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})/\mathcal{E}$ soit un faisceau cohérent de torsion de degré 1. Alors, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_E}^n$.
- (2) Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent de torsion de degré 1 et \mathcal{E} un \mathcal{O}_{X_E} -module localement libre qui est une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Il existe alors r vérifiant $1 \leq r \leq n$ tel que

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{r}) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^{n-r}.$$

Remarque 12.11. *Nous allons utiliser le théorème 12.10 précédent afin de démontrer le théorème 12.9 qui entraîne lui-même le théorème 12.8 de classification des fibrés. Réciproquement, il est très facile de vérifier que le théorème 12.8 de classification des fibrés entraîne le théorème 12.10. Ce théorème 12.10 semble donc incontournable si l'on veut classifier les fibrés.*

Avant d'attaquer la preuve du théorème 12.10 commençons par quelques résultats préliminaires.

Lemme 12.12. *Soit $n \geq 1$ et $x \in |X_E|$. Notons $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$. Soit $D = D_{1/n} = \text{End}(\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}))$ (cf. def. 12.6 et prop. 12.7). Le $k(x)$ -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_E}}(\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}), i_{x*}k(x))$ est de dimension n . De plus, il existe $\theta : \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \rightarrow i_{x*}k(x)$ tel que*

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_E}}(\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}), i_{x*}k(x)) = \langle \theta, \theta \circ \Pi, \dots, \theta \circ \Pi^{n-1} \rangle.$$

Lemme 12.13. *Soit $x \in |X_E|$ et $t \in P_{E, \pi_E, 1} = H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(1))$ tel que $V^+(t) = \{x\}$.*

(1) *Si $W \in \text{Vect}_{k(x)}$ et $V \in \text{Vect}_E$, il y a un isomorphisme naturel en W et V de $k(x)$ -espaces vectoriels*

$$\text{Hom}_{k(x)}(W, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} k(x)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_E}}^1(i_{x*}W, V \otimes_E \mathcal{O}_X).$$

(2) *L'extension (ξ)*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E} \xrightarrow{\times t} \mathcal{O}_{X_E}(1) \xrightarrow{\theta} i_{x*}k(x) \longrightarrow 0$$

est universelle au sens où pour toute extension de $i_{x}W$ par $V \otimes_E \mathcal{O}_{X_E}$, il existe un unique morphisme $k(x)$ -linéaire $u : W \rightarrow V \otimes_E k(x)$ tel que l'extension soit obtenue par image réciproque de l'extension $(\xi) \otimes_E V$ via $i_{x*}u$.*

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow i_{x*}k(x) \longrightarrow 0$$

une extension. Puisque \mathcal{O}_{X_E} est sans torsion, $\mathcal{E}_{\text{tor}} \hookrightarrow i_{x*}k(x)$. On en déduit que si l'extension n'est pas scindée alors \mathcal{E} est un \mathcal{O}_{X_E} -module localement libre. Si c'est le cas, \mathcal{E} est un fibré en droites de rang 1 et de degré 1 et donc $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_E}(1)$. Fixons un tel isomorphisme $\mathcal{O}_{X_E}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. On en conclut facilement que la classe de l'extension précédente est un $k(x)$ -multiple de la classe de (ξ) . Le lemme s'en déduit sans difficulté. \square

démonstration du point (1) : Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})$ tel que $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})/\mathcal{E} \simeq i_{x*}k(x)$ pour un $x \in |X|$. Notons $C = k(x)$ et fixons un isomorphisme $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})/\mathcal{E} \simeq i_{x*}k(x)$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in C$ tels que le morphisme $u : \mathcal{O}_X(\frac{1}{n}) \rightarrow i_{x*}k(x)$ soit donné par

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \theta \circ \Pi^i$$

comme dans le lemme 12.12. Puisque ce morphisme est un épimorphisme, les $(\lambda_i)_i$ ne sont pas tous nuls. Le morphisme induit au niveau des sections globales est le morphisme

$$(B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E} \xrightarrow{\sum_i \lambda_i \theta \circ \varphi^i} C.$$

D'après le théorème 11.2, ce morphisme est surjectif de noyau un E -espace vectoriel de dimension n , V , tel que

$$\begin{aligned} V \otimes_E B_E^+ &\longrightarrow (B_E^+)^n \\ x \otimes 1 &\longmapsto (x, \varphi_E(x), \dots, \varphi_E^{n-1}(x)) \end{aligned}$$

soit injectif de conoyau annulé par t , où $\{x\} = V^+(t)$ avec $t \in P_{E, \pi_E, 1}$. Il y a donc un morphisme

$$\mathcal{O}_{X_E} \otimes_E V \longrightarrow \ker(u)$$

qui est un isomorphisme sur l'ouvert $X \setminus \{x\}$. Puisque $\mathcal{O}_{X_E} \otimes_E V$ et $\ker(u)$ ont même rang et degré c'est un isomorphisme. \square

démonstration du point (2) :

Soit $x \in |X_E|$ tel que $\mathcal{F} \simeq i_{x*}k(x)$. Notons $C = k(x)$. D'après le lemme 12.13 il existe un morphisme $u : C \rightarrow C^n$ tel que l'on ait un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_E}^n & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & i_{x*}C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow i_{x*}u \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_E}^n & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_E}(1)^n & \longrightarrow & i_{x*}C^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

via lequel

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_E}(1)^n \times_{i_{x*}C^n} i_{x*}C.$$

Bien sûr, si $u = 0$, $\mathcal{E} \simeq i_{x*}C \oplus \mathcal{O}_{X_E}^n$. On a donc $u \neq 0$. Notons $u(1) = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in C^n$.

Supposons d'abord que $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont linéairement indépendant sur E . D'après le théorème 11.5 on peut alors trouver

$$x_0, \dots, x_{n-1} \in H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}))$$

tels que :

- Si $\theta : \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \rightarrow i_{x*}C$ est comme dans le lemme 12.12 alors pour tout j tel que $0 \leq j \leq n-1$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta(\Pi^j(x_i)) = 0.$$

- Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} D \otimes_E \mathcal{O}_{X_E} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \\ d \otimes s & \longmapsto & (sd.x_0, \dots, sd.x_{n-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme en fibre générique.

Remarquons que puisque u est injectif, le morphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1)^n$ est un monomorphisme de \mathcal{O}_{X_E} -modules. Définissons un morphisme

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{O}_{X_E}(1)^n & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_E}(1 + \frac{1}{n}) \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i. \end{array}$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1) \longrightarrow i_{x*}C \longrightarrow 0$$

tensorisée par $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})$ fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\alpha} i_{x*}C^n \longrightarrow 0.$$

Si on note $\theta' : \mathcal{O}_{X_E}(1) \rightarrow i_{x*}C$, le composé

$$\mathcal{O}_{X_E}(1)^n \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{X_E}(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\alpha} i_{x*}C^n$$

est le morphisme

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \longmapsto \left(\sum_{i=0}^{n-1} \theta'(a_i) \theta(\Pi^j x_i) \right)_{0 \leq j \leq n-1}.$$

Il s'en suit que le composé

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1)^n \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{X_E}(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{\alpha} i_{x*}C^n$$

est nul et définit donc un morphisme

$$\beta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}).$$

En restriction à $\mathcal{O}_{X_E}^n \subset \mathcal{E}$ ce morphisme β est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_E}^n &\longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i. \end{aligned}$$

Montrons que ce dernier morphisme est un isomorphisme au point générique. Soit $t \in P_{E,\pi,1}$ tel que $V^+(t) = \{x\}$. Notons

$$\begin{aligned} B_{e,E} &= (B_E^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E = Id} = \Gamma(X_E \setminus \{x\}, \mathcal{O}_{X_E}) \\ B_{e,E_n} &= (B_E^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E^n = Id} = \Gamma(X_{E_n} \setminus \pi_{E,E_n}^{-1}(x), \mathcal{O}_{X_{E_n}}) = B_{e,E} \otimes_E E_n \end{aligned}$$

où $\pi_{E,E_n} : X_{E_n} \rightarrow X_E$. On a

$$x_0, \dots, x_{n-1} \in (B_E^+)^{\varphi_E^n = \pi}.$$

Soit

$$M = H^0(X \setminus \{x\}, \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})) = (B_E^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E^n = \pi},$$

un B_{e,E_n} -module libre de rang 1. Soit

$$y = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in M^n.$$

Puisque le morphisme

$$\begin{aligned} D \otimes_E \mathcal{O}_{X_E} &\longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}) \\ d \otimes s &\longmapsto (sd.x_0, \dots, sd.x_{n-1}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme en fibre générique,

$$(y, \varphi(y), \dots, \varphi^{n-1}(y))$$

est une base de $M^n \otimes_{B_{e,E_n}} \text{Frac}(B_{e,E_n})$. Soit $t_n \in (B_E^+)^{\varphi_E^n = \pi}$ tel que

$$\prod_{i=0}^{n-1} \varphi^i(t_n) \in E^\times.t.$$

Alors, t_n est une base de M comme B_{e,E_n} -module et $(t_n, \varphi(t_n), \dots, \varphi^{n-1}(t_n))$ en est une en tant que $B_{e,E}$ -module. Puisque $(\varphi^j(y))_{0 \leq j \leq n-1}$ est une base générique de M^n , on a

$$\det \left(\frac{\varphi^j(x_i)}{t_n} \right)_{0 \leq i,j \leq n-1} \neq 0 \text{ dans } B_{e,E_n}.$$

Maintenant, si $x_i = \sum_j a_{ij} \varphi^j(t_n)$ avec $a_{ij} \in B_{e,E}$, on a une égalité matricielle

$$\left(\frac{\varphi^j(x_i)}{t_n} \right)_{i,j} = (a_{ij})_{i,j} \cdot \left(\frac{\varphi^{i+j}(t_n)}{t_n} \right)_{i,j}.$$

On a donc $\det(a_{ij})_{i,j} \neq 0$ ce qui signifie que (x_0, \dots, x_{n-1}) est une base générique du $B_{e,E}$ -module M .

Le morphisme $\beta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n})$ est donc un isomorphisme générique. Puisque $\deg(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{n}))$, c'est un isomorphisme. Cela conclut le cas où $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur E .

Passons maintenant au cas général. Soit

$$V = \{\psi \in (E^n)^* \mid \psi_C \circ u = 0\}^\perp \subset E^n$$

où si $\psi \in (E^n)^*$, $\psi : E^n \rightarrow E$, on note $\psi_C = \psi \otimes Id : C^n \rightarrow C$. Soit W un supplémentaire de V dans E^n ,

$$E^n = V \oplus W.$$

Notons $r = \dim_E V$. Puisque $u \neq 0$, $r > 0$. Notons

$$\begin{aligned} u_1 : C &\xrightarrow{u} C^n = V_C \oplus W_C \xrightarrow{\text{proj}} V_C \\ u_2 : C &\xrightarrow{u} C^n = V_C \oplus W_C \xrightarrow{\text{proj}} W_C. \end{aligned}$$

On a alors $u_2 = 0$ et pour tout $\psi \in V^* \setminus \{0\}$, $\psi_C \circ u_1 \neq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_E}}^1(i_{x*}C, \mathcal{O}_{X_E}^n) &= \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_E}}^1(i_{x*}C, V \otimes_E \mathcal{O}_{X_E}) \oplus \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X_E}}^1(i_{x*}C, W \otimes_E \mathcal{O}_{X_E}) \\ &= \text{Hom}_C(C, V_C) \oplus \text{Hom}_C(C, W_C). \end{aligned}$$

Ainsi, l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow i_{x*}C \longrightarrow 0$$

est la somme de Baer des extensions associées à u_1 et u_2 . L'extension associée à u_1 vérifie les hypothèses précédentes (le cas $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ linéairement indépendants) et celle associée à u_2 est triviale. On en déduit que pour un morphisme $\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{r}) \rightarrow i_{x*}C$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\simeq \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{r}) \times_{i_{x*}C} (\mathcal{O}_{X_E}^{n-r} \oplus i_{x*}C) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{r}) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^{n-r}. \end{aligned}$$

□

12.6.2. Fibrés élémentaires.

Définition 12.14. *Un fibré élémentaire est un fibré \mathcal{E} non nul possédant une résolution de la forme*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

pour un entier $d \geq 1$ et des $h_i \geq 1$.

Théorème 12.15. *Soit \mathcal{E} un fibré élémentaire, $x \in |X_E|$, et*

$$u : \mathcal{E} \longrightarrow i_{x*}k(x)$$

un épimorphisme de \mathcal{O}_{X_E} -modules. Alors,

- (1) Si $\deg(\mathcal{E}) = 1$, $H^0(X_E, \ker u) \neq 0$.
- (2) Si $\deg(\mathcal{E}) > 1$, il existe un fibré élémentaire \mathcal{E}' de degré $\deg(\mathcal{E}) - 1$ et un monomorphisme de \mathcal{O}_{X_E} -modules

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \ker(u).$$

Démonstration. Si $\deg(\mathcal{E}) = 1$, \mathcal{E} possède une résolution de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{h}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathcal{E} \neq 0$, $\text{rg}(\mathcal{E}) > 0$ et donc $n < h$. D'après le point (1) du théorème 12.10, le noyau du morphisme composé

$$\mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{h}) \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} i_{x*}k(x)$$

est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_E}^h$. Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^h \longrightarrow \ker(u) \longrightarrow 0.$$

Puisque $H^1(X_E, \mathcal{O}_{X_E}) = 0$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow \mathbb{Q}_p^h \longrightarrow H^0(X_E, \ker u) \longrightarrow 0,$$

d'où $H^0(X_E, \ker u) \neq 0$ puisque $n < h$.

Supposons maintenant $\deg(\mathcal{E}) > 1$. Soit une résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{X_E}(\frac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

et notons

$$v : \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h_i} \right) \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} i_{x*} k(x)$$

le morphisme composé. Il s'écrit sous la forme $v = \sum_{i=1}^d v_i$ où

$$v_i : \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h_i} \right) \longrightarrow i_{x*} k(x).$$

Soit $I \subset \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des i tels que $v_i \neq 0$. Soit $W \subset k(x)^I$ le noyau de l'application linéaire somme

$$\begin{aligned} k(x)^I &\longrightarrow k(x) \\ (x_i)_{i \in I} &\longmapsto \sum_i x_i. \end{aligned}$$

Soit $W = \bigoplus_{j \in J} D_j$ une décomposition en somme de droites. Considérons le morphisme

$$\alpha = \bigoplus_{i \in I} v_i : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h_i} \right) \longrightarrow i_{x*} k(x)^I.$$

D'après le point (1) du théorème 12.10, $\ker(\alpha)$ est un fibré trivial. Il y a de plus une extension pour tout $j \in J$

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow \alpha^{-1}(i_{x*} D_j) \longrightarrow i_{x*} D_j \longrightarrow 0.$$

Le point (2) du théorème 12.10 nous dit alors que pour $j \in J$,

$$\alpha^{-1}(i_{x*} D_j) \simeq \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{a_j} \right) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^{b_j}$$

pour des entiers a_j, b_j vérifiant $b_j \geq 0$ et $a_j \geq 1$. Il y a donc un épimorphisme de \mathcal{O}_{X_E} -modules

$$\bigoplus_{i \notin I} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h_i} \right) \oplus \bigoplus_{j \in J} \left(\mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{a_j} \right) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^{b_j} \right) \longrightarrow \ker(v)$$

de noyau un fibré trivial.

On en déduit l'existence d'une résolution de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^r \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h'_i} \right) \right) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^s \longrightarrow \ker v \longrightarrow 0.$$

De plus, $\mathcal{O}_{X_E}^n \subset \ker v$ et son image réciproque dans le terme du milieu de la suite exacte précédente est une extension de $\mathcal{O}_{X_E}^n$ par $\mathcal{O}_{X_E}^r$. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_{X_E}) = 0$ c'est donc un fibré trivial isomorphe à $\mathcal{O}_{X_E}^m$ pour un entier m . Au final on a une résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}^m \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h'_i} \right) \right) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^s \longrightarrow \ker u \longrightarrow 0.$$

Le noyau du morphisme composé

$$\mathcal{O}_{X_E}^m \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h'_i} \right) \right) \oplus \mathcal{O}_{X_E}^s \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{O}_{X_E}^s$$

est un fibré trivial, isomorphe $\mathcal{O}_{X_E}^e$ pour un entier e . Si l'on pose

$$\mathcal{E}' = \left(\bigoplus_{i=1}^{d-1} \mathcal{O}_{X_E} \left(\frac{1}{h'_i} \right) \right) / \mathcal{O}_{X_E}^e$$

c'est un fibré élémentaire muni d'un monomorphisme de \mathcal{O}_{X_E} -modules vers $\ker u$. \square

12.6.3. *Preuve du théorème 12.9.* Soit $n \geq 1$ et une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0.$$

Il y a un plongement $\mathcal{O}_{X_E}\left(-\frac{1}{n}\right) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1)^n$ de conoyau un faisceau cohérent de torsion \mathcal{F} de degré $n + 1$. Puisque $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{X_E}(1), \mathcal{O}_{X_E}(1)^n) = 0$, on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Il suffit maintenant de remarquer que $\mathcal{O}_{X_E}(1)^{n+1}$ est un fibré élémentaire et de dévisser \mathcal{F} par une extension successive itérée $(n + 1)$ -fois de faisceaux gratte-ciel de la forme $i_{x*}k(x)$ avec $x \in |X_E|$. En appliquant le théorème 12.15, on conclut. \square

13. φ -MODULES ET FIBRÉS

13.1. φ -modules.

13.1.1. *Définitions.* Rappelons que l'on note

$$\overline{B}_E = B_E^{b,+}/\mathfrak{p}$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \{x \in B_E^{b,+} \mid v_0(x) > 0\} \\ &= \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi_E^n \in B_E^{b,+} \mid \exists \epsilon > 0, \forall n \ v(x_n) \geq \epsilon \right\}. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \ker(B_E^{b,+} \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}) \\ &= \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi_E^n \in B_E^{b,+} \mid \forall n \ v(x_n) > 0 \right\} \end{aligned}$$

et $\mathfrak{m}_{\overline{B}_E} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. L'anneau \overline{B}_E est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\overline{B}_E}$ et de corps résiduel $W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}$. Rappelons également que le morphisme naturel induit par l'inclusion $B_E^{b,+} \subset B_E^+$

$$\overline{B}_E \longrightarrow B_E^+/\{x \in B_E^+ \mid v_0(x) > 0\}$$

est un isomorphisme. Dans cette section on notera

$$L_E := W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}.$$

Définition 13.1. Pour $A \in \{L_E, B_E^+, \overline{B}_E\}$ on note

$$\varphi\text{-mod}_A$$

la catégorie formée des couples (M, φ) où M est un A -module libre de rang fini et $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ un isomorphisme φ_E -linéaire.

Bien sûr, la catégorie $\varphi\text{-Mod}_{L_E}$ est la catégorie Tannakienne des k -isocristaux relatifs à E . Cette catégorie abélienne est semi-simple, complètement décrite par le théorème de Dieudonné-Manin. Pour $A \in \{L_E, B_E^+, \overline{B}_E\}$, la catégorie $\varphi\text{-Mod}_A$ est tensorielle symétrique E -linéaire, munie d'un objet unité $\mathbb{1}_A = (A, \varphi_E)$, de duaux et de Hom internes. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} (M_1, \varphi_1) \otimes (M_2, \varphi_2) &= (M_1 \otimes_A M_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2) \\ \text{Hom}((M_1, \varphi_1), (M_2, \varphi_2)) &= (\text{Hom}_A(M_1, M_2), \psi) \end{aligned}$$

où $\psi(f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$. Le dual de $X \in \varphi\text{-Mod}_A$ est alors

$$\check{X} := \text{Hom}(X, \mathbb{1}_A).$$

On dispose de la formule usuelle

$$\check{X}_1 \otimes X_2 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X_1, X_2).$$

Pour $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_A$ posons

$$H^0(X) := \text{Hom}(\mathbb{1}_A, X) = M^{\varphi=Id}$$

et

$$H^1(X) := \text{Ext}^1(\mathbb{1}_A, X) = \text{coker}(M \xrightarrow{Id-\varphi} M)$$

où les extensions sont prises au sens de Yoneda. On a alors

$$\text{Hom}(X_1, X_2) = H^0(\mathcal{H}om(X_1, X_2)).$$

La catégorie $\varphi\text{-Mod}_A$ est naturellement une catégorie exacte dans laquelle tout suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$$

donne naissance à une suite exacte longue de E -espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow H^0(X_1) \longrightarrow H^0(X_2) \longrightarrow H^0(X_3) \longrightarrow H^1(X_1) \longrightarrow H^1(X_2) \longrightarrow H^1(X_3) \longrightarrow 0.$$

Fixons une uniformisante π_E de E . On a alors des objets « à la Tate » dans $\varphi\text{-Mod}_A$, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$A(n) := (A, \pi_E^n \varphi_E)$$

et des torsions à la Tate, si $X = (M, \varphi)$

$$X(n) := X \otimes A(n) = (M, \pi_E^n \varphi).$$

On a bien sûr $A(n) = A(1)^{\otimes n}$ et $A(0) = \mathbb{1}_A$.

13.1.2. *Module gradué associé à un φ -module.* Il y a un morphisme de E -espaces vectoriels pour deux φ -modules X et Y

$$H^0(X) \otimes_E H^0(Y) \longrightarrow H^0(X \otimes Y).$$

On peut ainsi former la E -algèbre graduée

$$\bigoplus_{d \geq 0} H^0(B_E^+(-d))$$

qui n'est rien d'autre que P_{E, π_E} . D'après la proposition 7.3 on obtient la même algèbre en remplaçant B_E^+ par \overline{B}_E : via l'application de réduction $B_E^+ \rightarrow \overline{B}_E$ on a

$$P_{E, \pi_E} = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(B_E^+(-d)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} H^0(\overline{B}_E(-d)).$$

De plus, si $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ alors

$$\Gamma_\bullet(X) = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma_d(X) := \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X(-d)) = \bigoplus_{d \geq 0} M^{\varphi = \pi_E^d}$$

est un P_{E, π_E} -module gradué via $H^0(B_E^+(-d)) \otimes H^0(X(-d')) \rightarrow H^0(X(-d+d'))$. Cela définit un foncteur

$$\Gamma_\bullet : \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow P_{E, \pi_E}\text{-modules gradués.}$$

13.1.3. *Changement de corps E .* Soit $E'|E$ une extension de degré fini. On suppose les corps résiduels de E et E' , k_E et $k_{E'}$, plongés dans le corps algébriquement clos k . Pour $A \in \{L, B^+, \overline{B}\}$ notons

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'$$

la catégorie formée des couples (X, ι) où $X \in \varphi\text{-Mod}_{A_E}$ et $\iota : E' \rightarrow \text{End}(X)$ est un morphisme de E -algèbres. L'extension $W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}}|E$ est l'extension maximale non-ramifiée de E dans E' . Si $(M, \varphi, \iota) \in \varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'$ on a une décomposition

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/f_{E'/E}\mathbb{Z}} M_i$$

où

$$M_i = \{x \in M \mid \forall a \in W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}}, \iota(a)(x) = \varphi_E^i(a)x\}.$$

Alors,

$$\varphi : M_i \xrightarrow{\sim} M_{i+1},$$

M_0 est un $A_E \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}}} E' = A_{E'}$ -module libre et

$$(M_0, \varphi^{f_{E'/E}}) \in \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

Cela définit un foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

Soit maintenant $(M', \varphi') \in \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}$. Posons

$$M = \bigoplus_{i=0}^{f_{E'/E}-1} M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^i} A_{E'}.$$

Pour $0 \leq i \leq f_{E'/E} - 1$ posons

$$\begin{aligned} \psi_i : M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^i} A_{E'} &\longrightarrow M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^{i+1}} A_{E'} \\ m \otimes x &\longmapsto \begin{cases} m \otimes \varphi_E(x) & \text{si } i < f_{E'/E} - 1 \\ \varphi'(m) \otimes \varphi_E(x) & \text{si } i = f_{E'/E} - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors,

$$(M, \bigoplus_{i=0}^{f_{E'/E}-1} \psi_i) \in \varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'.$$

On vérifie que les deux foncteurs précédents sont adjoints et induisent des équivalences inverses de catégories

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

On dispose maintenant d'un couple de foncteurs adjoints

$$\varphi\text{-Mod}_{A_{E'}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{E'/E^*}} \\ \xleftarrow{\pi_{E'/E}^*} \end{array} \varphi\text{-Mod}_{A_E}$$

qui est donné via l'équivalence $\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \simeq \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}$ par les formules

$$\begin{aligned} \pi_{E'/E^*}(X, \iota) &= X \\ \pi_{E'/E}^*(Y) &= Y \otimes_E E', \end{aligned}$$

l'action de E' sur $Y \otimes_E E'$ étant l'action canonique. En termes de φ -modules,

$$\pi_{E'/E}^*(M, \varphi) = (M \otimes_{A_E} A_{E'}, \varphi^{f_{E'/E}} \otimes \varphi_{E'}).$$

13.1.4. *Les φ -modules $A(\lambda)$.* Soit toujours $A \in \{L, B^+, \overline{B}\}$. Fixons une uniformisante π_E de E . Pour $h \geq 1$ notons $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}^{\varphi_E^h = \text{Id}}$ l'extension non-ramifiée de degré h de E que l'on munit également de l'uniformisante π_E .

Définition 13.2. Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $h \geq 1$, $d \in \mathbb{Z}$ et $(d, h) = 1$. On pose

$$A_E(\lambda) = \pi_{E_h/E^*}(A_{E_h}(d)) \in \varphi\text{-Mod}_{A_E}.$$

Le théorème de Dieudonné-Manin affirme que la catégorie abélienne $\varphi\text{-Mod}_{L_E}$ est semi-simple d'objets simples les $L_E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Via les foncteurs d'extension des scalaires

$$\varphi\text{-Mod}_{L_E} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E},$$

le φ -module $L_E(\lambda)$ s'envoie sur $B_E^+(\lambda)$ et $\overline{B}_E(\lambda)$.

13.2. **Classification des φ -modules.** La proposition qui suit généralise la proposition 7.3.

Proposition 13.3. *Le foncteur de réduction*

$$\varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E}$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. L'existence de Hom internes et la formule

$$\text{Hom}(X, Y) = H^0(\mathcal{H}\text{om}(X, Y))$$

dans les catégories $\varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ et $\varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E}$ montrent que la proposition est équivalente à ce que si $X \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ et $\overline{X} = X \otimes_{B_E^+} \overline{B}_E$ alors

$$H^0(X) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}).$$

Soit donc $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$. Fixons une base (e_1, \dots, e_n) de M et soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(B_E^+)$ la matrice de φ dans cette base, $\varphi(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j$. Pour $r \geq 0$ définissons une norme additive sur M en posant

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_r : M &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \sum_{i=1}^n x_i e_i &\longmapsto \inf_{1 \leq i \leq n} \{v_r(x_i)\}. \end{aligned}$$

Par norme additive on entend les propriétés

$$\begin{cases} \|m\|_r = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda m\|_r = v_r(\lambda) + \|m\|_r \\ \|m_1 + m_2\|_r \geq \inf\{\|m_1\|_r, \|m_2\|_r\}. \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- M est complet pour la famille de normes additives $(\|\cdot\|_r)_{r>0}$,
- $\|\cdot\|_0 : M \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,
- $\|m\|_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \|m\|_r$.

Si

$$\Lambda = \{m \in M \mid \|m\|_0 > 0\},$$

un sous B_E^+ -module stable sous l'action de φ , on a alors

$$M \otimes_{B_E^+} \overline{B}_E = M/\Lambda.$$

Pour montrer que $H^0(M) \xrightarrow{\sim} H^0(M/\Lambda)$ il suffit donc de démontrer que

$$\text{Id} - \varphi : \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

est un isomorphisme.

Pour $r \geq 0$ posons

$$\|A\|_r = \inf_{1 \leq i, j \leq n} v_r(a_{i,j}) \in \mathbb{R}.$$

Puisque pour tout $x \in B_E^+$ on a $v_r(\varphi_E(x)) = qv_{\frac{r}{q}}(x)$ où q est le cardinal du corps résiduel de E , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\varphi(m)\|_r \geq q\|m\|_{\frac{r}{q}} + \|A\|_r.$$

On en déduit par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$

$$\|\varphi^k(m)\|_r \geq q^k \|m\|_{\frac{r}{q^k}} + \sum_{i=0}^{k-1} q^i \|A\|_{\frac{r}{q^i}}.$$

Lorsque $r = 0$ cette formule donne

$$\|\varphi^k(m)\|_0 \geq q^k \|m\|_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} q^i \right) \|A\|_0$$

où $\|A\|_0 \geq 0$. Ainsi, si $m \in \Lambda$ vérifie $\varphi(m) = m$, de l'inégalité précédente on déduit que $\|m\|_0 = +\infty$ et donc $m = 0$. L'application $\text{Id} - \varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ est donc injective.

Soit maintenant $r > 0$ et $m \in \Lambda$. D'après la preuve du lemme 5.27, il existe $r_0 > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que pour $0 \leq r' \leq r_0$ on ait $\|A\|_{r'} \geq -\alpha r'$. Il existe donc des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{i=0}^{k-1} q^i \|A\|_{\frac{r}{q^i}} \geq Ak + B.$$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|m\|_{\frac{r}{q^k}} = \|m\|_0 > 0$ on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi^k(m)\|_r = +\infty.$$

Cela étant vrai pour tout $r > 0$, M étant complet pour $(\|\cdot\|_r)_{r>0}$, on en déduit que $Id - \varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ possède un inverse donné par

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ m &\longmapsto \sum_{k \geq 0} \varphi^k(m). \end{aligned}$$

□

Lemme 13.4. *Soit M un $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ -module libre de rang fini muni d'un endomorphisme φ_E -linéaire $\varphi : M \rightarrow M$. Soit $M_k := M \otimes W_{\mathcal{O}_E}(k)$. Alors,*

$$M^{\varphi=Id} \xrightarrow{\sim} M_k^{\varphi=Id}$$

et $M^{\varphi=Id} \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k)} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est un sous- φ -module de M facteur direct.

Démonstration. Fixons une base de M , ce qui permet de l'identifier à $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^n$. Pour montrer la première assertion il suffit de vérifier que

$$Id - \varphi : W(\mathfrak{m}_F)^n \longrightarrow W(\mathfrak{m}_F)^n$$

est bijectif. Munissons $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^n$ de la topologie produit de la topologie faible sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Si l'on pose pour $r > 0$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_r = \inf\{v_r(x_1), \dots, v_r(x_n)\}$ il s'agit alors de la topologie déduite de la famille de normes additives $(\|\cdot\|_r)_{r>0}$. C'est également la topologie $([a], \pi)$ -adique sur M pour un $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ vérifiant $v(a) > 0$. Pour cette topologie, M est complet. On vérifie facilement que pour tout $m \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)^n$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^k(m) = 0.$$

Ainsi, $(Id - \varphi)|_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)^n}$ possède comme inverse l'application $m \mapsto \sum_{k \geq 0} \varphi^k(m)$. On a donc $M^{\varphi=Id} \xrightarrow{\sim} M_k^{\varphi=Id}$.

Le noyau de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \rightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est contenu dans le radical de Jacobson de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On peut donc appliquer le lemme de Nakayama pour conclure que puisque $M_k^{\varphi=Id}$ est facteur direct dans M_k , $M^{\varphi=Id} \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k)} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est facteur direct dans M . □

Lemme 13.5. *Soient $X, Y \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E}$. On a alors*

$$\text{Ext}^1(X, Y) \simeq H^1(\tilde{X} \otimes Y).$$

Lemme 13.6. *Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ on a*

$$\text{Ext}^1(\overline{B}_E(\lambda), \overline{B}_E(\mu)) = 0.$$

Démonstration. On a $\overline{B}_E(\lambda)^\vee = \overline{B}_E(-\lambda)$. De plus, $\overline{B}_E(-\lambda) \otimes \overline{B}_E(\mu)$ est une somme directe de φ -modules isomorphes à $\overline{B}(\mu - \lambda)$. Il suffit donc de montrer que pour tout $\nu \in \mathbb{Q}$, $H^1(\overline{B}_E(\nu)) = 0$. Si $\nu = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$, $h \geq 1$ et $d \in \mathbb{Z}$ alors

$$H^1(\overline{B}_E(\frac{d}{h})) = H^1(\overline{B}_{E_h}(d)) = \text{coker}(\overline{B}_E \xrightarrow{Id - \pi_E^d \varphi_E^h} \overline{B}_E).$$

Si $d > 0$ cela résulte de ce que

$$Id - \pi_E^d \varphi_E^h : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

car $\pi_E^d \varphi_E^h$ est topologiquement π_E -adiquement nilpotent et $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est π_E -adique. Si $d < 0$ cela résulte de ce que

$$\pi_E^{-d} \varphi_E^{-h} : \text{coker}(\overline{B}_E \xrightarrow{Id - \pi_E^d \varphi_E^h} \overline{B}_E) \xrightarrow{\sim} \text{coker}(\overline{B}_E \xrightarrow{\pi_E^{-d} \varphi_E^{-h} - Id} \overline{B}_E)$$

et du cas précédent $d > 0$. Si $d = 0$, on a $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W_{\mathcal{O}_E}(k) \oplus W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$. Puisque k est algébriquement clos,

$$\text{coker}(W_{\mathcal{O}_E}(k) \xrightarrow{Id - \varphi_E} W_{\mathcal{O}_E}(k)) = 0.$$

Puisque φ_E est topologiquement nilpotent pour la topologie faible sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$ et que celui-ci est complet pour cette topologie,

$$Id - \varphi_E : W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F).$$

D'où le résultat. \square

Théorème 13.7.

(1) Le foncteur d'extension des scalaires de L_E à B_E^+

$$\varphi\text{-Mod}_{L_E} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$$

est essentiellement surjectif.

(2) Tout $X \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ est isomorphe à une somme directe de $B_E^+(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

(3) Le foncteur de réduction des coefficients de B_E^+ à \overline{B}_E

$$\varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E}$$

induit une équivalence de catégories.

Démonstration. D'après le théorème de Dieudonné-Manin, les points (1) et (2) sont équivalents. La proposition 13.3 dit que le théorème revient alors à prouver que tout $X \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}_E}$ est isomorphe à une somme directe de $\overline{B}_E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Le lemme 13.6 nous dit qu'il suffit de montrer qu'un tel X possède une filtration par des sous- φ -modules facteurs directs dont les gradués sont isomorphes à des $\overline{B}_E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Soit donc $X = (M, \varphi)$. Notons $M_k = M \otimes L_E$. Soit λ la plus petite pente de Dieudonné-Manin de (M_k, φ) . Si $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ et $h \geq 1$, il existe un $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ -réseau $\Lambda \subset M_k$ vérifiant

$$\varphi^h \Lambda \subset \pi_E^d \Lambda \quad \text{et} \quad \Lambda^{\varphi^h = \pi_E^d} \neq 0.$$

Soient $e_1, \dots, e_n \in M$ relevant une base de Λ . D'après le lemme de Nakayama c'est une base de M . Notons $\psi = \pi_E^{-d} \varphi^h$. Soit $A \in \text{GL}_n(\overline{B}_E)$ la matrice de ψ dans la base (e_1, \dots, e_n) . Puisque la réduction de A dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est dans $M_n(W_{\mathcal{O}_E}(k))$, il existe $B \in M_n(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F))$ dont l'image dans $M_n(\overline{B}_E)$ coïncide avec A . On peut donc trouver un $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ -module libre N muni d'un morphisme φ_E^h -linéaire $\tilde{\psi} : N \rightarrow N$ tel que

$$(N, \tilde{\psi}) \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)} \overline{B}_E = (M, \psi).$$

D'après le lemme 13.4

$$N^{\psi=Id} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{\varphi^h = \pi_E^d} \neq 0.$$

On peut donc trouver un morphisme non-nul

$$\overline{B}_E(\lambda) \longrightarrow (M, \varphi)$$

qui après réduction via $\overline{B}_E \rightarrow L_E$ définit un sous-isocrystal $L_E(\lambda) \hookrightarrow (M_k, \varphi)$. D'après le lemme de Nakayama, $\overline{B}_E(\lambda) \rightarrow (M, \varphi)$ est un sous- φ -module facteur direct. \square

13.3. φ -modules et fibrés.

Définition 13.8. On note Fib_{X_E} la catégorie des fibrés vectoriels sur X_E .

Définissons un foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \text{Fib}_{X_E}.$$

Soit $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ et

$$\Gamma_{\bullet}(X) = \bigoplus_{d \geq 0} M^{\varphi_E = \pi_E^d}$$

l'algèbre graduée sur P_{E, π_E} associée. Il lui est associé un faisceau quasi-cohérent

$$\widetilde{\Gamma_{\bullet}(X)}$$

sur $X_E = \text{Proj}(P_{E, \pi_E})$. Si $E'|E$ est une extension de degré fini, rappelons que l'on a un couple de foncteurs adjoints (13.1.3)

$$\varphi\text{-Mod}_{B_{E'}^+} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{E'/E*}} \\ \xleftarrow{\pi_{E'/E}^*} \end{array} \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}.$$

Il y a un isomorphisme $\pi_{E'/E}^* B_E^+(1) \simeq B_{E'}^+([E' : E])$ qui induit des isomorphismes compatibles au produit tensoriel pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $\pi_{E'/E}^* B_E^+(d) \simeq B_{E'}^+([E' : E]d)$. Lorsque $E'|E$ est non-ramifiée, que l'on a fixé une uniformisante π_E et de E et que l'on choisit $\pi_{E'} = \pi_E$, un tel isomorphisme est canonique. Pour $X \in \varphi\text{-Mod}_{B_{E'}^+}$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bullet}(\pi_{E'/E*} X) &= \bigoplus_{d \geq 0} H^0((\pi_{E'/E*} X)(-d)) \\ &\simeq \bigoplus_{d \geq 0} H^0(\pi_{E'/E*}(X(-[E' : E]d))) \\ &= \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X(-[E' : E]d)) \\ &= \Gamma_{[E':E]\bullet}(X) \end{aligned}$$

qui est vu comme un P_{E, π_E} -module gradué via le morphisme d'anneaux gradués $P_{E, \pi_E, \bullet} \hookrightarrow P_{E', \pi_{E'}, [E':E]\bullet}$. On a donc si $\pi_{E', E} : X_{E'} \rightarrow X_E$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bullet}(\pi_{E'/E*} X) \widetilde{\phantom{\Gamma_{\bullet}(\pi_{E'/E*} X)}} &= \pi_{E', E*}(\Gamma_{[E':E]\bullet}(X) \widetilde{\phantom{\Gamma_{[E':E]\bullet}(X)}}) \\ &= \pi_{E', E*} \widetilde{\Gamma_{\bullet}(X)} \end{aligned}$$

car $\Gamma_{[E':E]\bullet}(X) \widetilde{\phantom{\Gamma_{[E':E]\bullet}(X)}} = \widetilde{\Gamma_{\bullet}(X)}$. Remarquons maintenant que par définition,

$$\Gamma_{\bullet}(B_E^+(d)) = \mathcal{O}_{X_E}(-d).$$

On a donc d'après la formule précédente : pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$,

$$\Gamma_{\bullet}(B_E^+(\lambda)) \widetilde{\phantom{\Gamma_{\bullet}(B_E^+(\lambda))}} = \mathcal{O}_{X_E}(-\lambda).$$

On déduit donc du théorème de classification 13.7 que pour tout $X \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$, $\widetilde{\Gamma_{\bullet}(X)}$ est un \mathcal{O}_{X_E} -module localement libre de rang fini.

Définition 13.9. On note

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} & \longrightarrow & \text{Fib}_{X_E} \\ X & \longmapsto & \mathcal{E}(X) \end{array}$$

le foncteur défini en posant $\mathcal{E}(X) = \widetilde{\Gamma_{\bullet}(X)}$. On note de la même façon le foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{L_E} \longrightarrow \text{Fib}_{X_E}$$

obtenu à partir du précédent en étendant scalaires de L_E à B_E^+ .

On a donc

$$\mathcal{E}(\oplus_i B_E^+(\lambda_i)) = \oplus_i \mathcal{O}_{X_E}(-\lambda_i).$$

Soit $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$. Donnons une description de $\mathcal{E}(M, \varphi)$ en termes de données de recollement comme dans la section 2.1. Soit donc $\infty \in |X_E|$, $t \in P_{E, \pi_E, 1}$ tel que $V^+(t) = \{\infty\}$ et $B_{dR}^+ := \widehat{\mathcal{O}}_{X_E, \infty}$. On a alors

$$\begin{aligned} \Gamma(X_E \setminus \{\infty\}, \mathcal{E}(M, \varphi)) &= M[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id} \\ \widehat{\mathcal{E}(M, \varphi)}_{\infty} &= M \otimes_{B_E^+} B_{dR}^+ \end{aligned}$$

et la donnée de recollement est l'isomorphisme naturel

$$M[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id} \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} M \otimes_{B_E^+} B_{dR}.$$

Le théorème suivant se déduit maintenant du théorème 12.8 de classification des fibrés.

Théorème 13.10. *Le foncteur*

$$\mathcal{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \text{Fib}_{X_E}$$

induit une équivalence de catégories tensorielles pour laquelle

$$H^0(X_E, \mathcal{E}(M, \varphi)) = H^0(M, \varphi) = M^{\varphi=Id}.$$

De plus, si E'/E est une extension de degré fini, $\pi_{E', E} : X_{E'} \rightarrow X_E$, il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-Mod}_{B_{E'}^+} & \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} & \text{Fib}_{X_{E'}} \\ \pi_{E'/E}^* \uparrow \downarrow \pi_{E'/E*} & & \uparrow \downarrow \pi_{E', E*} \\ \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} & \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} & \text{Fib}_{X_E}. \end{array}$$

Remarque 13.11. *Le foncteur $\mathcal{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \rightarrow \text{Fib}_{X_E}$ est exact. Cependant son inverse ne l'est pas et l'équivalence de catégories précédente n'est pas un équivalence de catégories exactes. Par exemple, il résulte du lemme 13.6 et de la proposition 13.3 que pour tout $X, Y \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ on a $\text{Ext}^1(X, Y) = 0$ alors qu'en général $\text{Ext}^1(\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(Y)) \neq 0$.*

Donnons maintenant une description de l'inverse du foncteur $\mathcal{E}(-)$. Fixons le corps E et une uniformisante π de E . On note $X := X_E$, pour $h \geq 1$, $P_h := P_{E_h, \pi_E}$ et $X_h := X_{E_h} = \text{Proj}(P_h)$. Soit

$$P_{\infty} = \varinjlim_{h \geq 1} P_h.$$

C'est une E -algèbre \mathbb{Q}_+ -graduée,

$$P_{\infty} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} P_{\infty, \lambda}$$

où

$$P_{\infty, \lambda} = \bigcup_{h \gg 1} (B^+)^{\varphi^h = \pi^{h\lambda}} = (B^+)^{\varphi^s = \pi^r} \otimes_{E_s} E_{\infty}$$

si $\lambda = \frac{r}{s}$ avec $(r, s) = 1$ et E_{∞} est l'extension maximale non-ramifiée de E . Pour $\mathcal{E} \in \text{Fib}_X$ et $h \geq 1$ soit

$$M_h(\mathcal{E}) = \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}} \Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathcal{E})(h\lambda))$$

où $\pi_h : X_h \rightarrow X$ et

$$M_{\infty}(\mathcal{E}) = \varinjlim_{h \geq 1} M_h(\mathcal{E}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \bigcup_{h \gg 1} \Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathcal{E})(h\lambda)).$$

C'est un P_{∞} -module \mathbb{Q} -gradué.

La tour de courbes $(X_h)_{h \geq 1}$ est un pro-revêtement galoisien de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$. Plus précisément, si on note $\sigma = \varphi \in \text{Gal}(E_\infty|E)$ alors $\text{Gal}(X_h/X) = \sigma^{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$. Le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_h}(1) = \widehat{P_h[1]}$ est muni d'un isomorphisme

$$u_h : \sigma^* \mathcal{O}_{X_h}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h}(1)$$

vérifiant

$$\sigma^{h-1*} u_h \circ \dots \circ \sigma^* u_h \circ u_h = \pi \in \text{Aut}(\mathcal{O}_{X_h}(1)).$$

Cet isomorphisme est celui associé à l'isomorphisme φ -linéaire de P_h -modules gradués

$$\varphi : P_h[1] \xrightarrow{\sim} P_h[1].$$

On dispose de même pour tout $d \in \mathbb{Z}$ d'un isomorphisme

$$u_h^{\otimes d} : \sigma^* \mathcal{O}_{X_h}(d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h}(d)$$

associé à l'isomorphisme φ -linéaire $\varphi : P_h[d] \xrightarrow{\sim} P_h[d]$. Cela définit un isomorphisme φ -linéaire de P_∞ -modules

$$\varphi : M_\infty(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} M_\infty(\mathcal{E}),$$

l'action de φ sur $\Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathcal{E})(d))$ étant définie par

$$\varphi : \Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathcal{E})(d)) \xrightarrow{\sigma^*} \Gamma(X_h, (\sigma^* \pi_h^* \mathcal{E}) \otimes \sigma^* \mathcal{O}_{X_h}(d)) \xrightarrow{\text{Id} \otimes u_h^{\otimes d}} \Gamma(X_h, (\sigma^* \pi_h^* \mathcal{E})(d)) = \Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathcal{E})(d))$$

puisque $\pi_h \circ \sigma = \pi_h$.

Si $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B^+}$ on a

$$M_\infty(\mathcal{E}(M, \varphi)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \bigcup_{h \gg 1} M^{\varphi^h = \pi^{h\lambda}}.$$

Calculons en particulier $M_\infty(\mathcal{O}_X(-\mu))$. Si $\mu = \frac{r}{s}$ avec $(r, s) = 1$, on a $B^+(\mu) = B^+ e_1 \oplus \dots \oplus B^+ e_s$ sur lequel φ agit via $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < s$ et $\varphi(e_s) = \pi^r e_1$. On a alors

$$M_\infty(\mathcal{E}(B^+(\mu))) = P_\infty[-\mu] e_1 \oplus \dots \oplus P_\infty[-\mu] e_s$$

où $P_\infty[-\mu]$ est graduée de telle manière que les éléments homogènes de degré λ soient les éléments homogènes de degré $\lambda - \mu$ de P_∞ . De plus l'action de φ sur $M_\infty(B^+(\mu))$ est celle donnée par $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < s$ et $\varphi(e_s) = \pi^r e_1$.

De ce calcul et du théorème de classification des fibrés on déduit que si $\varphi\text{-Mod}_{P_\infty}$ désigne la catégorie des P_∞ -modules \mathbb{Q} -gradués M_∞ munis d'un isomorphisme φ -linéaire $\varphi : M_\infty \xrightarrow{\sim} M_\infty$ et tels que M_∞ soit isomorphe à une somme finie de $P_\infty[\mu]$, $\mu \in \mathbb{Q}$, on a un foncteur

$$M_\infty(-) : \text{Fib}_X \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{P_\infty}.$$

D'après le calcul explicite précédent, le composé

$$\text{Fib}_X \xrightarrow{M_\infty(-)} \varphi\text{-Mod}_{P_\infty} \xrightarrow{-\otimes_{P_\infty} B^+} \varphi\text{-Mod}_{B^+}$$

est un inverse du foncteur $\mathcal{E}(-)$.

13.4. Isocristaux et fibrés. Rappelons (cf. 3.2.4) que la catégorie abélienne des isocristaux $\varphi\text{-Mod}_{L_E}$ possède deux fonctions additives hauteur et point terminal du polygone de Newton

$$\begin{aligned} \text{ht} : \varphi\text{-Mod}_{L_E} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ t_N : \varphi\text{-Mod}_{L_E} &\longrightarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

où $\text{ht}(D, \varphi) = \dim_{L_E} D$ et $t_N(D, \varphi) = d$ si $\det(D, \varphi) \simeq L_E(d)$. Puisque $\mathcal{E}(L_E(\lambda)) = \mathcal{O}_{X_E}(-\lambda)$, on a donc pour un isocristal (D, φ)

$$\begin{aligned} \text{rg } \mathcal{E}(D, \varphi) &= \text{ht}(D, \varphi) \\ \text{deg } \mathcal{E}(D, \varphi) &= -t_N(D, \varphi). \end{aligned}$$

De plus, le polygone de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(D, \varphi)$ est le polygone concave de pentes les pentes opposées à celles du polygone de Newton de (D, φ) avec même multiplicités.

Enfin, on remarquera que bien que le foncteur $\mathcal{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{L_E} \rightarrow \text{Fib}_{X_E}$ ne soit pas pleinement fidèle, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, il induit une équivalence de catégories entre la catégories des isocristaux isoclines de pente λ et la catégorie des fibrés semi-stables de pente $-\lambda$.

14. FIBRÉS GALOIS ÉQUIVARIANTS

14.1. L'action de Galois sur la courbe.

14.1.1. *Action de Galois sur la courbe.* Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet de valuation discrète de corps résiduel k_K parfait. Fixons une clôture algébrique \overline{K} de K . On note $C = \widehat{\overline{K}}$ et $G_K = \text{Gal}(\overline{K}|K)$. Soient $F = \text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C))$ et k le corps résiduel de C .

Soit E une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p « abstraite » c'est à dire que l'on ne suppose pas plongée dans \overline{K} . On note k_E le corps résiduel de E et π_E une uniformisante.

Considérons la courbe $X_{\mathbb{Q}_p} = \text{Proj}(P_{\mathbb{Q}_p})$. L'action de G_K sur F définit une action sur $B_{\mathbb{Q}_p}^+$ commutant au Frobenius φ . Cela définit une action sur l'algèbre graduée $P_{\mathbb{Q}_p}$ et donc une action de G_K sur la courbe $X_{\mathbb{Q}_p}$. Plus généralement, si $\text{Aut}(F)$ désigne les automorphismes continus de F , il y a une action de $\text{Aut}(F)$ sur $X_{\mathbb{Q}_p}$. L'action précédente de G_K provient alors du plongement canonique $G_K \hookrightarrow \text{Aut}(F)$.

Remarque 14.1. *D'après la théorie du corps des normes ([44]) on peut éclaircir la structure de F muni de son action de G_K de la façon suivante. Soit L une extension de K contenu dans \overline{K} , arithmétiquement profinie de degré infini. À une telle donnée, Fontaine et Wintenberger associent un sous-corps fermé $X_K(L)$ de F . C'est un corps local de caractéristique positive de corps résiduel une extension de degré fini de k_K . De plus, le Frobenius de $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ est surjectif et*

$$X_K(\widehat{L})^{\text{rad}} = \text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_L)) \subset \text{Frac}(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C)) = F.$$

Si $H = \text{Gal}(\overline{K}|L)$ on a alors

$$F = \widehat{X_K(L)},$$

$$X_K(\widehat{L})^{\text{rad}} = F^H$$

et

$$H \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\overline{X_K(L)}|X_K(L)).$$

Lorsque $L|K$ est galoisienne, $\Gamma = \text{Gal}(L|K) \subset \text{Aut}(X_K(L))$ et alors

$$G_K = \{\sigma \in \text{Aut}(F) \mid \sigma(X_K(L)) = X_K(L) \text{ et } \sigma|_{X_K(L)} \in \Gamma\}.$$

Rappelons que $X_E = X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. On définit alors l'action de G_K sur X_E comme étant l'action déduite de celle sur $X_{\mathbb{Q}_p}$ par extension des scalaires.

Nous avons supposé précédemment (cf. les hypothèses au début de la section 5) que le corps résiduel k de F est une extension du corps résiduel \mathbb{F}_q de E i.e. on avait supposé fixé un plongement $\mathbb{F}_q \hookrightarrow k$. Néanmoins, on a montré que la courbe X_E construite à partir de ces choix vérifie $X_E = X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Ici, le corps résiduel de E n'est pas supposé plongé dans k et on adopte comme définition de X_E la formule $X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$.

Supposons qu'il existe un plongement de k_E dans k_K . Fixons un tel plongement. Il y a alors une action de G_K sur B_E^+ et donc sur l'algèbre graduée $P_{E, \pi_E} = \bigoplus_{d \geq 0} (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E^d}$. Cela définit une action de G_K sur $\text{Proj}(P_{E, \pi_E})$. Le lemme qui suit dit que cette action coïncide avec celle définie en posant $X_E = X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et en faisant agir $\sigma \in G_K$ via $\sigma \otimes \text{Id}$.

Lemme 14.2. *Sous les hypothèses précédentes, les deux actions de G_K sur X_E coïncident.*

Démonstration. Soit $a \in W_{\mathcal{O}_E}(k)^\times$ tel que

$$a^{\sigma_E - 1} = \pi_E^{[E:\mathbb{Q}_p]} / p^{f_{E/\mathbb{Q}_p}}.$$

L'isomorphisme $X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \text{Proj}(P_{E,\pi_E})$ provient alors de l'isomorphisme d'algèbres graduées

$$P_{\mathbb{Q}_p,p}^\bullet \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} P_{E,\pi_E}^{[E:\mathbb{Q}_p]\bullet}$$

qui est donné en degré d par

$$\begin{aligned} (B_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\varphi_{\mathbb{Q}_p} = p^d} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E &\xrightarrow{\sim} (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E^{[E:\mathbb{Q}_p]}} \\ x \otimes 1 &\longmapsto a^d x. \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in G_K$. Les deux actions de σ sur $\text{Proj}(P_{E,\pi_E})$ diffèrent alors de l'automorphisme de $\text{Proj}(P_{E,\pi_E})$ induit par l'automorphisme d'algèbre graduée donné en degré d par $x \mapsto (\sigma(a)/a)^d x$. Bien que non trivial en général cet automorphisme induit l'automorphisme trivial de $\text{Proj}(P_{E,\pi_E})$. \square

14.1.2. Construction de points fermés à l'infini.

Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ vérifiant $Q(X) \equiv \pi_E X \pmod{X^2}$ et $Q(X) \equiv X^q \pmod{\pi_E}$. Notons $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q$ la loi de groupe formel de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_E telle que $[\pi]_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q} = Q$ (on a donc $\mathcal{L}\mathcal{T}_{Q^\tau} = \mathcal{L}\mathcal{T}_Q^\tau$). Soit

$$\tau : E \hookrightarrow \overline{K}$$

un plongement dans $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{K})$. On en déduit une loi de groupe formel $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q^\tau$ sur $\mathcal{O}_{\tau(E)}$ et un polynôme $Q^\tau \in \mathcal{O}_{\tau(E)}[X]$. Soit $\epsilon \in \mathcal{R}_{Q^\tau}(\mathcal{O}_C)$ défini par $\epsilon = (\epsilon^{(n)})_{n \geq 0}$ un générateur de $T_{\pi_E}(\mathcal{L}\mathcal{T}_Q^\tau)$. Le plongement τ définit un plongement du corps résiduel \mathbb{F}_q de E dans k . On est donc dans la situation des chapitres précédents. En particulier on a une identification $X_E = \text{Proj}(P_{E,\pi_E})$. Notons alors

$$t_{E,\tau} = \log_{\mathcal{L}\mathcal{T}_Q}([\epsilon]_{Q^\tau}) \in (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E}$$

(cf. 9.3). Soit

$$\infty_{E,\tau} \in |X_E|$$

défini par

$$V^+(t_{E,\tau}) = \{\infty_{E,\tau}\}.$$

Le corps résiduel en $\infty_{E,\tau}$ de X_E est C et si $u_\epsilon = [\epsilon]_{Q^\tau} / [\epsilon^{1/q}]_{Q^\tau} \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, un élément primitif de degré 1, via « l'uniformisation » de la courbe par les idéaux primitifs de degré 1 on a

$$\begin{aligned} Y_E / \varphi_E^{\mathbb{Z}} &\xrightarrow{\sim} |X_E| \\ \varphi_E^{\mathbb{Z}}(u_\epsilon) &\longmapsto \infty_{E,\tau}. \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow B_E^{b,+} \cdot u_\epsilon \longrightarrow B_E^{b,+} \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0$$

et « après avoir pris les produits infinis » la suite exacte donnant les périodes de $\mathcal{L}\mathcal{T}_Q^\tau$

$$0 \longrightarrow \underbrace{E \cdot t_{E,\tau}}_{T_{\pi_E}(\mathcal{L}\mathcal{T}_Q^\tau)} \longrightarrow (B_E^+)^{\varphi_E = \pi_E} \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0.$$

On vérifie que si $\sigma \in G_K$ alors

$$\sigma \cdot \infty_{E,\tau} = \infty_{E,\sigma\tau}.$$

On a donc défini une injection G_K -équivariante

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{K}) &\hookrightarrow |X_E| \\ \tau &\longmapsto \infty_{E,\tau}. \end{aligned}$$

14.1.3. *Sur les orbites de Galois.* Notons $\infty := \infty_{\mathbb{Q}_p} \in |X_{\mathbb{Q}_p}|$ le point construit précédemment, $\{\infty\} = V^+(t)$ où t est un période de $\widehat{\mathbb{G}}_m$.

Proposition 14.3. *Le point ∞ est le seul point fermé de $X_{\mathbb{Q}_p}$ qui soit G_K -invariant.*

Démonstration. Rappelons que les points fermés de $X_{\mathbb{Q}_p}$ sont en bijection avec

$$(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathbb{Q}_p^\times$$

Cette bijection est compatible à l'action de G_K . On en déduit que tout point fixe de G_K est donné par un élément $x \in \mathfrak{m}_F$ non nul et un caractère $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ tel que

$$\forall \sigma \in G_K, \quad \sigma(x) = \chi(\sigma).x.$$

Notons $\text{Gal}(\overline{K}|K') = \ker \chi$. On a $x \in \mathfrak{m}_F^{\text{Gal}(\overline{K}|K')}$. D'après Ax-Sen-Tate, $C^{\text{Gal}(\overline{K}|K')} = \widehat{K}'$. Supposons d'abord K' de valuation discrète. Alors,

$$\mathcal{O}_F^{\text{Gal}(\overline{K}|K')} = \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)^{\text{Gal}(\overline{K}|K')} = \mathcal{R}(\mathcal{O}_{\widehat{K}'}) = k_{K'}$$

puisque K' est de valuation discrète à corps résiduel $k_{K'}$ parfait. On a donc $\mathfrak{m}_F^{\text{Gal}(\overline{K}|K')} = \mathfrak{m}_F \cap k_{K'} = 0$. Le corps K' n'est donc pas de valuation discrète. Notons $x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$ où $x^{(n)} \in \mathfrak{m}_C$ et $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On a alors

$$\log(x^{(0)}) \in H^0(G_K, C(\chi^{-1})) = 0$$

d'après Tate ([43] theo. 2). Il s'en suit que $x^{(0)}$ est une racine de l'unité. D'où le résultat. \square

Par application de la proposition précédente à l'action de $\text{Gal}(\overline{K}|K')$ sur X_E pour toute extension de degré fini $K'|K$ on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 14.4. *Le point ∞ est le seul point fermé de $X_{\mathbb{Q}_p}$ dont la G_K -orbite soit finie.*

Investiguons maintenant les orbites finies de G_K sur X_E pour tout E . Soit $\pi_{E, \mathbb{Q}_p} : X_E \rightarrow X_{\mathbb{Q}_p}$ la projection. D'après le corollaire précédent, les points de X_E de G_K -orbite finie sont l'ensemble fini $\pi_{E, \mathbb{Q}_p}^{-1}(\infty)$. La construction de la section 14.1.2 associe à chaque plongement $E \hookrightarrow \overline{K}$ un point fermé $\infty_{E, \tau}$ de X_E . On vérifie que

$$\pi_{E, \mathbb{Q}_p}^{-1}(\infty) = \{\infty_{E, \tau}\}_{\tau: E \hookrightarrow \overline{K}}.$$

On en déduit la proposition qui suit.

Proposition 14.5. *Les points fermés de X_E de G_K -orbite finie sont en bijection G_K -équivariante avec l'ensemble des plongements $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{K})$. Ce sont les $\infty_{E, \tau}$ lorsque τ parcourt les plongements de E dans \overline{K} .*

Exemple 14.6. *La courbe X_E possède un point fermé G_K -invariant si et seulement si il existe un plongement $E \hookrightarrow K$.*

14.2. Fibrés Galois équivariants.

14.2.1. *Topologie de B_{dR}^+ .* Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(W(\mathcal{O}_F))$ un idéal engendré par un élément primitif de degré 1 et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}[\frac{1}{p}]$ l'idéal maximal de $B^{b,+}$ associé. Soit

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_{k \geq 1} B^{b,+}/\mathfrak{m}^k$$

de corps résiduel $C = B^{b,+}/\mathfrak{m}$. Pour tout $k \geq 0$, $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ est un C -espace vectoriel de dimension 1. C'est donc canoniquement un C -espace de Banach et en particulier un \mathbb{Q}_p -espace de Banach. Pour tout k , le réseau $W(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{p}^k$ de B_{dR}^+/\mathfrak{m}^k est p -adiquement complet. On munit alors B_{dR}^+/\mathfrak{m}^k de l'unique topologie de \mathbb{Q}_p -espace de Banach définie par une norme de boule unité $W(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{p}^k$. On vérifie que B_{dR}^+/\mathfrak{m}^k est alors une extension successive des espaces de Banach $(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})_{0 \leq i \leq k}$ précédents (par extensions on entend une suite exacte d'espaces vectoriels strictement compatible aux topologies de Banach). On munit alors B_{dR}^+ de la topologie limite projective ce qui en fait un \mathbb{Q}_p -espace de Frechet.

14.2.2. B_{dR}^+ et B_{dR} -représentations. Reprenons les hypothèses et notations de la section 14.1.1. Soit $\infty \in |X_{\mathbb{Q}_p}|$ le point fixe sous G_K et $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_{\mathbb{Q}_p}, \infty}$.

Définition 14.7. Une B_{dR}^+ -représentation est un B_{dR}^+ -module libre muni d'une action semi-linéaire continue de G_K . Une B_{dR} -représentation est un B_{dR} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de G_K stabilisant un B_{dR}^+ -réseau sur lequel l'action de G_K est continue. On note $\text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et $\text{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ ces catégories.

On définit de même $\text{Rep}_{B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}(G_K)$, resp. $\text{Rep}_{B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}(G_K)$, en exigeant que le $B_{dR}^+ \otimes E$, resp. $B_{dR} \otimes E$, module sous-jacent soit libre.

On vérifie que si W est une B_{dR} -représentation alors l'action de G_K sur tout B_{dR}^+ -réseau invariant est continue.

14.2.3. *Fibrés Galois équivariants : définition.* Notons $I_E = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{K})$. Il y a un isomorphisme compatible à l'action de G_K

$$\prod_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{O}}_{X_E, \infty_E, \tau} = B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E.$$

Définition 14.8. Un fibré G_K -équivariant sur X_E est un fibré \mathcal{E} muni d'une action de G_K compatible à celle sur X_E tel que l'action semi-linéaire de G_K sur le B_{dR}^+ -module $\bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_{\infty_E, \tau}$ soit continue. On note $\text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ la catégorie de tels fibrés équivariants.

La catégorie $\text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ est K -linéaire exacte munie d'un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Fib}_{X_E}^{G_K} &\longrightarrow \text{Rep}_{B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}(G_K) \\ \mathcal{E} &\longmapsto \widehat{\mathcal{E}}_{\infty} := \bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_{\infty_E, \tau}. \end{aligned}$$

14.2.4. *Interprétation en termes de B-paires.* Notons

$$B_e = \Gamma(X_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{Q}_p}}) = (B_{\mathbb{Q}_p}^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=Id}.$$

Soit alors

$$B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} E = \Gamma(X_E \setminus \pi_{E, \mathbb{Q}_p}^{-1}(\infty), \mathcal{O}_{X_E}).$$

C'est un anneau principal munie d'une action de G_K . Il y a un plongement

$$B_e \hookrightarrow B_{dR}$$

et $B_e \otimes E \hookrightarrow B_{dR} \otimes E$.

Définition 14.9. Une $B_e \otimes E$ -représentation de G_K est un $B_e \otimes E$ -module libre de rang fini M muni d'une action semi-linéaire de G_K telle que $M \otimes_{B_e} B_{dR}$ soit une $B_{dR} \otimes E$ -représentation de G_K . On note $\text{Rep}_{B_e \otimes E}$ la catégorie associée.

Il y a un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Fib}_{X_E}^{G_K} &\longrightarrow \text{Rep}_{B_e \otimes E}(G_K) \\ \mathcal{E} &\longmapsto \Gamma(X_E \setminus \{\infty_{E, \tau}\}_{\tau \in I_E}, \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Voici maintenant le lien entre les B -paires introduites par Berger dans [3] et les fibrés Galois équivariants. Il s'agit d'une traduction immédiate de la proposition 2.1.

Proposition 14.10. La catégorie des fibrés G_K -équivariants sur X_E est équivalente à celle des triplets (M, W, u) où $M \in \text{Rep}_{B_e \otimes E}(G_K)$, $W \in \text{Rep}_{B_{dR}^+ \otimes E}(G_K)$ et $u : M \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} W[\frac{1}{t}]$.

Remarque 14.11. Il résulte de la proposition précédente que la catégorie $\text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ est équivalente à celles $\mathcal{E} \in \text{Fib}_{X_{\mathbb{Q}_p}}^{G_K}$ munis d'une action de E tels que $\widehat{\mathcal{E}}_{\infty}$ soit un $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre.

14.2.5. *La catégorie des B_e -représentations est abélienne.* La catégorie $\text{Rep}_{B_e \otimes E}(G_K)$ est à priori seulement une catégorie exacte. On a cependant le résultat suivant.

Théorème 14.12. *La catégorie $\text{Rep}_{B_e \otimes E}(G_K)$ est abélienne E -linéaire.*

Démonstration. Si $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ est un morphisme de fibrés G_K -équivariants sur $X_E \setminus \pi_{E, \mathbb{Q}_p}^{-1}(\infty)$ alors le faisceau cohérent qui est la partie de torsion de $\text{coker}(f)$ est G_K -équivariant. Étant de torsion son support est constitué d'un nombre fini de points de $X_E \setminus \pi_{E, \mathbb{Q}_p}^{-1}(\infty)$. Mais ce support est nécessairement invariant sous G_K . D'après la proposition 14.5 il est donc vide. On en déduit que $\text{coker}(f)$ est un fibré vectoriel. \square

14.3. **Lorsque E est contenu dans K .** Supposons maintenant que $E \subset K$ et notons $\tau_0 \in I_E$ le plongement canonique déduit de cette inclusion. Le point $\infty_{E, \tau_0} \in |X_E|$ est donc fixe sous G_K . Le plongement $E \subset K$ induit un plongement du corps résiduel de E dans k . L'action de G_K sur F induit alors une action sur l'algèbre graduée P_{E, π_E} qui induit une action sur $X_E = \text{Proj}(P_{E, \pi_E})$. Elle coïncide avec l'action définie précédemment.

Soit

$$B_{e, E} = \Gamma(X_E \setminus \{\infty_{E, \tau_0}\}, \mathcal{O}_{X_E}) = (B_E^+[\frac{1}{t_E}])^{\varphi_E = Id}$$

où $V^+(t_E) = \{\infty_{E, \tau_0}\}$ i.e. t_E est une période d'un groupe de Lubin-Tate associé à E . L'anneau principal $B_{e, E}$ est muni d'une action de G_K . On a bien sûr un plongement compatible à l'action de Galois

$$B_{e, E} \subset B_e \otimes E$$

qui identifie $B_e \otimes E$ à un localisé de $B_{e, E}$ après inversion de $[E : \mathbb{Q}_p] - 1$ -idéaux premiers.

Toujours d'après la proposition 2.1 on a la classification suivante en termes de B -paires des fibrés équivariants. On définit comme précédemment $\text{Rep}_{B_{e, E}}(G_K)$.

Proposition 14.13. *La catégorie $\text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ est équivalente à celle des triplets (M, W, u) où $M \in \text{Rep}_{B_{e, E}}(G_K)$, $W \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et $u : M \otimes B_{dR} \xrightarrow{\sim} W[\frac{1}{t}]$.*

Remarque 14.14. *Contrairement au cas du théorème 14.12, il n'y a pas de raison pour qu'en général $\text{Rep}_{B_{e, E}}(G_K)$ soit abélienne.*

14.4. **Torsion par un cocycle.** Soit $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ de fibré sous-jacent \mathcal{E} et $\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_\infty \in \text{Rep}_{B_{dR}^+ \otimes E}(G_K)$. Le groupe G_K agit alors sur $\text{Aut}(\mathcal{E})$ et $\text{Aut}(\underline{\mathcal{E}}) = H^0(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}))$. Il y a un plongement Galois équivariant

$$\text{Aut}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \text{GL}_{B_{dR}^+ \otimes E}(\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_\infty).$$

On munit alors $\text{Aut}(\mathcal{E})$ de la topologie induite de celle de $\text{GL}_{B_{dR}^+ \otimes E}(\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_\infty)$, elle-même déduite de celle de B_{dR}^+ . On note alors

$$Z^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}))$$

l'ensemble des 1-cocycles continus et

$$H^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E})) = Z^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E})) / \sim$$

l'ensemble pointé de cohomologie galoisienne associé. La proposition suivante résulte de la proposition 4.19.

Proposition 14.15.

- (1) *Les fibrés G_K -équivariants de fibré sous-jacent \mathcal{E} sont en bijection avec l'ensemble de 1-cocycles $Z^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}))$.*
- (2) *Les classes d'isomorphisme de fibrés G_K -équivariants de fibré sous-jacent \mathcal{E} sont en bijection avec $H^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}))$.*

Définition 14.16. *Soit $c \in Z^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}))$. On note*

$$\underline{\mathcal{E}} \underset{\wedge}{\overset{G_K}{\wedge}} c$$

le fibré G_K -équivariant de fibré sous-jacent \mathcal{E} obtenu à partir de $\underline{\mathcal{E}}$ par torsion.

14.5. Fibrés Galois-équivariants et semi-stabilité.

14.5.1. *Invariance sous Galois de la filtration de Harder-Narasimhan.* Une des propriétés fondamentales de la filtration de Harder-Narasimhan d'un objet est son invariance sous les symmétries de cet objet. Cela impose des contraintes sur cette filtration de Harder-Narasimhan.

Proposition 14.17. *Soit $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ de fibré sous-jacent \mathcal{E} . Soit $0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$ la filtration de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} . Pour $0 \leq i \leq r$ il existe une unique structure de fibré G_K -équivariant sur \mathcal{E}_i , $\underline{\mathcal{E}}_i$, telle que la filtration précédente provienne d'une filtration dans $\text{Fib}_{X_E}^{G_K}$:*

$$0 = \underline{\mathcal{E}}_0 \subsetneq \underline{\mathcal{E}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underline{\mathcal{E}}_r = \underline{\mathcal{E}}.$$

Démonstration. Pour $\sigma \in G_K$ notons $u_\sigma : \sigma^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ donnant l'action de σ sur \mathcal{E} . Il suffit de remarquer que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-fibré (localement facteur direct) alors

$$\deg(u_\sigma(\sigma^* \mathcal{F})) = \deg(\mathcal{F}).$$

La proposition résulte alors de l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan. \square

14.5.2. *Classification des fibrés Galois équivariants semi-stables de pente 0.*

Définition 14.18. *On note $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ le fibré G_K -équivariant qui est \mathcal{O}_{X_E} muni de sa structure équivariante canonique déduite de l'action de G_K sur X_E .*

Proposition 14.19. *Soit ${}^0 \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ la catégorie des fibrés G_K -équivariants semi-stables de pente 0. Soit $\text{Rep}_E(G_K)$ la catégorie des représentations continues de G_K à valeurs dans un E -espace vectoriel de dimension finie.*

(1) *Il y a une équivalence de catégories*

$$\begin{aligned} \text{Rep}_E(G_K) &\xrightarrow{\sim} {}^0 \text{Fib}_{X_E}^{G_K} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V \otimes_E \underline{\mathcal{O}}_{X_E}) \overset{G_K}{\wedge} \rho. \end{aligned}$$

(2) *L'équivalence précédente se réécrit de la façon suivante. Le couple (V, ρ) définit un faisceau G_K -équivariant en E -modules à droites \underline{V} sur X_E dont le faisceau sous-jacent est le faisceau constant de valeur V . Le faisceau $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ est un faisceau équivariant en E -espaces vectoriels. Alors,*

$$\begin{aligned} \text{Rep}_E(G_K) &\xrightarrow{\sim} {}^0 \text{Fib}_{X_E}^{G_K} \\ (V, \rho) &\longmapsto \underline{V} \otimes_E \underline{\mathcal{O}}_{X_E} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^0 \text{Fib}_{X_E}^{G_K} &\xrightarrow{\sim} \text{Rep}_E(G_K) \\ \underline{\mathcal{E}} &\longmapsto H^0(X_E, \underline{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

sont deux équivalences inverses où l'action G_K sur les sections globales est donnée par la structure équivariante sur $\underline{\mathcal{E}}$.

Le point (1) résulte du théorème de classification des fibrés 12.8, de ce que $\text{Aut}(\mathcal{O}_{X_E}) = E^\times$ avec comme action induite de G_K provenant de la structure équivariante canonique l'action triviale et de la proposition 14.15. Le point (2) n'est qu'une reformulation du point (1). \square

14.5.3. *Classification des fibrés Galois équivariants semi-stables de pente quelconque lorsque $k_E \subset k_K$.* Notons k_E le corps résiduel de E . Supposons que k_E se plonge dans k_K le corps résiduel de K (on ne fixe pas un tel plongement).

Le choix d'un plongement $k_E \subset k_K$ permet de définir la E -algèbre graduée P_{E, π_E} avec action de G_K de telle manière que $X_E = \text{Proj}(P_{E, \pi_E})$ avec son action de G_K (14.2).

Pour $h \geq 1$, on dispose également d'une action de G_K sur la E -algèbre graduée $P_{E_h, \pi} = \bigoplus_{d \geq 0} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^d}$. Lorsque $h = 1$, l'action déduite sur $X_E = \text{Proj}(P_{E, \pi})$ est l'action précédente déduite de l'action de G_K sur $X_{\mathbb{Q}_p}$ et de la formule $X_E = X_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Lorsque $h \geq 1$, notons E_h une extension non-ramifiée de degré h de E . Il y a alors une action de G_K sur E_h indépendante

du choix d'un plongement de k_E dans k_K (car le groupe de Galois de $E_h|E$ est abélien). L'action de $\sigma \in G_K$ sur $X_{E_h} = X_E \otimes_E E_h$ déduite de l'action sur P_{E_h, π_E} est alors $\sigma \otimes \sigma$.

Pour $d \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d) = \widetilde{P_{E_h, \pi_E}}[d]$$

est alors canoniquement muni d'une structure de fibré G_K -équivariant pour l'action tordue de G_K sur X_{E_h} précédente. Cela résulte de ce que le module gradué $P_{E_h, \pi}[d]$ est muni d'une action semi-linéaire de G_K (semi-linéaire relativement à l'action de G_K sur P_{E_h, π_E}). Le fibré

$$\mathcal{O}_{X_E}(d, h) := \pi_{E_h, E*} \mathcal{O}_{X_{E_h}}(d)$$

est donc également muni canoniquement d'une structure G_K -équivariante sur X_E . On vérifie que cette structure équivariante ne dépend pas canoniquement du choix fait du plongement de k_E dans k_K .

Définition 14.20. *Supposons que le corps résiduel de E se plonge dans celui de K . Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, on note $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda) \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$ muni de sa structure G_K -équivariante canonique définie précédemment.*

Remarque 14.21. *Le fibré $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda)$ pour $\lambda \neq 0$ dépend du choix d'une uniformisante π_E de E ; deux choix différents fournissent des fibrés isomorphes mais non canoniquement isomorphes. Lorsqu'on ajoute l'action de G_K , deux choix différents d'uniformisante donnent des fibrés équivariants $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda)$ qui ne sont pas isomorphes en général. Cependant on vérifie que si k_K contient une clôture algébrique de \mathbb{F}_p alors les fibrés équivariants associés à ces choix sont (non canoniquement) isomorphes.*

Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ soit D_λ l'algèbre à division d'invariant λ sur E . Si $\lambda = d/h$ avec $(d, h) = 1$ et $h \geq 1$ on définit une action de $\text{Gal}(E_h|E)$ sur D_λ de la façon suivante. Notons $D_\lambda = E_h[\Pi]$ avec $\Pi^h = \pi_E$ et pour $x \in E_h$, $\Pi x \Pi^{-1} = \sigma_E(x)$. L'action est alors

$$\begin{aligned} \text{Gal}(E_h|E) &\longrightarrow \text{Aut}(D_\lambda) \\ \sigma_E &\longmapsto [y \mapsto \Pi y \Pi^{-1}]. \end{aligned}$$

Par composition cela définit une action

$$G_K \longrightarrow \text{Gal}(E_h|E) \longrightarrow \text{Aut}(D_\lambda)$$

qui est triviale si le corps résiduel de K contient \mathbb{F}_{q^h} et ne dépend pas du choix d'un plongement du corps résiduel de E dans celui de K (car $\text{Gal}(E_h|E)$ est abélien).

Proposition 14.22. *Supposons que le corps résiduel de E se plonge dans celui de K . Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, soit ${}^\lambda \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ la catégorie des fibrés galois équivariants semi-stables de pente λ . Soit $\text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(G_K)$ la catégorie des représentations semi-linéaires continues de G_K à valeurs dans un D_λ^{opp} -espace vectoriel de dimension finie.*

(1) *Il y a une équivalence de catégories*

$$\begin{aligned} \text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(G_K) &\xrightarrow{\sim} {}^\lambda \text{Fib}_{X_E}^{G_K} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda)) \overset{G_K}{\wedge} \rho. \end{aligned}$$

(2) *L'équivalence précédente se réécrit de la façon suivante. L'action de G_K sur D_λ définit un faisceau G_K équivariant en anneaux \underline{D}_λ sur X_E , le faisceau sous-jacent étant le faisceau constant de valeur D_λ . Le couple (V, ρ) définit un faisceau G_K -équivariant en \underline{D}_λ -modules à droites \underline{V} dont le faisceau sous-jacent est le faisceau constant de valeur V . Le faisceau $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda)$ est un faisceau G_K -équivariant en \underline{D}_λ -modules. Alors,*

$$\begin{aligned} \text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(G_K) &\xrightarrow{\sim} {}^\lambda \text{Fib}_{X_E}^{G_K} \\ (V, \rho) &\longmapsto \underline{V} \otimes_{\underline{D}_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^\lambda \text{Fib}_{X_E}^{G_K} &\xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(G_K) \\ \underline{\mathcal{E}} &\longmapsto H^0(X_E, \underline{\mathcal{E}} \otimes \underline{\mathcal{O}}_{X_E}(-\lambda)) \end{aligned}$$

sont deux équivalences inverses où l'action de D_λ^{opp} sur $H^0(X_E, \underline{\mathcal{E}} \otimes \underline{\mathcal{O}}_{X_E}(-\lambda))$ est donnée par $D_\lambda^{\text{opp}} = \text{End}(\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(-\lambda))$ et celle de G_K par la structure équivariante sur $\underline{\mathcal{E}} \otimes \underline{\mathcal{O}}_{X_E}(-\lambda)$.

Démonstration. Le point (1) résulte du théorème de classification des fibrés 12.8, de ce que $\text{Aut}(\underline{\mathcal{O}}_{X_E}) = D_\lambda$ avec comme action induite de G_K provenant de la structure équivariante canonique l'action triviale et de la proposition 14.15. Le point (2) n'est qu'une reformulation du point (1). \square

Remarque 14.23. Si le corps résiduel de K contient une clôture algébrique de \mathbb{F}_p , l'action de G_K sur D_λ est triviale et $\text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(G_K)$ est la catégorie des représentation linéaires continues de G_K à valeurs dans un D_λ^{opp} -espaces vectoriel de dimension finie.

14.5.4. *Extensions équivariantes de fibrés.* Soit $\widetilde{X_E/G_K}$ le topos des faisceaux G_K -équivariants sur $(X_E)_{\text{Zar}}$. Le faisceau structural $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ est canoniquement un faisceau d'anneaux équivariant et définit donc un anneau $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ dans $\widetilde{X_E/G_K}$. Il y a alors un morphisme de topos annelés

$$\pi : (\widetilde{X_E}, \underline{\mathcal{O}}_{X_E}) \longrightarrow (\widetilde{X_E/G_K}, \underline{\mathcal{O}}_{X_E}).$$

qui est la « projection sur le quotient ». Ce morphisme s'inscrit dans un diagramme commutatif de topos annelés

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X_E}, \underline{\mathcal{O}}_{X_E}) & \xrightarrow{\pi} & (\widetilde{X_E/G_K}, \underline{\mathcal{O}}_{X_E}) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ (\text{Ens}, E) & \xrightarrow{h} & (BG_K, E) \end{array}$$

où Ens désigne le topos des ensembles et BG_K celui des G_K -ensembles. Soient maintenant $\underline{\mathcal{E}}_1$ et $\underline{\mathcal{E}}_2$ deux $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ -modules dans $\widetilde{X_E/G_K}$ i.e. deux $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ -modules G_K -équivariants. Notons $\mathcal{E}_1 = \pi^* \underline{\mathcal{E}}_1$ et $\mathcal{E}_2 = \pi^* \underline{\mathcal{E}}_2$ les $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ -modules sous-jacents. Notant $\mathcal{H}om$ pour les Hom internes, on a

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{O}}_{X_E}}(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2) &= R\Gamma(\widetilde{X_E/G_K}, R\mathcal{H}om(\underline{\mathcal{E}}_2, \underline{\mathcal{E}}_2)) \\ &= R\Gamma(BG_K, Rg_* R\mathcal{H}om(\underline{\mathcal{E}}_2, \underline{\mathcal{E}}_2)) \end{aligned}$$

Mais si \mathcal{F} est un $\underline{\mathcal{O}}_{X_E}$ -module la flèche de changement de base associée au diagramme précédent

$$h^* Rg_* \mathcal{F} \longrightarrow Rf_* \pi^* \mathcal{F}$$

est un isomorphisme. En particulier,

$$h^* Rg_* R\mathcal{H}om(\underline{\mathcal{E}}_2, \underline{\mathcal{E}}_2) = R\mathcal{H}om_{\underline{\mathcal{O}}_{X_E}}(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2).$$

De cela on déduit l'existence d'une suite spectrale du type Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G_K, \text{Ext}_{\underline{\mathcal{O}}_{X_E}}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2)) \implies \text{Ext}_{\underline{\mathcal{O}}_{X_E}}^{p+q}(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2).$$

où $H^p(G_K, -)$ désigne la cohomologie du groupe G_K vu comme groupe abstrait. Malheureusement, cette suite spectrale n'est pas exploitable telle quelle car nous avons mis une condition de continuité dans la définition de nos fibrés G_K -équivariants. On dispose tout de même du résultat qui suit qui s'interprète comme étant la suite des termes de bas degrés d'une telle suite spectrale hypothétique qui tiendrait compte de la condition de continuité.

Soient donc $\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2 \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ de fibrés sous-jacents $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \text{Fib}_{X_E}$. Pour tout $q \geq 0$, $\text{Ext}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2)$ est muni d'une action de G_K . Si pour $\sigma \in G_K$, $u_\sigma : \sigma^* \underline{\mathcal{E}}_1 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{E}}_1$ et $v_\sigma : \sigma^* \underline{\mathcal{E}}_2 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{E}}_2$ sont les actions de σ associées aux structures équivariantes alors l'action de σ sur $\text{Ext}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2)$ est donnée par

$$\text{Ext}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2) \xrightarrow{\sigma^*} \text{Ext}^q(\sigma^* \underline{\mathcal{E}}_1, \sigma^* \underline{\mathcal{E}}_2) \xrightarrow{(u_\sigma^{-1})^*} \text{Ext}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \sigma^* \underline{\mathcal{E}}_2) \xrightarrow{(v_\sigma)^*} \text{Ext}^q(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2).$$

On a alors

$$\mathrm{Hom}(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^{G_K}.$$

Munissons $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ de la topologie induite par le plongement suivant

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{B_{dR}^+ \otimes E}(\widehat{\mathcal{E}}_{1,\infty}, \widehat{\mathcal{E}}_{2,\infty})$$

dans un $B_{dR}^+ \otimes E$ -module libre de rang fini. En fait, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est un sous-espace de Banach de l'espace de Frechet $\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+ \otimes E}(\widehat{\mathcal{E}}_{1,\infty}, \widehat{\mathcal{E}}_{2,\infty})$. Plus précisément, si $t \in (B_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\varphi=p}$ est associé au point ∞ de $X_{\mathbb{Q}_p}$, le lieu d'annulation de t dans X_E est $\{\infty_\tau\}_{\tau: E \hookrightarrow \bar{K}}$. Soit $D = \sum_\tau [\infty_\tau] \in \mathrm{Div}(X_E)$. Alors, pour $k \gg 0$,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2(-kD)) = 0$$

et donc si $W = \mathrm{Hom}_{B_{dR}^+ \otimes E}(\widehat{\mathcal{E}}_{1,\infty}, \widehat{\mathcal{E}}_{2,\infty})$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \hookrightarrow W/t^k W$$

où $W/t^k W$ est un espace de Banach comme $B_{dR}^+/t^k B_{dR}^+$ -module libre de rang fini.

Proposition 14.24. *Il y a une suite exacte de E -espaces vectoriels*

$$0 \rightarrow H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2) \rightarrow H^0(G_K, \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)) \rightarrow H^2(G_K, \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$$

où la cohomologie galoisienne est la cohomologie continue. Si $(c_\sigma)_\sigma \in Z^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2))$ est un 1-cocycle continu, l'image de la classe de $(c_\sigma)_\sigma$ dans $\mathrm{Ext}^1(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2)$ se décrit de la façon suivante. Soit $\alpha = (\alpha_\sigma)_\sigma \in Z^1(G_K, \mathrm{Aut}(\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_1))$ défini par $\alpha_{\sigma|\mathcal{E}_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et $\alpha_{\sigma|\mathcal{E}_1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1} + c_\sigma$,

$$\alpha_\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2} & c_\sigma \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1} \end{pmatrix}.$$

Alors la classe de l'extension équivariante associée est

$$0 \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_2 \longrightarrow (\underline{\mathcal{E}}_2 \oplus \underline{\mathcal{E}}_1) \overset{G_K}{\wedge} \alpha \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Cela se démontre sans difficulté en explicitant les cocycles et diverses applications de bord. \square

Voici le corollaire que nous utiliserons.

Corollaire 14.25. *Notons μ_{max} et μ_{min} les plus grandes et plus petites pentes de Harder-Narasimhan. Supposons que $\mu_{max}(\mathcal{E}_1) \leq \mu_{min}(\mathcal{E}_2)$. Il y a alors un isomorphisme*

$$H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\underline{\mathcal{E}}_1, \underline{\mathcal{E}}_2).$$

Démonstration. On a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = H^1(X, \mathcal{E}_1^\vee \otimes \mathcal{E}_2)$. Puisque $\mu_{max}(\mathcal{E}_1) \leq \mu_{min}(\mathcal{E}_2)$, d'après le théorème de classification des fibrés, $\mathcal{E}_1^\vee \otimes \mathcal{E}_2$ est isomorphe à une somme directe de fibrés de la forme $\mathcal{O}_X(\lambda)$ avec $\lambda \geq 0$. On a donc $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$ et on conclut grâce à la proposition précédente. \square

15. FIBRÉS ÉQUIVARIANTS DE DE RHAM

On reprend les hypothèses et notations de la section 14.1.

15.1. Modifications de fibrés.

Définition 15.1. *Soit $S \subset |X_E|$ un sous-ensemble fini de points fermés stable sous G_K et $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_{X_E}^{G_K}$. Une modification équivariante de \mathcal{E} en S est un couple (\mathcal{E}', u) où $\mathcal{E}' \in \mathrm{Fib}_{X_E}^{G_K}$ et*

$$u : \mathcal{E}'_{|X_E \setminus S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{|X_E \setminus S}.$$

Proposition 15.2. *Soient S et \mathcal{E} comme dans la définition précédente. Pour $x \in S$, notons t_x une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}}_{X_E, x}$. L'application*

$$(\mathcal{E}', u) \mapsto u \left(\bigoplus_{x \in S} \widehat{\mathcal{E}}'_x \right)$$

induit une bijection entre les classes d'isomorphismes de modifications équivariantes de \mathcal{E} et les sous-réseaux de $\bigoplus_{x \in S} \widehat{\mathcal{E}}_x[\frac{1}{t_x}]$ stables sous l'action de G_K .

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.1. □

Une modification de fibrés ne change par le rang du fibré. On vérifie également facilement le lemme qui suit.

Lemme 15.3. *Soit (\mathcal{E}', u) une modification de \mathcal{E} en S et $\Lambda = \bigoplus_{x \in S} \Lambda_x \subset \bigoplus_{x \in S} \widehat{\mathcal{E}}_x[\frac{1}{t_x}]$ le réseau associé. Alors,*

$$\deg(\mathcal{E}') = \deg(\mathcal{E}) + \sum_{x \in S} [\Lambda_x : \widehat{\mathcal{E}}_x].$$

15.2. Polygone de Hodge d'une modification. Soit $\mathcal{E} \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ de rang n et $S \subset |X_E|$ comme dans la section précédente. Notons

$$(\mathbb{Z}^n)^+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_1 \geq \dots \geq a_n\}.$$

Pour tout $x \in S$, il y a une application de l'ensemble des réseaux de $\widehat{\mathcal{E}}_x[\frac{1}{t_x}]$ à valeurs dans $(\mathbb{Z}^n)^+$. Elle donne la position relative d'un réseau relativement à $\widehat{\mathcal{E}}_x$. Plus précisément, si $\Lambda \subset \widehat{\mathcal{E}}_x[\frac{1}{t_x}]$ est un réseau, il existe une base (e_1, \dots, e_n) de $\widehat{\mathcal{E}}_x$ telle que

$$\Lambda = \langle t_x^{a_1} e_1, \dots, t_x^{a_n} e_n \rangle, \quad (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^n)^+.$$

On associe alors à Λ le n -uplet (a_1, \dots, a_n) . On peut voir les éléments de $(\mathbb{Z}^n)^+$ comme des polygones concaves à pentes entières. À $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^n)^+$ on associe le polygone concave d'origine $(0, 0)$, d'extrémité $(n, \sum_i a_i)$ et de pente a_i sur le segment $[i-1, i]$. Si (\mathcal{E}', u) est une modification équivariante de E en S on peut donc associer à tout $x \in S$, un polygone concave $\text{Hdg}(\mathcal{E}', u)_x$ que l'on appelle polygone de Hodge. La famille de polygones de Hodge $(\text{Hdg}(\mathcal{E}', u)_x)_{x \in S}$ est un invariant plus fin que le degré de la modification. Ainsi,

$$\deg \mathcal{E}' = \deg \mathcal{E} - \sum_{x \in S} \text{ordonnée terminale de } \text{Hdg}(\mathcal{E}', u)_x.$$

15.3. B_{dR}^+ et B_{dR} -représentations plates. Rappelons que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $B_{dR}^{G_K} = K$ et que $(\text{Fil}^i B_{dR})^{G_K} = K$ si $i \leq 0$ et 0 sinon. Il en découle ([20] 1.6.1) que si $M \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et $M' \in \text{Rep}_{B_{dR}}$ alors

$$\begin{aligned} M^{G_K} \otimes_K B_{dR}^+ &\longrightarrow M \\ M'^{G_K} \otimes_K B_{dR} &\longrightarrow M \end{aligned}$$

sont injectifs. Notons Vect_K la catégorie des K -espaces vectoriels de dimension finie. On a donc deux foncteurs adjoints

$$\text{Vect}_K \begin{array}{c} \xrightarrow{-\otimes B_{dR}^+} \\ \xleftarrow{(-)^{G_K}} \end{array} \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$$

et

$$\text{Vect}_K \begin{array}{c} \xrightarrow{-\otimes B_{dR}} \\ \xleftarrow{(-)^{G_K}} \end{array} \text{Rep}_{B_{dR}}(G_K).$$

De plus le foncteur $(-)\otimes B_{dR}^+$ est pleinement fidèle d'image essentielle les $W \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ telles que

$$W^{G_K} \otimes_K B_{dR}^+ \xrightarrow{\sim} W$$

i.e. W est engendré par ses invariants sous G_K . De même, le foncteur $(-)\otimes B_{dR}$ est pleinement fidèle d'image essentielle les $W \in \text{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ telles que

$$W^{G_K} \otimes_K B_{dR} \xrightarrow{\sim} W$$

ou encore,

$$\dim_K W^{G_K} = \dim_{B_{dR}} W.$$

Définition 15.4.

- (1) Une B_{dR}^+ -représentation W est plate si $W^{G_K} \otimes_K B_{dR}^+ \rightarrow W$ est un isomorphisme.
- (2) Une B_{dR} -représentation W est plate si $W^{G_K} \otimes_K B_{dR} \rightarrow W$ est un isomorphisme.
- (3) Une B_{dR}^+ -représentation W est génériquement plate si la B_{dR} -représentation $W[\frac{1}{t}]$ est plate.

Remarque 15.5. Soit $K_\infty|K$ l'extension cyclotomique. Dans [21] le second auteur a associé à une B_{dR} -représentation un module à connexion sur $K_\infty((t))$ et montré que la B_{dR} -représentation est plate si et seulement si ce module à connexion est engendré par ses section horizontales. Cela justifie la terminologie « plate » utilisée.

Proposition 15.6.

- (1) Une B_{dR} -représentation est plate si et seulement si $\dim_K W^{G_K} = \dim_{B_{dR}} W$.
- (2) Une B_{dR}^+ -représentation W est plate si et seulement si $\dim_K (W/tW)^{G_K} = \text{rg}_{B_{dR}^+}(W)$ c'est à dire W/tW est une C -représentation de Hodge-Tate de poids 0.

Démonstration. Le point (1) a déjà été vérifié auparavant. Le point (2) est une conséquence de ce que pour tout entier n ,

$$\ker(H^1(G_K, \text{GL}_n(B_{dR}^+)) \rightarrow H^1(G_K, \text{GL}_n(C))) = \{*\}$$

(noyau au sens des ensembles pointés). Cela résulte de ce que pour $i \geq 1$, $\text{Id} + t^i M_n(B_{dR}^+)/\text{Id} + t^{i+1} M_n(B_{dR}^+) \simeq M_n(C(i))$, or $H^1(G_K, C(i)) = 0$ et donc $H^1(G_K, M_n(C(i))) = 0$. \square

Les considérations précédentes montrent que le foncteur $V \mapsto V \otimes_K B_{dR}$, resp. $V \mapsto V \otimes_K B_{dR}^+$, induit une équivalence entre Vect_K et les B_{dR} -représentations plates, resp. les B_{dR}^+ -représentations plates. On va maintenant classifier les B_{dR}^+ -représentations génériquement plates.

Appelons filtration d'un K -espace vectoriel de dimension finie V une filtration décroissante $\text{Fil}^\bullet V$ vérifiant $\text{Fil}^i V = V$ pour $i \ll 0$ et $\text{Fil}^i V = 0$ pour $i \gg 0$. Pour une telle filtration on définit une filtration décroissante sur $V \otimes_K B_{dR}$ en posant

$$\text{Fil}^n(V \otimes_K B_{dR}) = \sum_{i+j=n} \text{Fil}^i V \otimes_K \text{Fil}^j B_{dR}.$$

Cette filtration est formée de B_{dR}^+ -réseaux G_K -invariants dans $V \otimes_K B_{dR}$. De plus,

$$\text{Fil}^n(V \otimes_K B_{dR}) = t^n \text{Fil}^0(V \otimes_K B_{dR}).$$

Proposition 15.7. Soit V un K -espace vectoriel de dimension finie. L'application

$$\text{Fil}^\bullet V \longmapsto \text{Fil}^0(V \otimes_K B_{dR})$$

induit une bijection entre les filtrations de V et les B_{dR}^+ -réseaux stables sous G_K dans $V \otimes_K B_{dR}$. L'inverse de cette bijection associe à un réseau W la filtration définie par

$$\text{Fil}^n V = (t^n W)^{G_K}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Soit $\text{Fil}^\bullet V$ une filtration de V . Il y a une inclusion pour tout n

$$\text{Fil}^n V \subset (\text{Fil}^n(V \otimes_K B_{dR}))^{G_K}.$$

Puisque $V \otimes B_{dR} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^n(V \otimes B_{dR})$, pour $n \ll 0$ cette inclusion est une égalité. Montrons par récurrence descendante sur n que c'est toujours le cas. Supposons donc vérifié que $\text{Fil}^n V = (\text{Fil}^n(V \otimes B_{dR}))^{G_K}$. Puisque

$$gr^n(V \otimes B_{dR}) = \bigoplus_{i+j=n} gr^i V \otimes gr^j B_{dR}$$

et que d'après Tate

$$(gr^j B_{dR})^{G_K} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ K & \text{si } j = 0, \end{cases}$$

on a

$$(gr^n(V \otimes B_{dR}))^{G_K} = gr^n V.$$

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^{n+1} V & \longrightarrow & \text{Fil}^n V & \longrightarrow & gr^n V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Fil}^{n+1}(V \otimes B_{dR}))^{G_K} & \longrightarrow & (\text{Fil}^n(V \otimes B_{dR}))^{G_K} & \longrightarrow & (gr^n(V \otimes B_{dR}))^{G_K} \end{array}$$

Le lemme du serpent permet de conclure que $\text{Fil}^{n+1} V = (\text{Fil}^{n+1}(V \otimes B_{dR}))^{G_K}$.

Dans l'autre direction, soit W un B_{dR}^+ -réseau galois invariant dans $V \otimes B_{dR}$ et $\text{Fil}^\bullet V = (t^\bullet W)^{G_K}$ la filtration induite de V . On veut montrer que l'inclusion

$$\sum_{i+j=0} (t^i W)^{G_K} \otimes \text{Fil}^j B_{dR} \subset W$$

est une égalité. Il suffit de montrer qu'il existe des entiers $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$W \simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{Fil}^{a_i} B_{dR}$$

comme B_{dR}^+ -représentations. On procède pour cela par récurrence sur $\dim V$. Le cas $\dim V = 1$ est évident. Soit donc $\dim V > 1$, $V' \subset V$ un sous-espace de dimension $\dim V - 1$ et $V'' = V/V'$. Posons $W' = W \cap V' \otimes B_{dR}$ et $W'' = \text{Im}(W \rightarrow V'' \otimes B_{dR})$. On a donc une suite exacte de B_{dR}^+ -représentations

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à V' et W' , il existe $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tels que $W' \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \text{Fil}^{a_i} B_{dR}$. Soit $a_n \in \mathbb{Z}$ tel que $W'' \simeq \text{Fil}^{a_n} B_{dR}$. Puisque $W[1/t] \simeq B_{dR}^n$, la classe de l'extension précédente est donnée par un élément de

$$\ker(H^1(G_K, \bigoplus_{i=1}^{n-1} t^{a_i - a_n} B_{dR}^+) \longrightarrow H^1(G_K, B_{dR}^{n-1})).$$

Or ce noyau est trivial car on vérifie aisément que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\ker(H^1(G_K, \text{Fil}^k B_{dR}) \rightarrow H^1(G_K, B_{dR})) = 0.$$

□

La proposition qui suit se déduit des considérations précédentes. Le point (2) résulte soit de la démonstration précédente, soit du choix d'un scindage de la filtration de notre espace vectoriel.

Proposition 15.8.

- (1) Les foncteurs $(V, \text{Fil}^\bullet V) \mapsto \text{Fil}^0(V \otimes B_{dR})$ et $W \mapsto ((W[1/t]^{G_K}, (t^\bullet W)^{G_K})$ induisent des équivalences inverses de catégories entre K -espaces vectoriels de dimension finie filtrés et B_{dR}^+ -représentations génériquement plates.
- (2) Une B_{dR}^+ -représentation W de rang n est génériquement plate si et seulement si il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $W \simeq \bigoplus_{i=1}^n t^{a_i} B_{dR}^+$.

15.4. L'enveloppe abélienne des B_{dR}^+ -représentation génériquement plates.

Définition 15.9.

- (1) On note \mathcal{C}_{dR} la catégorie des B_{dR}^+ -modules de type fini munis d'une action semi-linéaire de G_K isomorphes aux objets de la forme

$$\bigoplus_{i=1}^n \text{Fil}^{a_i} B_{dR} / \text{Fil}^{b_i} B_{dR}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad b_i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad a_i \leq b_i$$

où on pose $\text{Fil}^\infty B_{dR} = 0$.

- (2) On note $\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$ la catégorie des $K[T]$ -modules gradués de type fini.
 (3) On note VectFil_K la catégorie des K -espaces vectoriels de dimension finie filtrés.

Si $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \in \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$ on a les propriétés suivantes :

- $M_i = 0$ pour $i \ll 0$,
- pour tout i , $\dim_K M_i < +\infty$,
- il y a un opérateur $M_i \xrightarrow{\times T} M_{i+1}$,
- pour $i \gg 0$, $\times T : M_i \xrightarrow{\sim} M_{i+1}$.

Réciproquement, étant donnée une famille de K -espaces vectoriels de dimension finie $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ munie d'opérateurs $M_i \rightarrow M_{i+1}$ satisfaisant les propriétés précédentes, on déduit un objet de $\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$.

Il y a un foncteur

$$\text{VectFil}_K \longrightarrow \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$$

qui à l'espace vectoriel filtré $(V, \text{Fil}^\bullet V)$ associe $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ où

$$M_i = \text{Fil}^{-i} V$$

et

$$\times T : M_i \longrightarrow M_{i+1}$$

est l'inclusion $\text{Fil}^{-i} V \hookrightarrow \text{Fil}^{-i-1} V$. Il y a également un foncteur dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} &\longrightarrow \text{VectFil}_K \\ M &\longmapsto (M_\infty, \text{Fil}^\bullet M_\infty) \end{aligned}$$

où

$$M_\infty = \varinjlim_{i \geq 0} M_i,$$

les applications de transition étant données par $\times T : M_i \rightarrow M_{i+1}$ et

$$\text{Fil}^k M_\infty = \text{Im}(M_k \longrightarrow M_\infty), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La proposition qui suit est immédiate.

Proposition 15.10.

- (1) Les deux foncteurs

$$\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{VectFil}_K$$

sont adjoints l'un de l'autre.

- (2) Le foncteur $\text{VectFil}_K \rightarrow \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$ est pleinement fidèle d'image essentielle les $K[T]$ -modules gradués sans torsion.
 (3) Le morphisme d'adjonction $\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} \rightarrow \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$ associe à M le module gradué M/M_{tor} où M_{tor} est le sous-module de torsion.

Définissons maintenant un foncteur

$$\mathcal{C}_{dR} \longrightarrow \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$$

en associant à $W \in \mathcal{C}_{dR}$ le module gradué $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ avec

$$M_i = (W(-i))^{G_K}$$

et

$$\times T : (W(-i))^{G_K} \xrightarrow{\times t} (W(-i-1))^{G_K}.$$

On définit maintenant un foncteur dans l'autre sens

$$\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} \longrightarrow \mathcal{C}_{dR}$$

en associant à $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ le B_{dR}^+ -module

$$M \otimes_{K[T]} B_{dR}^+$$

où :

- le morphisme de K -algèbres $K[T] \rightarrow B_{dR}^+$ est celui qui envoie T sur t ,
- l'action de G_K est obtenue en faisant agir G_K sur M_i via la puissance i -ème du caractère cyclotomique.

Si $(V, \text{Fil}^\bullet V) \in \text{VectFil}_K$ et $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^{-i} V$ est le module gradué associé, il y a un isomorphisme de B_{dR}^+ -représentations

$$\begin{aligned} M \otimes_{K[T]} B_{dR}^+ &\xrightarrow{\sim} \text{Fil}^0(V \otimes B_{dR}) \\ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \otimes 1 &\longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \otimes t^i. \end{aligned}$$

Via le plongement $\text{VectFil}_K \hookrightarrow \text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}}$, le foncteur $\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} \rightarrow \mathcal{C}_{dR}$ étend donc celui étudié dans la section précédente.

Proposition 15.11. *Les deux foncteurs précédents*

$$\text{Mod}_{K[T]}^{\text{Gr}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{C}_{dR}$$

sont des équivalences inverses de catégories. En particulier, \mathcal{C}_{dR} est une catégorie abélienne. Plus précisément, c'est la sous-catégorie abélienne de la catégorie des B_{dR}^+ -module munis d'une action semi-linéaire de G_K engendrée par les B_{dR}^+ -représentations génériquement plates.

15.5. Fibrés de de Rham. Notons I_E les plongements de E dans \overline{K} . Rappelons (cf. 14.1.1) que l'on a défini une application compatible à l'action de G_K

$$\begin{aligned} I_E &\hookrightarrow |X_E| \\ \tau &\longmapsto \infty_\tau. \end{aligned}$$

Définition 15.12. *Un fibré équivariant $\mathcal{E} \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ est de de Rham si la B_{dR}^+ -représentation*

$$\widehat{\mathcal{E}}_\infty := \bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_{\infty_{E,\tau}}$$

est génériquement plate.

Proposition 15.13. *Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés équivariants de de Rham sur X_E et celle des couples $(\mathcal{E}, \text{Fil}^\bullet)$ où*

- $\mathcal{E} \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ vérifie $\bigoplus_{\tau \in I_E} (\mathcal{E}_{\infty_\tau} \otimes k(\infty_\tau)) \in \text{Rep}_C(G_K)$ est Hodge-Tate de poids 0,
- Fil^\bullet est une filtration du $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre $(\mathcal{E}_{\infty_{E,\tau}} \otimes k(\infty_{E,\tau}))^{G_K}$ par des sous- $K \otimes E$ -modules.

L'équivalence associe au couple $(\mathcal{E}, \text{Fil}^\bullet)$ la modification équivariante de \mathcal{E} en $\{\infty_\tau\}_{\tau \in I_E}$ associée au réseau $\text{Fil}^0\left(\bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_\infty\left[\frac{1}{t_{E,\tau}}\right]\right)$ où $t_{E,\tau}$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_{X_E, \infty_\tau}$.

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 15.8, 15.6 et 15.2. \square

Il y a un isomorphisme de K -algèbres

$$K \otimes E \xrightarrow{\sim} \prod_{\bar{\tau} \in G_K \backslash I_E} K_{E,\tau}$$

où $K_{E,\tau} = \overline{K}^{\text{Stab}_{G_K}(\tau)}$. Dès lors, un $K \otimes E$ -module libre filtré comme dans la proposition précédente est la donnée pour tout $\bar{\tau} \in G_K \backslash I_E$ d'un $K_{E,\tau}$ -espace vectoriel filtré $(V_\tau, \text{Fil}^\bullet V_\tau)$ tel que pour $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 \in I_E$ on ait $\dim V_{\tau_1} = \dim V_{\tau_2}$.

Appelons polygone de Hodge d'un espace vectoriel filtré $(V, \text{Fil}^\bullet V)$ le polygone convexe d'origine $(0, 0)$, de pentes entières $i \in \mathbb{Z}$, $\dim gr^i V$ étant la multiplicité de la pente i . On note

$$t_H(V, \text{Fil}^\bullet V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim gr^i V$$

l'ordonnée de son point terminal. Maintenant, si $(V, \text{Fil}^\bullet V)$ est un $K \otimes E$ -module libre filtré comme précédemment, pour tout $\tau \in I_E$ on peut définir

$$\text{Hdg}(V, \text{Fil}^\bullet V)_\tau$$

qui est le polygone de Hodge du \overline{K} -espace vectoriel filtré $(V, \text{Fil}^\bullet V) \otimes_{K \otimes E, \text{Id} \otimes \tau} \overline{K}$. On a donc

$$\text{Hdg}(V, \text{Fil}^\bullet V)_\tau = \text{Hdg}(V, \text{Fil}^\bullet V)_{\tau'}$$

si τ et τ' sont dans la même G_K -orbite.

On vérifie alors la proposition suivante.

Proposition 15.14. *Soit \mathcal{E}' un fibré équivariant de de Rham et $(\mathcal{E}, \text{Fil}^\bullet)$ le couple associé par la proposition 15.13. Notons (\mathcal{E}', u) la modification associée de \mathcal{E}' en $\{\infty_\tau\}_{\tau \in I_E}$. Soient $(\text{Hdg}(\mathcal{E}', u)_{\infty_\tau})_{\tau \in I_E}$ les polygones de Hodge de la modification (15.2). Soit $V = (\mathcal{E}_{\infty_{\tau_E}} \otimes k(\infty_E))^{G_K}$. Alors, pour tout $\tau \in I_E$,*

$$\text{Hdg}(\mathcal{E}', u)_{\infty_\tau}(\bullet) = -\text{Hdg}(V, \text{Fil}^\bullet V)_\tau(\bullet).$$

En particulier

$$\text{deg}(\mathcal{E}') = \text{deg}(\mathcal{E}) + \sum_{\tau \in I_E} t_H(V, \text{Fil}^\bullet V)_\tau.$$

15.6. Faisceaux cohérents de de Rham.

Définition 15.15. *Un faisceau cohérent G_K -équivariant $\underline{\mathcal{E}}$ sur X_E est de de Rham si sa fibre à l'infini, la représentation semi-linéaire $\bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_{\infty_\tau}$, est dans la catégorie \mathcal{C}_{dR} (def. 15.9).*

Bien sûr, tout fibré de de Rham est un faisceau cohérent de de Rham. La catégorie des faisceaux cohérents de de Rham est abélienne.

Proposition 15.16. *Soit $\underline{\mathcal{E}}$ un fibré G_K -équivariant sur X_E de fibré sous-jacent \mathcal{E} . Alors, $\mathcal{E}|_{X_E \setminus \{\infty_\tau\}_{\tau \in I_E}}$ est un fibré vectoriel.*

Proposition 15.17. *La catégorie des faisceaux cohérents équivariants de de Rham est équivalente à celle des triplets $(\underline{\mathcal{E}}, M, \alpha)$ où*

- $\underline{\mathcal{E}}$ est un fibré G_K -équivariant tel que $W = \bigoplus_{\tau \in I_E} \widehat{\mathcal{E}}_{\infty_\tau}$ soit une C -représentation de Hodge-Tate de poids 0,
- $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ est un $K \otimes E[T]$ -module gradué de type fini,
- si $M_\infty = \varinjlim_{i \geq 0} M_i$, $\alpha : M_\infty \xrightarrow{\sim} W^{G_K}$ est un isomorphisme de $K \otimes E$ -modules.

16. FIBRÉS CRISTALLINS ET LOG-CRISTALLINS : FAIBLEMENT ADMISSIBLE IMPLIQUE ADMISSIBLE

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ valué complet de valuation discrète à corps résiduel k_K parfait. On fixe une clôture algébrique \overline{K} de K et on note $C = \widehat{\overline{K}}$, $F = \text{Frac } \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$. Le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ est une clôture algébrique de k_K notée k . On note $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$ et $L = W(k)_{\mathbb{Q}}$. Ils sont munis du Frobenius σ qui se réduit sur Frob_p en caractéristique p .

La courbe $X := X_{\mathbb{Q}_p}$ est munie d'une action de G_K via l'action de celui-ci sur $B^+ := B_{\mathbb{Q}_p}^+$. Elle est de plus canoniquement munie d'un point à l'infini $\infty \in |X|$ invariant sous l'action de G_K . On a $\{\infty\} = V^+(t)$, $t \in (B^+)^{\varphi=p}$ étant une période de $\widehat{\mathbb{G}}_m$ sur \mathcal{O}_K . Notons

$$B_e = \Gamma(X_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{Q}_p}}) = (B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=p}.$$

et

$$B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_{\mathbb{Q}_p}, \infty}.$$

16.1. **L'anneau B_{\log}^+ .** Rappelons qu'il y a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : 1 + \mathfrak{m}_F &\xrightarrow{\sim} (B^+)^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto \log[x]. \end{aligned}$$

On a un scindage canonique $\mathcal{O}_F^{\times} = k^{\times} \times 1 + \mathfrak{m}_F$. Étendons le morphisme \mathcal{L} à \mathcal{O}_F^{\times} en posant

$$\mathcal{L}|_{k^{\times}} = 0.$$

Le morphisme de groupes \mathcal{L} définit alors un morphisme d'anneaux

$$\text{Sym}_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^{\times} \longrightarrow B^+.$$

Définition 16.1. *On note*

$$B_{\log}^+ = B^+ \otimes_{\text{Sym}_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^{\times}} \text{Sym}_{\mathbb{Z}} F^{\times}.$$

munie du morphisme

$$\mathcal{L} : F^{\times} \longrightarrow B_{\log}^+$$

étendant canoniquement $\mathcal{L} : \mathcal{O}_F^{\times} \rightarrow B_E^+$. On définit les opérateurs suivants.

(1) φ est l'unique automorphisme de $B_{E, \log}^+$ étendant φ sur B^+ et vérifiant

$$\varphi \circ \mathcal{L} = p\mathcal{L}.$$

(2) $N : B_{\log}^+ \rightarrow B_{\log}^+$ est l'unique B_E^+ -dérivation vérifiant : si $x \in F^{\times}$ est tel que $v(x) = 1$ alors

$$N(\mathcal{L}(x)) = 1.$$

(3) L'action de G_K sur B_{\log}^+ est l'unique extension de l'action sur B^+ telle que \mathcal{L} soit compatible à l'action de G_K : pour $\sigma \in G_K$ et $x \in F^{\times}$,

$$\mathcal{L}(x)^{\sigma} = \mathcal{L}(x^{\sigma-1}) + \mathcal{L}(x)$$

où $x^{\sigma-1} \in \mathcal{O}_F^{\times}$.

Le choix d'un élément $x \in F^{\times}$ vérifiant $v(x) = 1$ définit un isomorphisme

$$\begin{aligned} B^+[X] &\xrightarrow{\sim} B_{\log}^+ \\ X &\longmapsto \mathcal{L}(x). \end{aligned}$$

Via cet isomorphisme on a $\varphi(X) = pX$, $N(X) = 1$ et pour $\sigma \in G_K$, $X^{\sigma} = X + \mathcal{L}(x^{\sigma-1})$.

16.2. **Fibré équivariant associé à un (φ, N) -module.**

16.2.1. *Fibré équivariant associé à un φ -module.*

Définition 16.2. On note $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$ la catégorie des couples (D, φ) où D est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : D \xrightarrow{\sim} D$ un isomorphisme σ -linéaire.

On a défini dans la section 13.3 un foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \longrightarrow \text{Fib}_X.$$

Composé avec le foncteur extension des scalaires $\varphi\text{-Mod}_{K_0} \rightarrow \varphi\text{-Mod}_{B^+}$ cela définit un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X \\ (D, \varphi) &\longmapsto \left(\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B^+)^{\varphi=p^d} \right)^\sim. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que via l'action de G_K sur B^+ , le module gradué définissant $\mathcal{E}(D, \varphi)$ est munie d'une action de G_K semi-linéaire relativement à l'action sur $P_{\mathbb{Q}_p, p}$. Cela définit donc canoniquement une structure de fibré équivariant sur $\mathcal{E}(D, \varphi)$. On note

$$\begin{aligned} \varphi\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi) &\longmapsto \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \end{aligned}$$

le foncteur associé. En termes de B -paires,

$$\begin{aligned} \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi)) &= (D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \in \text{Rep}_{B_e}(G_K) \\ \widehat{\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi)}_\infty &= D \otimes_{K_0} B_{dR}^+ \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K) \end{aligned}$$

Lorsque k_K est algébriquement clos,

$$\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathcal{O}_{X_E}(-\lambda)^{m_\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de Dieudonné-Manin de λ dans (D, φ) . En général,

$$\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \left(\mathcal{O}_{X_E}(-\lambda)^{m_\lambda} \bigwedge^{G_K} \rho^\lambda \right)$$

où

$$\rho^\lambda : G_K \rightarrow \text{Gal}(k|k_K) \longrightarrow \text{GL}_{m_\lambda}(D_\lambda)$$

est un cocycle non-ramifié de G_K .

16.2.2. *Fibré équivariant associé à un (φ, N) -module.*

Définition 16.3. On note $(\varphi, N)\text{-mod}_{K_0}$ la catégorie des triplets (D, φ, N) où $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$, $N : D \rightarrow D$ est linéaire et vérifie $N\varphi = p\varphi N$.

Bien sûr, un tel opérateur N est nécessairement nilpotent. Soit $(D, \varphi, N) \in (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}$. Posons

$$\Gamma_\bullet(D, \varphi, N) = \bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B_{E, \log}^+)^{\varphi=p^d, N=0}.$$

C'est un module gradué sur

$$P_{\mathbb{Q}_p, p} = \bigoplus_{d \geq 0} (B_{\log}^+)^{\varphi=p^d, N=0}$$

muni d'une action semi-linéaire de G_K . Le choix d'un $x \in F^\times$ tel que $v(x) = 1$ détermine un isomorphisme

$$B^+[X] \xrightarrow{\sim} B_{\log}^+$$

pour lequel $N(X) = 1$. Cela définit pour tout $d \geq 0$ un isomorphisme

$$(4) \quad \begin{aligned} (D \otimes B^+)^{\varphi=p^d} &\xrightarrow{\sim} (D \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=p^d, N=0} \\ y &\longmapsto \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} N^i(y) \cdot X^i. \end{aligned}$$

Ces isomorphismes définissent un isomorphisme d'algèbres graduées

$$\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B^+)^{\varphi=p^d} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{\varphi=p^d, N=0}$$

Néanmoins cet isomorphisme n'est pas compatible à l'action de Galois. Plus précisément, si l'on pose

$$\ell\log_{x,\sigma} = \mathcal{L}(x^{\sigma-1}),$$

alors cela définit un cocycle

$$(\ell\log_{x,\sigma})_{\sigma \in G_K} \in Z^1(G_K, (B_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\varphi=p}).$$

Le choix d'un $y \in F^\times$ vérifiant $v(y) = 1$ différent de x change le cocycle précédent par un cobord :

$$\ell\log_{y,\sigma} = \ell\log_{x,\sigma} + \mathcal{L}(yx^{-1})^\sigma - \mathcal{L}(yx^{-1}).$$

Via l'isomorphisme (4) l'action de G_K sur $(D \otimes B^+)^{\varphi=p^d}$ est donnée par

$$y \mapsto \exp(-\ell\log_{x,\sigma} N)(y^\sigma).$$

Des considérations précédentes on déduit la proposition qui suit.

Proposition 16.4.

(1) Il y a un foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(-) : (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) &\longmapsto \left(\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{\varphi=p^d, N=0} \right)^\sim. \end{aligned}$$

(2) Après oubli de l'action de G_K on a

$$\mathcal{E}(D, \varphi, N) \simeq \mathcal{E}(D, \varphi).$$

(3) L'opérateur de monodromie $N : (D, \varphi) \rightarrow (D, p\varphi)$ définit un morphisme dans $\text{Fib}_X^{G_K}$

$$N : \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}(D, p\varphi) = \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \otimes \underline{\mathcal{O}}_X(-1).$$

Pour $x \in F^\times$ vérifiant $v(x) = 1$, on dispose d'un 1-cocycle

$$(\ell\log_{x,\sigma})_\sigma \in Z^1(G_K, H^0(X, \underline{\mathcal{O}}_X(1))).$$

Alors,

$$(\ell\log_{x,\sigma} \otimes \text{Id} \circ N)_{\sigma \in G_K} \in Z^1(G_K, \text{End}(\mathcal{E}(D, \varphi)))$$

est un 1-cocycle en endomorphismes nilpotents dans $\text{End}(\mathcal{E}(D, \varphi))$ qui définit un 1-cocycle

$$(\exp(-\ell\log_{x,\sigma} \otimes \text{Id} \circ N))_\sigma \in Z^1(G_K, \text{Aut}(\mathcal{E}(D, \varphi))).$$

Il y a alors un isomorphisme de fibrés G_K -équivariants

$$\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N) \simeq \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \underset{\wedge}{\overset{G_K}{\wedge}} (\exp(-\ell\log_{x,\sigma} \otimes \text{Id} \circ N))_\sigma.$$

Remarque 16.5. Supposons que l'on ait choisit $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_C)$ de telle manière que $x^{(0)} \in K^\times$. Soit E la courbe elliptique de Tate sur K telle que $E^{\text{rig}} = \mathbb{G}_m^{\text{rig}} / (x^{(0)})^\mathbb{Z}$. On a donc $T_p(E) = \{(\bar{y}_n)_{n \geq 0} \mid \bar{y}_n \in \overline{K}^\times / (x^{(0)})^\mathbb{Z}, \bar{y}_{n+1}^p = \bar{y}_n \text{ et } \bar{y}_0 = 0\}$ où l'on note \bar{y}_n la classe de $y_n \in \overline{K}^\times$ modulo $(x^{(0)})^\mathbb{Z}$. Il y a alors une suite exacte de représentation de G_K

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow T_p(E) \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \\ (\epsilon^{(n)})_{n \geq 0} &\longmapsto (\overline{\epsilon^{(n)}})_{n \geq 0} \\ (\bar{y}_n)_{n \geq 0} &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n \frac{v(y_n)}{v(x^{(0)})} \end{aligned}$$

On a alors $\ell\log_{x,\sigma} \in \mathbb{Z}_p \cdot t \subset (B^+)^{\varphi=p}$ et ce cocycle définit l'extension précédente de \mathbb{Z}_p par $\mathbb{Z}_p(1)$.

Remarque 16.6. *La formule donnée dans le point (3) de la proposition précédente est similaire à la description des représentations ℓ -adiques de G_K via le théorème de la monodromie potentiellement semi-stable de Grothendieck. Plus précisément, soit $\ell \neq p$ et fixons une uniformisante π_K de K . Il y a un morphisme surjectif canonique*

$$\begin{aligned} t_\ell : I_K &\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \\ \sigma &\longmapsto \left(\sigma(\pi_K^{1/\ell^n}) / \pi_K^{1/\ell^n} \right)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

indépendant du choix des racines π_K^{1/ℓ^n} de π_K . Soit E la courbe de Tate sur K telle que $E^{rig} = \mathbb{G}_m^{rig} / \pi_K^{\mathbb{Z}}$. Comme dans la remarque 16.5 on a $T_\ell(E) = \{(\bar{y}_n)_{n \geq 0} \mid \bar{y}_n \in \overline{K}^\times / \pi_K^{\mathbb{Z}}, \bar{y}_{n+1}^\ell = \bar{y}_n \text{ et } \bar{y}_0 = 0\}$ où l'on note \bar{y}_n la classe de $y_n \in \overline{K}^\times$ modulo $\pi_K^{\mathbb{Z}}$. On a alors une suite exacte similaire à celle de la remarque 16.5

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow T_\ell(E) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

Le choix d'une suite compatible de racines ℓ^n -ièmes de π_K dans \overline{K} , $(\pi_K^{1/\ell^n})_{n \geq 0}$, définit un scindage de la suite exacte de \mathbb{Z}_ℓ -modules précédente i.e. un scindage de la projection $T_\ell(E) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ donné par $\mathbb{Z}_\ell \ni 1 \mapsto \left(\pi_K^{1/\ell^n} \right)_{n \geq 0} \in T_p(E)$. Le cocycle associé est $c_\ell \in Z^1(G_K, \mathbb{Z}_\ell(1))$ défini par

$$c_\ell(\sigma) = \sigma(\pi_K^{1/\ell^n}) / \pi_K^{1/\ell^n}$$

et vérifie $c_\ell|_{I_K} = t_\ell$. Soit maintenant $\rho : G_K \rightarrow GL(V)$ une représentation ℓ -adique de G_K telle que $\rho|_{I_K}$ se factorise à travers un sous-groupe ouvert et $N : \rho \rightarrow \rho(-1)$. Alors,

$$c_\ell N \in Z^1(G_K, \text{End}(V))$$

où l'action de G_K sur $\text{End}(V)$ est la représentation adjointe de ρ . Cela définit par exponentiation un cocycle

$$\exp(c_\ell N) \in Z^1(G_K, GL(V))$$

et on peut définir la représentation ℓ -adique

$$\rho \overset{G_K}{\wedge} \exp(c_\ell N).$$

16.2.3. *Description en termes de B -paires.* Soit $(D, \varphi, N) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0, E}$ et $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N) \in \text{Fib}_{X_E}^{G_K}$ le fibré équivariant associé. On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N)) &= (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}, N=0} \in \text{Rep}_{B_e}(G_K) \\ \underline{\mathcal{X}}(\widehat{D}, \varphi, N)_\infty &= (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} \otimes_{B^+} B_{dR}^+ \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K). \end{aligned}$$

On a cependant une autre description du complété de la fibre à l'infini du faisceau équivariant $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N)$.

Prolongeons le logarithme usuel $\log : 1 + \mathfrak{m}_{\overline{K}} \rightarrow \overline{K}$ à $\mathcal{O}_{\overline{K}}^\times$ en posant $\log[x] = 0$ si $x \in k^\times$. Choisissons maintenant un prolongement

$$\log : \overline{K}^\times \longrightarrow \overline{K}$$

compatible à l'action de G_K . Cela revient à fixer un élément $\log p \in K$. Un tel choix définit un plongement G_K -équivariant

$$\alpha : B_{\log}^+ \hookrightarrow B_{dR}^+$$

étendant le plongement naturel $B^+ \subset B_{dR}^+$ associé à un morphisme de groupes

$$\mathcal{L} : F^\times \longrightarrow B_{dR}^+.$$

étendant le composé

$$\mathcal{O}_F^\times \xrightarrow{\mathcal{L}} B^+ \hookrightarrow B_{dR}^+.$$

On renvoie pour cela à la section 4.2 de [20].

Proposition 16.7. *À chaque choix d'un élément $\log p \in K$ est associé un isomorphisme de B_{dR}^+ -représentations de G_K*

$$D \otimes_{K_0} B_{dR}^+ \xrightarrow{\sim} \widehat{\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N)}_{\infty}.$$

Démonstration. On a une égalité de B_E^+ -modules

$$(D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} = (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0}.$$

Le plongement $\alpha : B_{\log}^+ \rightarrow B_{dR}^+$ induit un morphisme de B_{dR}^+ -modules

$$\begin{aligned} (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} \otimes_{B^+} B_{dR}^+ &\longrightarrow D \otimes_{K_0} B_{dR}^+ \\ (x \otimes y) \otimes 1 &\longmapsto x \otimes \alpha(y). \end{aligned}$$

Cela définit un morphisme de B_{dR}^+ -représentations

$$(D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} \otimes_{B^+} B_{dR}^+ \longrightarrow D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$$

dont il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela fixons $x \in F^\times$ tel que $v(x) = 1$. Ce choix induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} D \otimes_{K_0} B^+ &\xrightarrow{\sim} (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} \\ y &\longmapsto \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} \mathcal{L}(x)^i N^i(y). \end{aligned}$$

Le composé

$$D \otimes_{K_0} B_{dR}^+ = (D \otimes_{K_0} B^+) \otimes_{B^+} B_{dR}^+ \xrightarrow{\sim} (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{N=0} \otimes_{B^+} B_{dR}^+ \longrightarrow D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$$

est alors donné par l'endomorphisme $\exp(-N \otimes \mathcal{L}(x))$ de $D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$. C'est donc un isomorphisme. \square

Remarque 16.8. *Le point de la proposition précédente est que le cocycle $(\log_{x,\sigma})_{\sigma}$ devient trivial dans B_{dR}^+ et que donc dans l'isomorphisme du point (3) de la proposition 16.4, le cocycle $\alpha = (\exp(-\log_{x,\sigma} \otimes \text{Id} \circ N))_{\sigma}$ devenant trivial dans $GL_{B_{dR}^+}(\widehat{\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi)}_{\infty})$,*

$$(\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \overset{G_K}{\wedge} \alpha)_{\infty} = \widehat{\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi)}_{\infty} \overset{G_K}{\wedge} \alpha \simeq \widehat{\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi)}_{\infty}.$$

Corollaire 16.9. *Les fibrés équivariants de la forme $\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N)$ sont de de Rham.*

16.3. B_e -représentations cristallines et log-cristallines. Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant ([19] théo. 4.2.4) : le morphisme

$$B_{\log}^+ \otimes_{K_0} K \longrightarrow B_{dR}^+$$

est injectif. Puisque $B_{dR}^{G_K} = K$, on en déduit que

$$\text{Frac}(B^+)^{G_K} = \text{Frac}(B_{\log}^+)^{G_K} = K_0.$$

Lemme 16.10. *Soit $W \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$. Alors,*

$$\dim_{K_0}(W \otimes_{B_e} B^+[\frac{1}{t}])^{G_K} < +\infty \quad \text{et} \quad \dim_{K_0}(W \otimes_{B_e} B_{\log}^+[\frac{1}{t}])^{G_K} < +\infty$$

Démonstration. Le second point entraîne le premier. Puisque $B_{\log}^+[\frac{1}{t}] \hookrightarrow B_{dR}$,

$$(W \otimes_{B_e} B_{\log}^+[\frac{1}{t}])^{G_K} \subset (W \otimes_{B_e} B_{dR})^{G_K}.$$

Étant donné que $[K : K_0] < +\infty$ il suffit donc de montrer que

$$\dim_K(W \otimes_{B_e} B_{dR})^{G_K} < +\infty.$$

Mais si M est une B_{dR} -représentation de G_K , puisque $B_{dR}^{G_K} = K$, le morphisme naturel

$$M^{G_K} \otimes_K B_{dR} \longrightarrow M$$

est injectif ([20] prop 1.6.1). On a donc $\dim_K M^{G_K} < +\infty$. \square

Définition 16.11.

(1) On définit deux foncteurs

$$\begin{aligned} D_{cris} : \text{Rep}_{B_e}(G_K) &\longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{K_0} \\ M &\longmapsto \left((M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K}, \text{Id} \otimes \varphi \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_{cris} : \varphi\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Rep}_{B_e}(G_K) \\ (D, \varphi) &\longmapsto (D \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}}. \end{aligned}$$

(2) On définit de même

$$\begin{aligned} D_{log\text{-cris}} : \text{Rep}_{B_e}(G_K) &\longrightarrow (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} \\ M &\longmapsto \left((M \otimes_{B_e} B_{\log}^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K}, \text{Id} \otimes \varphi, \text{Id} \otimes N \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_{log\text{-cris}} : (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Rep}_{B_e}(G_K) \\ (D, \varphi, N) &\longmapsto (D \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}, N=0}. \end{aligned}$$

Soit $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$. Il y a un morphisme naturel compatible à l'action de G_K

$$(D \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}] \longrightarrow D \otimes_{K_0} B_E^+[\tfrac{1}{t}].$$

Utilisant que $B^+[\tfrac{1}{t}]^{G_K} = K_0$ on en déduit un morphisme

$$((D \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \longrightarrow (D \otimes_{K_0} B_E^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} = D.$$

On a donc une transformation naturelle de foncteurs sur $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$

$$D_{cris} \circ V_{cris} \longrightarrow \text{Id}.$$

De même, utilisant que $B_{\log}^+[\tfrac{1}{t}]^{G_K} = K_0$ on obtient une transformation naturelle

$$D_{log\text{-cris}} \circ V_{log\text{-cris}} \longrightarrow \text{Id}.$$

Si $M \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$, il y a un morphisme naturel compatible aux Frobenius

$$(M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}] \longrightarrow M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}]$$

qui, puisque M est libre sur B_e , induit un morphisme

$$((M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \longrightarrow (M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} = M.$$

Cela induit une transformation naturelle de foncteurs sur $\text{Rep}_{B_e}(G_K)$

$$V_{cris} \circ D_{cris} \longrightarrow \text{Id}.$$

De même, on a une transformation naturelle

$$V_{log\text{-cris}} \circ D_{log\text{-cris}} \longrightarrow \text{Id}.$$

Proposition 16.12.

(1) La transformations naturelle de foncteurs sur $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$, resp. $(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}$,

$$D_{cris} \circ V_{cris} \longrightarrow \text{Id},$$

$$\text{resp. } D_{log\text{-cris}} \circ V_{log\text{-cris}} \longrightarrow \text{Id},$$

est un isomorphisme.

(2) Pour $M \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$

$$V_{cris}(D_{cris}(M)) \longrightarrow M$$

$$V_{log\text{-cris}}(D_{log\text{-cris}}(M)) \longrightarrow M$$

sont injectifs.

Démonstration. Pour le point (1), soit $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$. On est ramené à montrer que

$$(D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{B_e} B^+[\frac{1}{t}] \longrightarrow D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}]$$

est un isomorphisme. Pour $h \geq 1$ il y a un isomorphisme

$$(D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{B_e} (B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi^h=\text{Id}} \xrightarrow{\sim} (D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi^h=\text{Id}}.$$

Il suffit alors de montrer que

$$(D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi^h=\text{Id}} \otimes_{B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi^h=\text{Id}}} B^+[\frac{1}{t}] \longrightarrow D \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}]$$

est un isomorphisme. On peut supposer $h \gg 1$ de telle manière que les dénominateurs des pentes de (D, φ) divisent h . On est alors ramené à montrer que pour tout $d \in \mathbb{Z}$,

$$(B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi^h=p^d} \otimes_{B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi^h=\text{Id}}} B^+[\frac{1}{t}] \longrightarrow B^+[\frac{1}{t}]$$

est un isomorphisme. Mais cela résulte de ce que si $t_h \in (B^+)^{\varphi^h=p}$ est tel que $V^+(t_h)$ soit un point de $X_{\mathbb{Q}_p^h}$ s'envoyant sur ∞ via la projection $X_{\mathbb{Q}_p^h} \rightarrow X$, $t_h \in B^+[\frac{1}{t}]^\times$ et $(B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi^h=p^d}$ est un $B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi^h=\text{Id}}$ -module libre de base t_h^d .

Le point (1) « log-cristallin » résulte du cas précédent après avoir fixé un isomorphisme $B_{\log}^+ \simeq B_E^+[X]$.

Pour le point (2), soit $M \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$. On veut montrer que

$$((M \otimes_{B_{E,e}} B^+[\frac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}])^{\varphi=\text{Id}} \longrightarrow M$$

est injectif. Il suffit pour cela de montrer que

$$(M \otimes_{B_{E,e}} B^+[\frac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} B^+[\frac{1}{t}] \longrightarrow M \otimes_{B_e} B^+[\frac{1}{t}]$$

l'est. Il suffit en fait de montrer que le morphisme

$$(M \otimes_{B_{E,e}} \text{Frac}(B^+))^{G_K} \otimes_{K_0} \text{Frac}(B^+) \longrightarrow M \otimes_{B_e} \text{Frac}(B^+)$$

est injectif. Mais cela résulte de ce que $\text{Frac}(B^+)^{G_K} = K_0$ et de la proposition 1.6.1 de [20]. On procède de même pour le cas log-cristallin. \square

Corollaire 16.13.

(1) Les foncteurs

$$\varphi\text{-Mod}_{K_0} \begin{array}{c} \xrightarrow{V_{\text{cris}}} \\ \xleftarrow{D_{\text{cris}}} \end{array} \text{Rep}_{B_e}(G_K),$$

resp.

$$(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} \begin{array}{c} \xrightarrow{V_{\log\text{-cris}}} \\ \xleftarrow{D_{\log\text{-cris}}} \end{array} \text{Rep}_{B_e}(G_K),$$

sont adjoints, V_{cris} , resp. $V_{\log\text{-cris}}$, étant l'adjoint à gauche de D_{cris} , resp. $D_{\log\text{-cris}}$. Le morphisme d'ajonction $\text{Id} \rightarrow D_{\text{cris}} \circ V_{\text{cris}}$, resp. $\text{Id} \rightarrow D_{\log\text{-cris}} \circ V_{\log\text{-cris}}$, est l'inverse de l'isomorphisme du point (1) de la proposition 16.12. Le morphisme d'ajonction $V_{\text{cris}} \circ D_{\text{cris}} \rightarrow \text{Id}$, resp. $V_{\log\text{-cris}} \circ D_{\log\text{-cris}} \rightarrow \text{Id}$, est celui du point (2) de la proposition 16.12.

(2) Le foncteur V_{cris} , resp. $V_{\log\text{-cris}}$, est pleinement fidèle.

(3) L'image essentielle de V_{cris} est formée des représentations $M \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$ telles que l'injection

$$V_{\text{cris}}(D_{\text{cris}}(M)) \longrightarrow M$$

soit un isomorphisme.

Définition 16.14. Une B_e -représentation M de G_K est cristalline, resp. log-cristalline, si M est dans l'image essentielle de V_{cris} , resp. $V_{\log\text{-cris}}$.

Proposition 16.15. *Une B_e -représentation M de G_K est cristalline, resp. log-cristalline, si et seulement si*

$$\dim_{K_0} D_{cris}(M) = \text{rg}_{B_e} M, \quad \text{resp.} \quad \dim_{K_0} D_{log-cris}(M) = \text{rg}_{B_e} M$$

Démonstration. Soit $*$ $\in \{cris, log-cris\}$. Si l'égalité de rangs est vérifiée alors le conoyau de l'injection $V_*(D_*(M)) \hookrightarrow M$ est de torsion. Or, tout faisceau cohérent équivariant sur $X_{\mathbb{Q}_p} \setminus \{\infty\}$ est sans torsion, i.e. est un fibré vectoriel, car les orbites de G_K dans $|X_{\mathbb{Q}_p}| \setminus \{\infty\}$ sont infinies (coro. 14.4). \square

Proposition 16.16.

(1) *Considérons une suite exacte de B_e -représentations de G_K*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0.$$

Supposons M_2 cristalline, resp. log-cristalline. Alors, M_1 et M_3 sont cristallines, resp. log-cristallines, et il y a une suite exacte de φ -modules

$$0 \longrightarrow D_{cris}(M_1) \longrightarrow D_{cris}(M_2) \longrightarrow D_{cris}(M_3) \longrightarrow 0,$$

resp. de (φ, N) -modules

$$0 \longrightarrow D_{log-cris}(M_1) \longrightarrow D_{log-cris}(M_2) \longrightarrow D_{log-cris}(M_3) \longrightarrow 0.$$

(2) *Soit M une B_e -représentation cristalline, resp. log-cristalline, de G_K . Appelons sous-représentation de M un sous- B_e -module facteur direct stable sous l'action de G_K . Le foncteur V_{cris} , resp. $V_{log-cris}$, induit alors une bijection entre les sous- φ -modules de $D_{cris}(M)$, resp. les sous- (φ, N) -modules de $D_{log-cris}(M)$, et les sous-représentations de M .*

Démonstration. Le point (2) résulte aussitôt du point (1). Dans le cas cristallin, le point (1) résulte lui-même facilement du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_{cris}(D_{cris}(M_1)) & \longrightarrow & V_{cris}(D_{cris}(M_2)) & \longrightarrow & V_{cris}(D_{cris}(M_3)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les suites horizontales sont exactes, les flèches verticales injectives et la flèche verticale du milieu est un isomorphisme. Le cas log-cristallin est identique. \square

Remarque 16.17. *Soit M une B_e -représentation de G_K et $M' \subset M$ un sous- B_e -module invariant sous l'action de G_K . Alors M' est automatiquement facteur direct dans M . Il suffit pour cela de vérifier que M/M' est sans torsion. Or, tout faisceau cohérent G_K -équivariant sur $X \setminus \{\infty\}$ est sans torsion car les orbites de G_K dans $|X_{\mathbb{Q}_p}| \setminus \{\infty\}$ sont infinies (coro. 14.4). Dans le point (2) de la proposition 16.16 précédente on peut donc alléger la définition d'une sous-représentation.*

16.4. Fibrés cristallins et log-cristallins.

Définition 16.18.

- (1) *Un fibré équivariant $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K}$ sur $X \setminus \{\infty\}$ est dit cristallin, resp. log-cristallin, si la B_e -représentation correspondante $\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathcal{E}})$ est cristalline, resp. log-cristalline.*
- (2) *Un fibré équivariant $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_K}$ est dit cristallin, resp. log-cristallin, si sa restriction à l'ouvert $X \setminus \{\infty\}$ l'est. On note $\text{Fib}_X^{G_K, cris}$, resp. $\text{Fib}_X^{G_K, log-cris}$, les catégories correspondantes.*

D'après la proposition 16.15, $\underline{\mathcal{E}}$ est cristallin si et seulement si

$$\dim_{K_0} (H^0(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathcal{E}}) \otimes_{B_e} B_{cris}^+[\frac{1}{t}])^{G_K} = \text{rg}(\underline{\mathcal{E}}).$$

Le foncteur

$$\begin{aligned} \varphi\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K} \\ (D, \varphi) &\longmapsto \underline{\mathcal{X}}(D, \varphi)|_{X \setminus \{\infty\}} \end{aligned}$$

induit une équivalence entre φ -modules et fibrés équivariants cristallins sur $X \setminus \{\infty\}$. Il en est de même pour les (φ, N) -modules et les fibrés équivariants log-cristallins sur $X \setminus \{\infty\}$. Utilisant les résultats de la section 15 on en déduit le théorème qui suit.

Théorème 16.19.

(1) Il y a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} &\xrightarrow{\sim} \text{Fib}_X^{G_K, \text{cris}} \\ (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) &\longmapsto \underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) \end{aligned}$$

où $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ est la modification équivariante de $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi)$ telle que

$$\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)_\infty^\wedge = \text{Fil}^0(D_K \otimes_K B_{dR}).$$

(2) À chaque choix de $\log p \in K$ est associé une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} (\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0} &\xrightarrow{\sim} \text{Fib}_X^{G_K, \text{log-cris}} \\ (D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet D_K) &\longmapsto \underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet D_K) \end{aligned}$$

où $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet D_K)$ est la modification équivariante de $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N)$ telle que

$$\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet D_K)_\infty^\wedge = \text{Fil}^0(D_K \otimes_K B_{dR}),$$

le choix de $\log p$ permettant d'identifier $\underline{\mathcal{X}}(D, \varphi, N)_\infty^\wedge$ à $D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$ (prop. 16.7).

16.5. Fibrés cristallins/log-cristallins et filtration de Harder-Narasimhan.

Lemme 16.20. Pour $X \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0}$ on a $\deg \underline{\mathcal{X}}(X) = t_H(X) - t_N(X)$, $\text{rg}(\underline{\mathcal{X}}(X)) = \text{ht}(X)$ et $\mu(X) = \mu(\underline{\mathcal{X}}(X))$.

Théorème 16.21. Soit $X \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$, resp. $X \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0}$. Notons

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Alors

$$0 = \underline{\mathcal{X}}(X_0) \subsetneq \underline{\mathcal{X}}(X_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \underline{\mathcal{X}}(X_r) = \underline{\mathcal{X}}(X)$$

est la filtration de Harder-Narasimhan de $\underline{\mathcal{X}}(X)$. De plus les polygones de Harder-Narasimhan de X et $\underline{\mathcal{X}}(X)$ coïncident.

Démonstration. Soit X un φ -module filtré. Notons Y le φ -module associé. Les sous-objets stricts de X sont en bijection avec les sous-objets de Y . De même, puisque $\underline{\mathcal{X}}(X)$ est obtenu par modification de $\underline{\mathcal{X}}(Y)$, les sous-fibrés équivariants stricts (i.e. localement facteur directs) de $\underline{\mathcal{X}}(X)$ sont en bijection avec ceux de $\underline{\mathcal{X}}(Y)$. Le théorème est alors une conséquence de la proposition 14.17, du point (2) de la proposition 16.16 et du calcul du degré et du rang des fibrés associés aux φ -modules filtrés. \square

16.6. Les foncteurs D_{cris} et V_{cris} sur la courbe. On a défini précédemment (16.3) des foncteurs adjoints

$$\varphi\text{-Mod}_{K_0} \begin{array}{c} \xrightarrow{V_{\text{cris}}} \\ \xleftarrow{D_{\text{cris}}} \end{array} \text{Fib}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K},$$

le foncteur V_{cris} étant pleinement fidèle d'image essentielle les fibrés équivariants cristallins sur $X \setminus \{\infty\}$. Le foncteur V_{cris} n'est rien d'autre que le foncteur $(D, \varphi) \mapsto \underline{\mathcal{X}}(D, \varphi)|_{X \setminus \{\infty\}}$. On va étendre ces foncteurs aux φ -modules filtrés et aux fibrés sur toute la courbe.

Proposition 16.22. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(-) : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X^{G_K} \\ \text{resp. } \underline{\mathcal{E}}(-) : (\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X^{G_K}, \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche.

Démonstration. Soit $\underline{\mathcal{F}}$ un fibré équivariant sur X . Considérons le φ -module

$$(D, \varphi) = D_{\text{cris}}(\underline{\mathcal{F}}|_{X \setminus \{\infty\}}).$$

Il y a un plongement naturel de B_{dR} -représentations

$$D \otimes_{K_0} B_{dR} \hookrightarrow \widehat{\underline{\mathcal{F}}}_{\infty}[\tfrac{1}{t}].$$

Le réseau

$$D \otimes B_{dR} \cap \widehat{\underline{\mathcal{F}}}_{\infty}$$

est alors invariant sous G_K et correspond donc à une filtration $\text{Fil}^{\bullet} D_K$. Cette filtration est donnée par

$$\text{Fil}^i D_K = D_K \cap t^i \widehat{\underline{\mathcal{F}}}_{\infty}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie que la correspondance $\underline{\mathcal{F}} \mapsto (D, \varphi, \text{Fil}^{\bullet} D_K)$ définit bien un foncteur adjoint. On procède de même en remplaçant « cris » par « log-cris ». \square

Définition 16.23. *On note D_{cris} , resp. $D_{\log\text{-cris}}$, le foncteur adjoint défini dans la proposition précédente.*

Ce foncteur se décrit de la façon suivante en termes de B-paires. Soit (M, W) où $M \in \text{Rep}_{B_e}(G_K)$, $W \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et $M \otimes_{B_e} B_{dR} = W[\tfrac{1}{t}]$. Alors,

$$D_{\text{cris}}(M) = ((M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K}, \text{Id} \otimes \varphi)$$

et il y a un plongement

$$(M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} B_{dR} \hookrightarrow M \otimes_{B_e} B_{dR}.$$

Posons

$$\text{Fil}^i = (M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} K \cap t^i W, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On a alors

$$D_{\text{cris}}(M, W) = ((M \otimes_{B_e} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K}, \text{Id} \otimes \varphi, \text{Fil}^{\bullet}).$$

Le foncteur composé

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \xrightarrow{\sim} {}^0\text{Fib}_X^{G_K} \xrightarrow{D_{\text{cris}}} \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$$

est le foncteur usuel qui à une représentation galoisienne V associe

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K}$$

muni du Frobenius $\text{Id} \otimes \varphi$ et de la filtration déduite du plongement

$$(V \otimes_E B^+[\tfrac{1}{t}])^{G_K} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow V \otimes_E B_{dR}.$$

On vérifie facilement le lemme qui suit.

Lemme 16.24. *Pour un fibré équivariant \mathcal{F} , le sous- \mathcal{O}_X -module équivariant $\mathcal{E}(D_{\text{cris}}(\mathcal{F}))$, resp. $\underline{\mathcal{E}}(D_{\log\text{-cris}}(\mathcal{F}))$, de \mathcal{F} est le plus grand sous- \mathcal{O}_X -module invariant sous Galois qui soit un fibré cristallin, resp. log-cristallin.*

On déduit également de la proposition 16.15 l'assertion suivante.

Proposition 16.25. *Un fibré équivariant \mathcal{F} est cristallin, resp. log-cristallin, si et seulement si $\dim_{K_0} D_{\text{cris}}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$, resp. $\dim_{K_0} D_{\log\text{-cris}}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$.*

Définition 16.26. Pour $A \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$, resp. $A \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0}$, on pose

$$V_{\text{cris}}(A) = H^0(X, \underline{\mathcal{X}}(A)),$$

$$\text{resp. } V_{\log\text{-cris}}(A) = H^0(X, \underline{\mathcal{X}}(A)).$$

C'est un \mathbb{Q}_p -espace de Banach muni d'une action continue de G_K .

Si \mathcal{F} est un fibré équivariant, l'inclusion $\underline{\mathcal{X}}(D_{\text{cris}}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{F}$ induit une injection compatible à l'action de Galois d'espaces de Banach

$$V_{\text{cris}}(D_{\text{cris}}(\mathcal{F})) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{F}).$$

En particulier, pour $V \in \text{Rep}_E(G_K)$,

$$V_{\text{cris}}(D_{\text{cris}}(V)) \hookrightarrow V.$$

Si $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ désigne les \mathbb{Q}_p -espaces de Banach munis d'une action continue de G_K on a en résumé un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & V_{\text{cris}} \\ & & & & \curvearrowright \\ \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} & \xrightarrow{\underline{\mathcal{X}}(-)} & \text{Fib}_X^{G_K} & \xrightarrow{H^0(X, -)} & \mathcal{B}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \\ & \xleftarrow{D_{\text{cris}}} & \uparrow \text{---} \otimes_{\mathcal{O}_X} & \swarrow & \\ & \xleftarrow{D_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) & \searrow & \end{array}$$

16.7. Représentations cristallines et φ -modules filtrés admissibles. Rappelons (14.22, 14.19) qu'il y a une équivalence entre représentations galoisiennes et fibrés équivariants semi-stables de pente 0 :

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_E(G_K) & \xrightarrow{\sim} & {}^0\text{Fib}_X^{G_K} \\ (V, \rho) & \mapsto & \underline{V} \otimes_E \underline{\mathcal{O}}_X. \end{array}$$

Définition 16.27. Une représentation $V \in \text{Rep}_E(G_K)$ est dite *cristalline*, resp. *log-cristalline*, si le fibré G_K -équivariant $\underline{V} \otimes_E \underline{\mathcal{O}}_X$ est cristallin, resp. log-cristallin. On note $\text{Rep}_E^{\text{cris}}(G_K)$, resp. $\text{Rep}_E^{\log\text{-cris}}(G_K)$, les représentations cristallines, resp. log-cristallines.

Remarque 16.28. Lorsque $E \neq \mathbb{Q}_p$ cette notion est plus forte que la notion usuelle de représentation cristalline à coefficients dans E : il s'agit des représentations cristallines V à coefficients dans E telles que la C -représentation de Hodge-Tate $\bigoplus_{\tau \neq \tau_0} V \otimes_{E, \tau} C$ soit de poids 0. Par exemple, si \mathcal{G} est un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K muni d'une action de \mathcal{O}_E , $V_p(\mathcal{G})$ satisfait la condition précédente si et seulement si l'action de \mathcal{O}_E sur $\text{Lie } \mathcal{G}$ se fait à travers le plongement canonique $\tau_0 : \mathcal{O}_E \hookrightarrow \mathcal{O}_K$.

Définition 16.29. Un φ -module filtré, resp. un (φ, N) -module filtré, X est dit *admissible* si le fibré équivariant $\underline{\mathcal{X}}(X)$ est semi-stable de pente 0.

Théorème 16.30.

- (1) Soit $V \in \text{Rep}_E(G_K)$. Sont équivalents :
 - (a) V est cristalline,
 - (b) l'injection $V_{\text{cris}}(D_{\text{cris}}(V)) \hookrightarrow V$ est un isomorphisme,
 - (c) $\dim_{K_0} D_{\text{cris}}(V) = \dim_E V$ et $\bigoplus_{\tau \neq \tau_0} V \otimes_{E, \tau} C$ est de poids 0.
- (2) Soit $A \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$. Sont équivalents :
 - (a) A est admissible,
 - (b) $\dim_E V_{\text{cris}}(A) = \text{ht}(A)$.
 - (c) A est semi-stable de pente 0

Les mêmes énoncés sont vérifiés en remplaçant « cristallin » par « log-cristallin ».

Démonstration. Le point (1) résulte de la proposition 16.25. Passons au point (2). Il résulte du théorème de classification des fibrés et du calcul des sections globales des $\mathcal{O}_X(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, qu'un fibré \mathcal{F} sur X est semi-stable de pente 0 si et seulement si $\dim_E H^0(X, \mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F})$. Appliquant cela au fibré $\underline{\mathcal{E}}(A)$, on voit que le point (a) est équivalent à (b). L'équivalence de (a) et (c) résulte du théorème 16.21 qui dit que les polygones de Harder-Narasimhan de A et $\underline{\mathcal{E}}(A)$ coïncident. En particulier, A est semi-stable de pente 0 si et seulement si $\underline{\mathcal{E}}(A)$ l'est. \square

Remarque 16.31. *Dans le point (2) du théorème précédent, l'équivalence de (a) et (c) est l'énoncé admissible \Leftrightarrow faiblement admissible. La preuve semble un peu formelle, mais on a en fait utilisé au préalable de façon cruciale le théorème de classification des fibrés afin d'identifier les fibrés équivariants semi-stables de pente 0 aux représentations galoisiennes.*

Le théorème de classification des fibrés fournit en fait l'énoncé plus fin suivant.

Théorème 16.32. *Soit $A \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$.*

- (1) *Si $t_H(A) > t_N(A)$ alors $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) = +\infty$.*
- (2) *Si $t_H(A) < t_N(A)$ alors soit $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) = +\infty$, soit $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) < \text{ht}(A)$.*
- (3) *Si $t_H(A) = t_N(A)$ alors soit $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) = +\infty$ soit $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) = \text{ht}(A)$.*

En particulier :

- *A est admissible si et seulement si $\det(A)$ l'est et $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) < +\infty$,*
- *si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) < +\infty$ alors $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) \leq \text{ht}(A)$.*

De plus, si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{cris}}(A) < +\infty$, $V_{\text{cris}}(A)$ est une représentation cristalline et $D_{\text{cris}}(V_{\text{cris}}(A))$ est le plus grand sous- φ -module filtré admissible de A .

Les mêmes énoncés sont vérifiés en remplaçant « cristallin » par « log-cristallin ».

Démonstration. Si $t_H(A) > t_N(A)$ alors $\deg(\mathcal{E}(A)) > 0$ et donc d'après le théorème de classification des fibrés $\mathcal{E}(A)$ possède un sous-fibré isomorphe à $\mathcal{O}_X(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Puisque $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = +\infty$ on conclut que $\dim V_{\text{cris}}(A) = +\infty$.

Si $t_H(A) < t_N(A)$ alors $\deg(\mathcal{E}(A)) < 0$. D'après le raisonnement précédent, si le polygone de $\mathcal{E}(A)$ possède une pente > 0 alors $\dim V_{\text{cris}}(A) = +\infty$. Sinon, puisque ce polygone doit posséder au moins une pente < 0 , utilisant le théorème de classification des fibrés on en déduit que $\dim V_{\text{cris}}(A) < \text{ht}(A)$.

Si $t_H(A) = t_N(A)$ alors $\deg(\mathcal{E}(A)) = 0$. Si le polygone de $\mathcal{E}(A)$ ne possède pas de pente > 0 , par concavité de celui-ci, c'est une droite de pente 0. On conclut que A est admissible.

Si $\dim V_{\text{cris}}(A) < +\infty$, les pentes de Harder-Narasimhan de A sont nécessairement ≤ 0 . De plus, si $B \subset A$ est le premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan si la pente 0 intervient ou bien $B = 0$ sinon, les pentes de $\mathcal{E}(B/A)$ étant strictement négatives on a $V_{\text{cris}}(B) = V_{\text{cris}}(A)$. Mais B étant admissible, $V_{\text{cris}}(B)$ est cristalline et $D_{\text{cris}}(V_{\text{cris}}(B)) = B$. \square

16.8. Classification des fibrés semi-stables cristallins/log-cristallins de pente quelconque.

Notons ${}^0\text{Fib}_X^{G_K} \otimes \underline{D}_\lambda^{\text{opp}}$ la catégorie des fibrés équivariants semi-stables de pente 0, $\underline{\mathcal{E}}$, munis d'une action semi-linéaire de D_λ^{opp} , c'est à dire un morphisme G_K -équivariant $D_\lambda \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ où \mathcal{E} est le fibré sous-jacent à $\underline{\mathcal{E}}$. On peut également définir ces objets comme étant les fibrés équivariants en $\mathcal{O}_X \otimes_E \underline{D}_\lambda$ -modules où \underline{D}_λ est un faisceau en anneaux G_K -équivariant sur X .

Proposition 16.33. *Il y a une équivalence*

$$\begin{aligned} {}^\lambda\text{Fib}_X^{G_K} &\xrightarrow{\sim} {}^0\text{Fib}_X^{G_K} \otimes \underline{D}_\lambda \\ \underline{\mathcal{E}} &\longmapsto \underline{\mathcal{E}} \otimes \underline{\mathcal{O}}_X(-\lambda) \end{aligned}$$

où $\underline{\mathcal{E}} \otimes \underline{\mathcal{O}}_X(-\lambda)$ est muni de l'action de D_λ associée à l'identification $D_\lambda^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathcal{O}_X(-\lambda))$.
Un inverse est donné par

$$\underline{\mathcal{F}} \longmapsto \underline{\mathcal{F}} \otimes_{\underline{D}_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda).$$

Lemme 16.34. *L'équivalence précédente et son inverse respecte les fibrés cristallins, resp. log-cristallins.*

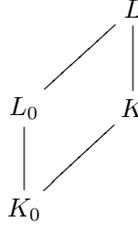
Proposition 16.35.

- (1) Soit $V \in \text{Rep}_{D_\lambda}(G_K)$. Le fibré équivariant $\underline{V} \otimes_{D_\lambda} \mathcal{O}_X(\lambda)$ est cristallin, resp. log-cristallin, si et seulement si après oubli de l'action de D_λ la représentation V , comme objet de $\text{Rep}_E(G_K)$, est cristalline, resp. log-cristalline.
- (2) Notons $\text{Rep}_{D_\lambda}^{\text{cris}}(G_K)$ les objets de $\text{Rep}_{D_\lambda}(G_K)$ qui sont cristallins après oubli de l'action de D_λ . Il y a alors une équivalence

$$\begin{aligned} \text{Rep}_{D_\lambda}^{\text{cris}}(G_K) &\xrightarrow{\sim} {}^\lambda(\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}) \\ V &\longmapsto D_{\text{cris}}(\underline{V} \otimes_{D_\lambda} \mathcal{O}_X(\lambda)). \end{aligned}$$

17. DE RHAM IMPLIQUE POTENTIELLEMENT LOG-CRISTALLIN

On reprend les hypothèses et notations de la section précédente. On note $X = X_{\mathbb{Q}_p}$ la courbe munie de son action de G_K et $\infty \in |X|$ le point fermé stable sous l'action de G_K . On a alors $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$. Si $L|K$ est une extension de degré fini contenue dans \bar{K} de corps résiduel k_L on note $G_L = \text{Gal}(\bar{K}|L)$ et $L_0 = W(k_L)_{\mathbb{Q}}$:



17.1. Fibrés potentiellement log-cristallins. Si $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_K}$ et $L|K$ est une extension de degré fini de K dans \bar{K} on note $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_L}$ le fibré équivariant obtenu par restriction de l'action de G_K en une action de G_L . Supposons $L|K$ galoisienne et soit $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_L}$ de fibré sous-jacent \mathcal{E} . Si $\tau \in G_L$ on note $u_\tau : \tau^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ l'action de τ . Pour $\sigma \in G_K$ notons

$$\underline{\mathcal{E}}^{(\sigma)} \in \text{Fib}_X^{G_L}$$

le fibré équivariant de fibré sous-jacent $\sigma^*\mathcal{E}$ et tel que l'action de $\tau \in G_L$ soit donnée par

$$\tau^*(\sigma^*\mathcal{E}) = \sigma^*((\sigma\tau\sigma^{-1})^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sigma^*u_{\sigma\tau\sigma^{-1}}} \sigma^*\mathcal{E}.$$

On a la formule

$$(\underline{\mathcal{E}}^{(\sigma_1)})^{(\sigma_2)} = \underline{\mathcal{E}}^{(\sigma_1\sigma_2)}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G_K.$$

Si $f : \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}'$ est un morphisme de fibrés G_L -équivariants il induit un morphisme $f^{(\sigma)} : \underline{\mathcal{E}}^{(\sigma)} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}'^{(\sigma)}$ qui est simplement le morphisme σ^*f au niveau des fibrés. Lorsque $\sigma \in G_L$, il y a un isomorphisme canonique

$$\text{can}_\sigma : \underline{\mathcal{E}}^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{E}}$$

donné par u_σ au niveau des fibrés.

Définition 17.1. Supposons $L|K$ galoisienne. Pour $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_L}$ on appelle donnée de descente de L à K sur $\underline{\mathcal{E}}$ la donnée pour tout $\sigma \in G_K$ d'un isomorphisme

$$f_\sigma : \underline{\mathcal{E}}^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{E}}$$

dans $\text{Fib}_X^{G_L}$ vérifiant

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1\sigma_2} &= f_{\sigma_2} \circ (f_{\sigma_1})^{(\sigma_2)}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G_K, \\ f_\sigma &= \text{can}_\sigma, \quad \sigma \in G_L. \end{aligned}$$

Si $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_K}$, $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}}$ est canoniquement muni d'une donnée de descente de L à K . En effet, si \mathcal{E} est le fibré sous-jacent à $\underline{\mathcal{E}}$, si pour $\sigma \in G_K$, $u_\sigma : \sigma^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ définit l'action de G_K , il suffit de poser $f_\sigma = u_\sigma$ dans la définition précédente. On a alors la proposition suivante dont la démonstration est formelle.

Proposition 17.2. *Le foncteur qui à $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_K}$ associe $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_L}$ muni de sa donnée de descente induit une équivalence de catégories entres $\text{Fib}_X^{G_K}$ et la catégorie des fibrés G_L -équivariants munis d'une donnée de descente de L à K .*

Définition 17.3. *Un fibré G_K équivariant $\underline{\mathcal{E}}$ sur X est dit potentiellement log-cristallin s'il existe une extension finie L de K dans \overline{K} telle que $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}}$ soit un fibré G_L -équivariant log-cristallin.*

Supposons $L|K$ galoisienne. Alors, $L_0|K_0$ l'est également et il y a un morphisme de restriction $\text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(L_0|K_0)$.

Définition 17.4.

(1) *Un $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré est un (φ, N) -module filtré $(D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet D_L) \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{L/L_0}$ tel que via $\text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(L_0|K_0)$, D est muni d'une action semi-linéaire de $\text{Gal}(L|K)$ commutant à φ et N et laissant invariant la filtration $\text{Fil}^\bullet D_L$ de $D \otimes_{L_0} L$. On note $(\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0}$ la catégorie correspondante.*

(2) *On note*

$$(\varphi, N, G)\text{-ModFil} = \bigcup_{L/K} (\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0}$$

où $L|K$ parcourt les extensions galoisiennes de degré fini de K dans \overline{K} . On l'appelle catégorie des (φ, N, G) -modules filtrés.

Dans le point (2) de la définition précédente, on utilise le fait que si $L'|L|K$ sont des extensions galoisiennes finies de K alors le foncteur d'extension des scalaires

$$(\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow (\varphi, N, G_{L'/K})\text{-ModFil}_{L'/L'_0}$$

est pleinement fidèle.

Proposition 17.5. *La catégorie des (φ, N, G) -modules filtrés est équivalente à celle des fibrés G_K -équivariants potentiellement log-cristallins.*

Démonstration. Pour $A = (D, \varphi, N, \text{Fil}^\bullet N_L) \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{L/L_0}$ et $\sigma \in \text{Gal}(L|K)$ on calcule que

$$\underline{\mathcal{E}}(A)^{(\sigma)} = \underline{\mathcal{E}}(A^{(\sigma)})$$

où

$$A^{(\sigma)} = (D \otimes_{L_0, \sigma|_{L_0}} L_0, \varphi \otimes \varphi, N \otimes Id, \text{Fil}^\bullet D_L \otimes_{L, \sigma} L).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 17.2. \square

17.2. Énoncé du théorème. Rappelons qu'un fibré équivariant $\underline{\mathcal{E}} \in \text{Fib}_X^{G_K}$ est de de Rham si la B_{dR}^+ -représentation $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ est génériquement plate i.e. $\widehat{\mathcal{E}}_\infty[\frac{1}{t}]$ est engendré par ses invariants sous G_K . Géométriquement cela s'interprète en disant que le tiré en arrière du fibré équivariant $\underline{\mathcal{E}}$ sur le « disque formel épointé » $\text{Spec}(B_{dR})$ est trivial.

Lemme 17.6. *Tout fibré G_K -équivariant potentiellement de de Rham est de de Rham.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que toute B_{dR} -représentation potentiellement plate est plate. Mais si $L|K$ est galoisienne de degré fini et $W \in \text{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$, W^{G_L} est un $L = B_{dR}^{G_L}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de $\text{Gal}(L|K)$. Puisque $W^{G^K} = (W^{G_L})^{\text{Gal}(L|K)}$ on a $\dim_L W^{G_L} = \dim_K W^{G^K}$ (Hilbert 90). \square

Puisque tout fibré équivariant log-cristallin est de de Rham, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 17.7. *Tout fibré G_K -équivariant potentiellement log-cristallin est de de Rham.*

Le théorème principal de ce chapitre est la réciproque à la proposition précédente.

Théorème 17.8. *Tout fibré G_K -équivariant de de Rham sur X est potentiellement log-cristallin.*

Le théorème précédent appliqué aux fibrés équivariants semi-stables de pente 0 permet de retrouver le théorème de monodromie p -adique : toute représentation de de Rham est potentiellement log-cristalline.

La proposition 15.13 permet de réduire le théorème à l'énoncé suivant.

Théorème 17.9. *Soit $\underline{\mathcal{E}}$ un fibré G_K -équivariant sur X tel que $\underline{\mathcal{E}}_\infty \otimes k(\infty)$ soit une C -représentation de Hodge-Tate de poids 0. Il existe alors une extension de degré fini $L|K$ et $(D, \varphi, N) \in (\varphi, N)\text{-Mod}_{L_0}$ tels que $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}} \simeq \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N)$.*

17.3. Le cas semi-stable. On commence par démontrer le théorème 17.9 lorsque $\underline{\mathcal{E}}$ est semi-stable. Soit donc λ la pente de $\underline{\mathcal{E}}$. Si $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d, h) = 1$, quitte à remplacer K par une extension non-ramifiée de degré fini, on peut supposer que k_K contient \mathbb{F}_{p^h} . D'après la proposition 14.22 il existe alors un D_λ^{opp} -espace vectoriel de dimension finie V et une représentation continue

$$\rho : G_K \longrightarrow \text{GL}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(V)$$

tels que

$$\underline{\mathcal{E}} \simeq (V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)) \overset{G_K}{\wedge} \rho.$$

Comme C -représentation de G_K ,

$$\underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)_\infty \otimes k(\infty) = C^h.$$

Il y a de plus un isomorphisme

$$D_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \simeq M_h(C)$$

tel que l'action de D_λ sur $\underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)$ induise sur $\underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)_\infty \otimes k(\infty)$ l'action canonique de l'algèbre de matrices $M_h(C)$ sur C^h . On a alors un isomorphisme de C -représentations de G_K

$$(V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda))_\infty \otimes k(\infty) \simeq V_C \otimes_{M_h(C)} C^h$$

où l'on note $V_C = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. On a donc

$$\underline{\mathcal{E}}_\infty \otimes k(\infty) \simeq V_C \otimes_{M_h(C)} C^h$$

où l'action semi-linéaire de $\sigma \in G_K$ est donnée par $(\rho(\sigma) \otimes \sigma) \otimes \sigma^{\oplus h}$, $(\rho(\sigma) \otimes \sigma)$ désignant l'action sur $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. Rappelons qu'il y a une équivalence de Morita entre $M_h(C)$ -modules à droites et C -espaces vectoriels. Au $M_h(C)$ -module M elle associe $M \otimes_{M_h(C)} C^h$. Au C -espace vectoriel W elle associe le module $W \otimes_C C^h$, l'action de la matrice $A \in M_h(C)$ étant donnée par $Id \otimes {}^t A$. On a alors un isomorphisme naturel

$$V_C \simeq (V_C \otimes_{M_h(C)} C^h) \otimes_C C^h.$$

C'est un isomorphisme de C -représentations de G_K . On en déduit que V_C est Hodge-Tate de poids 0. D'après Sen ([41] 3.2) il en résulte que si $I_K \subset G_K$ est le sous-groupe d'inertie alors $\rho|_{I_K}$ est d'image finie. Après une extension $L|K$ de degré fini on a donc $R_{L/K}\underline{\mathcal{E}} \simeq (V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)) \overset{G_K}{\wedge} \rho|_{G_L}$ avec $\rho|_{G_L}$ non-ramifié. Le morphisme $\rho|_{G_L} : G_L \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}_L|k_L) \rightarrow \text{GL}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(V)$ définit par torsion (cf. proposition 17.10 qui suit) un isocristal $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{L_0}$ isocline de pente $-\lambda$ tel que $\underline{\mathcal{E}}(D, \varphi) \simeq R_{L/K}\underline{\mathcal{E}}$. On a donc démontré le théorème 17.9 lorsque $\underline{\mathcal{E}}$ est semi-stable.

La proposition qui suit est bien connue. Lorsque $\lambda = 0$ elle donne la classification des « unit root » isocristaux en termes de représentations galoisiennes.

Proposition 17.10. *Soit k un corps parfait et \bar{k} une clôture algébrique. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ notons Isoc_k^λ la catégorie des k -isocristaux isoclines de pente λ . Il y a alors une équivalence de catégories*

$$\begin{aligned} \text{Isoc}_k^\lambda &\xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{D_\lambda^{\text{opp}}}(Gal(\bar{k}|k)) \\ (D, \varphi) &\longmapsto \text{Hom}(W(\bar{k})_{\mathbb{Q}}(\lambda), (D, \varphi) \otimes W(\bar{k})_{\mathbb{Q}}). \end{aligned}$$

17.4. Le cas général : dévissage à un énoncé de cohomologie galoisienne.

17.4.1. *Calculs d'extensions.* Soient $A_1 = (D_1, \varphi_1, N_1)$ et $A_2 = (D_2, \varphi_2, N_2)$ deux (φ, N) -modules filtrés. Le foncteur

$$\begin{aligned} (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} &\longrightarrow \text{Fib}_X^{G_K} \\ A &\longmapsto \underline{\mathcal{E}}(A) \end{aligned}$$

induit une application

$$\alpha_{A_1, A_2} : \text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}}^1(A_1, A_2) \rightarrow \ker \left(\text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{E}}(A_1), \underline{\mathcal{E}}(A_2)) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Rep}_{B_{dR}^+}^{(G_K)}}^1(\widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_2)}_\infty) \right).$$

Le membre de gauche

$$\ker \left(\text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{E}}(A_1), \underline{\mathcal{E}}(A_2)) \longrightarrow \text{Ext}_{\text{Rep}_{B_{dR}^+}^{(G_K)}}^1(\widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_2)}_\infty) \right)$$

consiste en les classes d'extensions de $\underline{\mathcal{E}}(A_1)$ par $\underline{\mathcal{E}}(A_2)$ qui sont des fibrés équivariants de de Rham.

On a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}}^1(A_1, A_2) &= \text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}}^1(\mathbf{1}, A_1^\vee \otimes A_2) \\ \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{E}}(A_1), \underline{\mathcal{E}}(A_2)) &= \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(A_1)^\vee \otimes \underline{\mathcal{E}}(A_2)) \\ &= \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(A_1^\vee \otimes A_2)) \\ \text{Ext}_{\text{Rep}_{B_{dR}^+}^{(G_K)}}^1(\widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_2)}_\infty) &= \text{Ext}_{\text{Rep}_{B_{dR}^+}^{(G_K)}}^1(B_{dR}^+, \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_1)}_\infty^\vee \otimes \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_2)}_\infty) \\ &= H^1(G_K, D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} B_{dR}^+) \\ &= D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} H^1(G_K, B_{dR}^+) \\ &= D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} H^1(G_K, C). \end{aligned}$$

Le lemme suivant permet de calculer les extensions de (φ, N) -modules dans le cas dont nous aurons besoin plus tard.

Lemme 17.11. *Pour $(D_1, \varphi_1, N_1), (D_2, \varphi_2, N_2) \in (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}$ n'ayant aucune pente de Dieudonné-Manin en commun il y a un isomorphisme*

$$\text{Hom}(D_1, D_2)^{\varphi=p^{-1}} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}}^1((D_1, \varphi_1, N_1), (D_2, \varphi_2, N_2)).$$

Démonstration. Soit (E, φ, N) qui est une extension entre nos deux (φ, N) -modules. Puisque (D_1, φ_1) et (D_2, φ_2) n'ont pas de pente en commun, la suite exacte associée de φ -modules est canoniquement scindée. On peut donc supposer que

$$(E, \varphi) = (D_1, \varphi_1) \oplus (D_2, \varphi_2).$$

Dans une telle décomposition, l'opérateur de monodromie N est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ f & N_2 \end{pmatrix}$$

où $f \in \text{Hom}_{K_0}(D_1, D_2)$. La condition $N\varphi = p\varphi N$ se traduit alors en l'équation

$$f \circ \varphi_1 = p\varphi_2 \circ f$$

soit encore

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = p^{-1}f.$$

□

Notons

$$(D, \varphi, N) = (D_1, \varphi_1, N_1)^\vee \otimes (D_2, \varphi_2, N_2).$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante : les pentes de (D_1, φ_1) sont strictement plus grandes que celles de (D_2, φ_2) . Les pentes de Harder-Narasimhan du fibré $\mathcal{E}(D_1, \varphi_1)$ sont donc strictement plus petites que celles de $\mathcal{E}(D_2, \varphi_2)$. D'après le corollaire 14.25 on a donc

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{E}}(A_1), \underline{\mathcal{E}}(A_2)) &= H^1(G_K, \text{Hom}(\mathcal{E}(A_1), \mathcal{E}(A_2))) \\ &= H^1(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{\varphi=Id, N=0}). \end{aligned}$$

L'application α_{A_1, A_2} s'identifie donc à l'application

$$\beta_{D, \varphi, N} : D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow \ker \left(H^1(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{\varphi=Id, N=0}) \rightarrow H^1(G_K, D \otimes_{K_0} C) \right).$$

Celle-ci est définie pour tout (φ, N) -module filtré (D, φ, N) de pentes strictement négatives, $\beta_{D, \varphi, N} = \alpha_{\mathbf{1}, (D, \varphi, N)}$ où $\mathbf{1} = (K_0, \varphi, 0)$. On vérifie le lemme suivant par un calcul explicite.

Lemme 17.12. *Soit (D, φ) un φ -module de pentes strictement négatives que l'on voit comme un (φ, N) -module en posant $N = 0$. Alors,*

$$\begin{aligned} \beta_{D, \varphi, 0} : D^{\varphi=p^{-1}} &\longrightarrow H^1(G_K, (D \otimes_{K_0} B^+)^{\varphi=Id}) \\ a &\longmapsto [(a \otimes \log_{x, \sigma})_{\sigma}] \end{aligned}$$

où $(\log_{x, \sigma})_{\sigma} \in Z^1(G_K, (B^+)^{\varphi=p})$ est le 1-cocycle défini dans la section 16.2.2.

17.4.2. *Déviissage à énoncé de cohomologie galoisienne d'espaces de Banach-Colmez.* Soit $\underline{\mathcal{E}}$ un fibré G_K -équivariant tel que la B_{dR}^+ -représentation $\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_{\infty}$ soit plate. Notons

$$0 = \underline{\mathcal{E}}_0 \subsetneq \underline{\mathcal{E}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underline{\mathcal{E}}_r = \underline{\mathcal{E}}$$

sa filtration de Harder-Narasimhan (14.17). Toute B_{dR}^+ -représentation qui est un sous-quotient d'une B_{dR}^+ -représentation plate est elle même plate. Il en résulte que pour $0 \leq i < j \leq r$, $(\underline{\mathcal{E}}_j / \underline{\mathcal{E}}_i)_{\infty}$ est plate. Si $r = 1$ on sait d'après la section 17.3 que $\underline{\mathcal{E}}$ est potentiellement associé à un (φ, N) -module. Procédons maintenant par récurrence sur r et supposons donc $r > 1$ et $\underline{\mathcal{E}}_{r-1}$ potentiellement associé à un (φ, N) -module. Quitte à remplacer K par une extension de degré fini on peut donc supposer que

$$\underline{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{E}}_{r-1} = \underline{\mathcal{E}}(A_1), \quad \underline{\mathcal{E}}_{r-1} = \underline{\mathcal{E}}(A_2)$$

avec $A_1, A_2 \in (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}$. La classe de l'extension équivariante

$$0 \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_{r-1} \longrightarrow \underline{\mathcal{E}} \longrightarrow \underline{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{E}}_{r-1} \longrightarrow 0$$

vit dans

$$\ker \left(\text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{E}}(A_1), \underline{\mathcal{E}}(A_2)) \longrightarrow \text{Ext}_{\text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)}^1(\widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_1)}_{\infty}, \widehat{\underline{\mathcal{E}}(A_2)}_{\infty}) \right).$$

D'après les calculs d'extension de la section précédente, afin de montrer que $\underline{\mathcal{E}}$ est associé à un (φ, N) -module extensions de A_1 par A_2 , on est ramené à démontrer la proposition suivante.

Proposition 17.13. *Soit (D, φ, N) un (φ, N) -module de pentes strictement négatives. Alors,*

$$\beta_{D, \varphi, N} : D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow \ker \left(H^1(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log}^+)^{\varphi=Id, N=0}) \rightarrow H^1(G_K, D \otimes_{K_0} C) \right)$$

est un isomorphisme.

Commençons par remarquer que la pleine fidélité du foncteur associant à un (φ, N) -module un fibré équivariant implique que $\beta_{D, \varphi, N}$ est toujours injective (si l'extension de fibrés équivariants associée à une extension de (φ, N) -modules est scindée alors l'extension de (φ, N) -modules l'est également). Il reste donc à montrer sa surjectivité.

Montrons maintenant qu'il suffit de vérifier la proposition 17.13 précédente lorsque $N = 0$ et D est isocline. Pour cela soit

$$D = \bigoplus_{i=1}^m D_i$$

la décomposition en parties isoclines de D où D_i est de pente λ_i avec $\lambda_1 > \cdots > \lambda_m$. Puisque $N : (D, \varphi) \rightarrow (D, p\varphi)$, $N|_{D_m} = 0$ et $(D_m, \varphi, 0)$ est un sous- (φ, N) -module de (D, φ, N) . Notons $D' = D_m$ et $D'' = D/D'$ comme (φ, N) -modules. On a bien sûr une suite exacte

$$0 \longrightarrow (D')^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow (D'')^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow 0.$$

La suite exacte de fibrés équivariants

$$0 \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}(D', \varphi) \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N) \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}(D'', \varphi, N) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(D', \varphi)) \longrightarrow \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, N)) \longrightarrow \text{Ext}_{\text{Fib}_X^{G_K}}^1(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(D'', \varphi, N)).$$

En effet,

$$\text{Hom}_{\text{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{O}_X, \underline{\mathcal{E}}(D'', \varphi, N)) = \text{Hom}_{(\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}}(\mathbf{1}, (D'', \varphi, N)) = 0$$

car (D'', φ) ne possède pas de pente nulle. Le corollaire 14.25 permet de réécrire la suite exacte précédente sous la forme

$$0 \longrightarrow H^1(G_K, (D' \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}) \longrightarrow H^1(G_K, (D \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}) \longrightarrow H^1(G_K, (D'' \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}).$$

Afin d'abrégier les notations prenons la définition suivante.

Définition 17.14. *Pour un (φ, N) -module M on note*

$$H_g^1(G_K, (M \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}) = \ker(H^1(G_K, (M \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}) \rightarrow H^1(G_K, M \otimes B_{dR}^+)).$$

De la suite exacte précédente on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_g^1(G_K, (D' \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}) \longrightarrow H_g^1(G_K, (D \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}) \longrightarrow H_g^1(G_K, (D'' \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}).$$

On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D'^{\varphi=p^{-1}} & \longrightarrow & D^{\varphi=p^{-1}} & \longrightarrow & D''^{\varphi=p^{-1}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta_{D', \varphi} & & \downarrow \beta_{D, \varphi, N} & & \downarrow \beta_{D'', \varphi, N} & & \\ 0 & \rightarrow & H_g^1(G_K, (D' \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}) & \rightarrow & H_g^1(G_K, (D \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}) & \rightarrow & H_g^1(G_K, (D'' \otimes B_{\log}^+)^{\varphi=\text{Id}, N=0}). & & \end{array}$$

Il en résulte que si $\beta_{D', \varphi}$ et $\beta_{D'', \varphi, N}$ sont des isomorphismes alors $\beta_{D, \varphi, N}$ est également un. Par récurrence sur le nombre de pentes de l'isocrystal (D, φ) on est donc ramené à montrer la proposition suivante.

Proposition 17.15. *Soit (D, φ) un isocrystal isocline de pente strictement négative.*

- (1) *Si la pente de (D, φ) est différente de -1 alors $H_g^1(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}) = 0$.*
- (2) *Si (D, φ) est de pente -1 alors l'injection*

$$\begin{array}{ccc} \beta_{D, \varphi} : D^{\varphi=p^{-1}} & \longrightarrow & H_g^1(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}) \\ a & \longmapsto & [(a \otimes \log_{x, \sigma})\sigma] \end{array}$$

est un isomorphisme.

Soit (D, φ) comme dans le théorème précédent. Remarquons maintenant que l'on peut supposer k_K algébriquement clos. Soient en effet $I_K \subset G_K$ le sous-groupe d'inertie. Si $M = (D \otimes B^+)^{\varphi=\text{Id}}$, il y a une suite d'inflation restriction

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k|k_K), M^{I_K}) \rightarrow H^1(G_K, M) \rightarrow H^1(I_K, M)^{\text{Gal}(k|k_K)} \rightarrow H^2(\text{Gal}(k|k_K), M^{I_K}).$$

Puisque $(B^+)^{I_K} = W(k)_{\mathbb{Q}}$ on a

$$M^{I_K} = (D \otimes_{K_0} W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi=\text{Id}} = 0$$

car (D, φ) ne possède pas de pente nulle. Il y a donc un isomorphisme

$$\text{Res}_{I_K}^{G_K} : H^1(G_K, M) \xrightarrow{\sim} H^1(I_K, M)^{\text{Gal}(k|k_K)}.$$

Soit K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K dans \overline{K} . Puisque pour $i > 0$, $H^i(\text{Gal}(k|k_K), k) = 0$, par approximations successives on a

$$H^i(\text{Gal}(k|k_K), \widehat{K^{nr}}) = 0, \quad i > 0.$$

Rappelons de plus que d'après Tate, $C^{I_K} = \widehat{K^{nr}}$. La suite d'inflation restriction

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k|k_K), C^{I_K}) \rightarrow H^1(G_K, C) \rightarrow H^1(I_K, C)^{\text{Gal}(k|k_K)} \rightarrow H^2(\text{Gal}(k|k_K), C^{I_K})$$

fournit donc un isomorphisme

$$\text{Res}_{I_K}^{G_K} : H^1(G_K, C) \xrightarrow{\sim} H^1(I_K, C)^{\text{Gal}(k|k_K)}.$$

Mettant ensemble les deux isomorphismes de restriction que l'on vient d'établir on obtient un isomorphisme

$$\text{Res}_{I_K}^{G_K} : H_g^1(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id}) \xrightarrow{\sim} H_g^1(I_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id})^{\text{Gal}(k|k_K)}.$$

Puisque $D = (D \otimes_{K_0} w(k)_{\mathbb{Q}})^{\text{Gal}(k|k_K)}$ on obtient donc que si

$$\beta_{(D,\varphi) \otimes W(k)_{\mathbb{Q}}} : (D \otimes W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi=p^{-1}} \rightarrow H_g^1(I_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id})^{\text{Gal}(k|k_K)}$$

est un isomorphisme alors $\beta_{D,\varphi}$ en est un. On est donc ramené à démontrer le théorème lorsque k_K est algébriquement clos.

Si k_K est algébriquement clos on peut décomposer l'isocristal isocline (D, φ) en somme directe d'isocristaux simples. La proposition 17.15 se réduit donc à la proposition suivante de Colmez.

Proposition 17.16 ([10] prop. 10.11). *Supposons k_K algébriquement clos. Soient d, h deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Si*

$$\begin{aligned} u : (B^+)^{\varphi^h=p^d} &\longrightarrow C^h \\ x &\longmapsto (\theta(x), \theta(\varphi(x)), \dots, \theta(\varphi^{h-1}(x))) \end{aligned}$$

notons

$$H_g^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}) = \ker \left(H^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}) \xrightarrow{u_*} H^1(G_K, C^h) \right).$$

(1) Si $d = h = 1$ alors $H_g^1(G_K, (B^+)^{\varphi=p})$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe du cocycle $(\log_{x,\sigma})_{\sigma}$, classe qui est celle de l'extension $0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(1) \rightarrow V_p(E) \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow 0$ associée à une courbe elliptique de Tate E sur K via le plongement $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p \cdot t \subset (B^+)^{\varphi=p}$.

(2) Si $(d, h) \neq (1, 1)$ alors

$$H_g^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}) = 0.$$

17.4.3. *Interprétation en termes de l'exponentielle de Bloch-Kato des puissances du caractère de Lubin-Tate.* Soient $d, h > 0$ avec $(d, h) = 1$. Notons $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h} : G_K \rightarrow \mathbb{Q}_p^{\times}$ le caractère de Lubin-Tate. Il y a une suite exacte de G_K -modules

$$0 \longrightarrow \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \longrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \longrightarrow B_{dR}^+ / t^d B_{dR}^+ \longrightarrow 0.$$

Celle-ci fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\delta} H^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d) \longrightarrow H^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}) \longrightarrow H^1(G_K, B_{dR}^+ / t^d B_{dR}^+) = H^1(G_K, C)$$

où δ est l'exponentielle de Bloch-Kato de $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d$. On a donc

$$\text{coker}(\delta) = \ker \left(H^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}) \xrightarrow{\theta_*} H^1(G_K, C) \right).$$

L'application composée

$$\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \hookrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \hookrightarrow B_{dR}^+$$

est à valeurs dans $t^d B_{dR}^+$ et définit donc par composition avec la projection sur $\text{gr}^d B_{dR}^+$ une application

$$\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \longrightarrow C(d).$$

Pour $0 < i < h$, on a une application composée

$$\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \hookrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \xrightarrow{\theta \circ \varphi^i} C.$$

Mises ensembles cela définit une application

$$\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \longrightarrow C(d) \oplus C^{h-1}$$

qui fournit la décomposition de Hodge-Tate de $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d$

$$\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \xrightarrow{\sim} C(d) \oplus C^{h-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} H_g^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d) &:= \ker \left(H^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d) \longrightarrow H^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \otimes_{\mathbb{Q}_p} C) \right) \\ &= \ker \left(H^1(G_K, (B^+)^{\varphi^h = p^d}) \xrightarrow{(\theta_*, \theta \circ \varphi_*, \dots, \theta \circ \varphi_*^{h-1})} H^1(G_K, C^h) \right) \end{aligned}$$

qui paramètre les extensions de \mathbb{Q}_p par $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d$ qui sont de de Rham. De façon équivalente, $H^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d)$ paramètre les extensions de \mathbb{Q}_p -représentations de \mathbb{Q}_p par $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d$. La classe d'une telle extension

$$0 \longrightarrow \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0$$

est dans $H_g^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d)$ si et seulement si V est de de Rham comme \mathbb{Q}_p -représentation.

Voici maintenant la traduction de la proposition 17.16 en termes de représentations galoisiennes.

Proposition 17.17. *Soient $d, h > 0$ avec $(d, h) = 1$. Notons $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h} : G_K \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ le caractère de Lubin-Tate.*

- (1) *Si $d = h = 1$, l'exponentielle de Bloch-Kato $\delta : K \rightarrow H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ a pour conoyau un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension 1. En d'autres termes, si V est une extension de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ alors soit V est cristalline isomorphe au module de Tate d'une courbe elliptique ayant bonne réduction ordinaire, soit V est semi-stable isomorphe au module de Tate d'une courbe elliptique de Tate.*
- (2) *Si $(d, h) \neq (1, 1)$, l'exponentielle de Bloch-Kato*

$$\delta : K \longrightarrow H^1(G_K, \chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d)$$

est un isomorphisme. En d'autres termes, toute \mathbb{Q}_p -représentation de dimension 2 qui est une extension de \mathbb{Q}_p par $\chi_{\mathcal{L}\mathcal{T}_h}^d$ et qui est de de Rham en tant que \mathbb{Q}_p -représentation est cristalline.

Remarque 17.18. *Le cas (1) de la proposition précédente découle en fait facilement de la théorie de Kummer (cf. [37]). Plus précisément, si $\widehat{K^\times}$ désigne le complété p -adique de K^\times , la théorie de Kummer fournit une identification*

$$H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) = \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Il y a une application exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : K &\longrightarrow \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto \exp(p^n x) \otimes p^{-n}, \quad n \gg 0 \end{aligned}$$

où $\exp(p^n x) \in 1 + \mathfrak{m}_K \subset \widehat{K^\times}$. Cette application s'identifie à l'exponentielle de Bloch-Kato. La valuation $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ s'étend en une application $v : \widehat{K^\times} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\exp} \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{v \otimes Id} \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0.$$

17.4.4. *Preuve alternative lorsque le corps résiduel est fini d'après Hyodo.* Supposons que le corps résiduel de K est fini c'est à dire K est une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p et reprenons la preuve du théorème 17.8 à la proposition 17.15, juste avant le dévissage au cas d'un corps résiduel algébriquement clos.

Soit donc (D, φ) un isocristal isocline de pente strictement négative.

Lemme 17.19. *Il existe une filtration $\text{Fil}^\bullet D_K$ de D_K telle que $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ soit admissible et $\text{Fil}^i D_K = 0$ si $i > 0$.*

Démonstration. Si (D, φ) est simple il suffit de choisir une filtration $\text{Fil}^\bullet D_K$ telle que $t_H(D_K, \text{Fil}^\bullet D_K) = t_N(D, \varphi)$ et $\text{Fil}^i D_K = 0$ lorsque $i > 0$ (cette dernière conditions est possible car la pente de D est strictement négative). En général, supposons que l'on ait une extensions d'isocristaux

$$0 \longrightarrow (D', \varphi) \longrightarrow (D, \varphi) \longrightarrow (D'', \varphi) \longrightarrow 0.$$

Soit $\text{Fil}^\bullet D'_K$, resp. $\text{Fil}^\bullet D''_K$, une filtration admissible de (D', φ) , resp. (D'', φ) , telle que $\text{Fil}^i D'_K = 0$, resp. $\text{Fil}^i D''_K = 0$, lorsque $i > 0$. Soit $u : D'' \rightarrow D$ une section K_0 -linéaire de $D' \rightarrow D''$. Posons alors $\text{Fil}^\bullet D_K = \text{Fil}^\bullet D'_K + u(\text{Fil}^\bullet D''_K)$. La suite de φ -modules filtrés

$$0 \longrightarrow (D', \varphi, \text{Fil}^\bullet D'_K) \longrightarrow (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) \longrightarrow (D'', \varphi, \text{Fil}^\bullet D''_K) \longrightarrow 0$$

est exacte. On conclut puisqu'une extension de φ -modules filtrés (faiblement) admissibles est admissible (dans une catégorie de Harder-Narasimhan, une extension entre objets semi-stables de pente 0 est semi-stable de pente 0). \square

Soit donc $\text{Fil}^\bullet D_K$ une telle filtration et $V = V_{\text{cris}}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$, une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate positifs. Remarquons que puisque la filtration $\text{Fil}^\bullet D_K$ est concentrée en degrés négatifs ou nuls,

$$\text{Fil}^0(D \otimes B_{dR}) \subset D \otimes B_{dR}^+$$

Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow (D \otimes B^+)^{\varphi=Id} \longrightarrow D \otimes B_{dR}^+ / \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR}) \longrightarrow 0.$$

Puisque les pentes de (D, φ) sont strictement positives, $H^0(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id}) = 0$. On en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(G_K, D \otimes B_{dR}^+ / \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR})) \xrightarrow{\delta} H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id}) \\ &\longrightarrow H^1(G_K, D \otimes B_{dR}^+ / \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR})). \end{aligned}$$

L'application naturelle

$$D_K / \text{Fil}^0 D_K \longrightarrow H^0(G_K, D \otimes B_{dR}^+ / \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR}))$$

est un isomorphisme (cela résulte de ce que d'après Tate, pour $a > 0$, $\theta : H^0(G_K, B_{dR}^+ / t^a B_{dR}^+) \xrightarrow{\sim} H^0(G_K, C) = K$). L'homomorphisme de connexions δ dans la suite exacte précédente est l'exponentielle de Bloch-Kato de V ([5] §3) :

$$\delta = \exp_V : D_K / \text{Fil}^0 D_K \longrightarrow H^1(G_K, V).$$

Notons maintenant

$$H_g^1(G_K, V) = \ker(H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_K, V \otimes B_{dR}))$$

qui paramètre les extensions de \mathbb{Q}_p par V qui sont de de Rham. L'exponentielle de Bloch-Kato est à valeurs dans H_g^1 . La suite exacte précédente fournit l'égalité

$$H_g^1(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi=Id}) = \text{coker}(D_K / \text{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\exp_V} H_g^1(G_K, V)).$$

Soit $\mathbf{1} \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$ l'unité de la catégorie tensorielle des φ -modules filtrés. Puisque (D, φ) ne possède pas de pente 0 on a

$$\text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-ModFil}_{K/K_0}}^1(\mathbf{1}, (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)) = D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K / \text{Fil}^0 D_K$$

où le facteur $D^{\varphi=p^{-1}}$ paramètre l'opérateur de monodromie dans l'extension (cf. lemme 17.11) et $D_K / \text{Fil}^0 D_K$ paramètre la filtration. Par application du foncteur $V_{\log\text{-cris}}$ à de telles extensions cela induit une application injective

$$D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K / \text{Fil}^0 D_K \hookrightarrow H_g^1(G_K, V)$$

qui coïncide avec l'exponentielle de Bloch-Kato sur la seconde composante. L'énoncé de la proposition 17.15 est alors équivalent à ce que cette application soit un isomorphisme c'est à dire : toute extension de \mathbb{Q}_p par V qui est de de Rham est log-cristalline. Remarquons maintenant que l'application

$$H^1(G_K, \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR})) \longrightarrow H^1(G_K, D \otimes B_{dR})$$

est injective (c'est une conséquence de ce que la filtration $\text{Fil}^\bullet D_K$ est concentrée en degrés négatifs ou nuls et des calculs de cohomologie galoisienne de Tate). On a donc

$$H_g^1(G_K, V) = \ker(H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_K, \text{Fil}^0(D \otimes B_{dR}))).$$

D'après Tate,

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sim} & H^1(G_K, C) \\ 1 & \mapsto & -[\log \circ \chi_{cyc}] \end{array}$$

qui induit un isomorphisme (toujours d'après les calculs de cohomologie galoisienne de Tate)

$$\mathrm{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\sim} H^1(G_K, \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{dR})).$$

L'application déduite

$$H^1(G_K, V) \longrightarrow \mathrm{Fil}^0 D_K$$

coïncide alors avec l'exponentielle duale de Bloch-Kato \exp_V^* (cf. preuve prop. 3.8 de [5]) : via l'accouplement de dualité de Tate parfait

$$H^1(G_K, V^*(1)) \times H^1(G_K, V) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$$

on a pour $x \in (\mathrm{Fil}^0 D_K)^* = D_{cris}(V^*(1))/\mathrm{Fil}^0 D_{cris}(V^*(1))$ et $y \in H^1(G_K, V)$

$$\langle \exp_{V^*(1)}(x), y \rangle = \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p} \langle x, \exp_V^*(y) \rangle .$$

La perfection des accouplement précédents couplée à l'injectivité de $\exp_{V^*(1)}$ montrent que \exp_V^* est surjectif.

On dispose donc d'une suite

$$0 \longrightarrow D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\alpha} H^1(G_K, V) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Fil}^0 D_K \longrightarrow 0$$

telle que $\beta \circ \alpha = 0$, α est injectif et β surjectif. On veut montrer que cette suite est exacte. Il suffit pour cela de montrer que la dimension du \mathbb{Q}_p -espace vectoriel du milieu est la somme de celle des termes extrêmes. D'après Tate,

$$\dim H^0(G_K, V) - \dim H^1(G_K, V) + \dim H^2(G_K, V) = -[K : \mathbb{Q}_p] \dim V.$$

Puisque (D, φ) ne possède pas de pente nulle, $V^{G_K} = 0$. Par dualité de Tate,

$$\dim H^2(G_K, V) = \dim H^0(G_K, V^*(1)) = \dim \mathrm{Fil}^1(D^*)^{\varphi=p}.$$

Utilisant la faible admissibilité de $(D^*, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K^*)$ appliquée au sous-isocrystal $(D^*)^{\varphi=p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ de D^* on vérifie que $\mathrm{Fil}^1(D^*)^{\varphi=p} = (D^*)^{\varphi=p}$. Soit $W = (D \otimes_{K_0} W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi=p^{-1}}$ comme représentation de $\mathrm{Gal}(k|k_K)$. Notons $u \in \mathrm{End}(W)$ l'action du Frobenius de $\mathrm{Gal}(k|k_K)$. On a $D^{\varphi=p^{-1}} = \ker(Id-u)$. De plus, $(D^*)^{\varphi=p} = \ker(Id - {}^t u)$. On a donc $\dim(D^*)^{\varphi=p} = \dim D^{\varphi=p^{-1}}$. On conclut.

17.5. Addendum : cohomologie équivariante et exponentielle de Bloch-Kato généralisée.

Voici quelques constructions dont les auteurs ignorent si elles seront utiles plus tard. Dans la preuve du théorème 17.8 est apparu naturellement le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{E}}).$$

Posons donc pour $\underline{\mathcal{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$

$$\begin{aligned} H_{G_K}^0(X, \underline{\mathcal{E}}) &:= \mathrm{Hom}(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{E}}) = H^0(X, \underline{\mathcal{E}})^{G_K} \\ H_{G_K}^1(X, \underline{\mathcal{E}}) &:= \mathrm{Ext}_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}^1(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

que l'on appelle cohomologie équivariante de $\underline{\mathcal{E}}$. D'après la proposition 14.24 il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(G_K, H^0(X, \underline{\mathcal{E}})) \longrightarrow H_{G_K}^1(X, \underline{\mathcal{E}}) \longrightarrow H^1(X, \underline{\mathcal{E}})^{G_K}.$$

Par exemple, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$,

$$H_{G_K}^1(X, \underline{V} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{\mathcal{O}}_X) = H^1(G_K, V).$$

Le H^1 équivariant généralise donc la cohomologie galoisienne des représentations p -adiques de G_K . On peut en fait définir des groupes de cohomologie équivariante en degrés supérieurs de la façon suivante. Notons (M, W, α) la B -paire associée à $\underline{\mathcal{E}}$,

$$\begin{aligned} M &= \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathcal{E}}) \in \text{Rep}_{B_e}(G_K) \\ W &= \underline{\mathcal{E}}_\infty \in \text{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K) \\ \alpha &: M \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} W[\tfrac{1}{t}]. \end{aligned}$$

Par définition, une i -cochaîne continue $c : G_K^i \rightarrow M$ est une i -cochaîne telle que composée avec le plongement défini par α , $M \hookrightarrow W[\tfrac{1}{t}]$, elle soit à valeurs dans un B_{dR}^+ -réseau G_K -invariant de $W[\tfrac{1}{t}]$ et soit continue pour la topologie de Fréchet sur ce réseau (cette définition de la continuité ne dépend pas alors du choix d'un tel réseau). On définit de même les cochaînes continues à valeurs dans W et $W[\tfrac{1}{t}]$. Notons $C^i(G_K, M)$ et $C^i(G_K, W)$ les groupes de cochaînes continues. On forme alors le bicomplexe $(D^{ij})_{i,j}$ concentré en degrés $i \geq 0$ et $0 \leq j \leq 1$ en posant

$$\begin{aligned} D^{i,0} &= C^i(G_K, M) \oplus C^i(G_K, W) \\ D^{i,1} &= C^i(G_K, W[\tfrac{1}{t}]) \end{aligned}$$

où les différentielles sont données par $\partial : D^{i,0} \rightarrow D^{i,1}$ est induit par

$$\begin{aligned} M \oplus W &\longrightarrow W[\tfrac{1}{t}] \\ (x, y) &\longmapsto \alpha(x) - y \end{aligned}$$

et $\partial : D^{i,j} \rightarrow D^{i+1,j}$ est la différentielle usuelle sur les cochaînes. Posons maintenant

$$R\Gamma_{G_K}(X, \underline{\mathcal{E}}) := \text{Tot} D^{\bullet\bullet},$$

le complexe simple associé au complexe double précédent. On note alors

$$H_{G_K}^i(X, \underline{\mathcal{E}}) := H^i(R\Gamma_{G_K}(X, \underline{\mathcal{E}})), \quad i \geq 0.$$

On vérifie que cela coïncide avec la définition donnée précédemment pour $i = 0, 1$. Les colonnes du complexe précédent calculent la cohomologie du fibré \mathcal{E} associé à $\underline{\mathcal{E}}$. On en déduit une suite spectrale

$$E_2^{ij} = H^i(G_K, H^j(X, \underline{\mathcal{E}})) \Rightarrow H_{G_K}^{i+j}(X, \underline{\mathcal{E}}).$$

Puisque $H^j(X, \underline{\mathcal{E}}) = 0$ pour $j \neq 0, 1$ et $cd(G_K) \leq 2$ elle dégénère en une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(G_K, H^0(X, \underline{\mathcal{E}})) \rightarrow H_{G_K}^1(X, \underline{\mathcal{E}}) \rightarrow H^1(X, \underline{\mathcal{E}})^{G_K} \rightarrow H^2(G_K, H^0(X, \underline{\mathcal{E}})) \rightarrow H_{G_K}^2(X, \underline{\mathcal{E}}) \\ &\rightarrow H^1(G_K, H^1(X, \underline{\mathcal{E}})) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est un isomorphisme

$$H_{G_K}^3(X, \underline{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_K, H^1(X, \underline{\mathcal{E}})).$$

De plus, $H_{G_K}^i(X, \underline{\mathcal{E}}) = 0$ si $i \neq 0, 1, 2, 3$.

Il y a une application

$$H_{G_K}^i(X, \underline{\mathcal{E}}) \longrightarrow H^i(G_K, \underline{\mathcal{E}}_\infty[\tfrac{1}{t}])$$

dont on note

$$H_{G_K, g}^i(X, \underline{\mathcal{E}})$$

le noyau. Maintenant, si $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ est un φ -module filtré, $\underline{\mathcal{E}} = \underline{\mathcal{E}}(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$, d'après le théorème 17.9 il y a un isomorphisme

$$\text{Ext}_{(\varphi, N)\text{-ModFil}}^1(\mathbf{1}, (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)) \xrightarrow{\sim} H_{G_K, g}^1(X, \underline{\mathcal{E}}).$$

On dispose en particulier d'une exponentielle de Bloch-Kato

$$D_K / \text{Fil}^0 D_K \hookrightarrow H_{G_K, g}^1(X, \underline{\mathcal{E}})$$

qui est un isomorphisme lorsque (D, φ) ne possède pas de pentes 0 ou -1 . L'exponentielle de Bloch-Kato usuelle correspond au cas où $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ est admissible.

Voici quelques questions concernant ces groupes de cohomologie équivariante. Supposons que $[K : \mathbb{Q}_p] < +\infty$. Est-il vrai que pour tout i , $\dim_{\mathbb{Q}_p} H_{G_K}^i(X, \underline{\mathcal{E}}) < +\infty$? Dispose-t-on d'un analogue de la dualité de Tate ?

18. SIMPLE CONNEXITÉ DE LA COURBE

Théorème 18.1. *Le schéma $X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ est simplement connexe.*

Démonstration. On se ramène à prouver que si $E|\mathbb{Q}_p$ est de degré fini et $f : Y \rightarrow X_E$ est un revêtement étale fini géométrique irréductible alors $Y = X_E$. Notons

$$\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_Y,$$

un fibré vectoriel sur X_E . D'après le théorème de classification des fibrés, quitte à remplacer E par une extension de degré fini, on peut supposer que

$$\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_E}(d_i)$$

où $d_1 \geq \dots \geq d_n$ sont des entiers. Fixons un tel isomorphisme. La multiplication de la \mathcal{O}_{X_E} -algèbre \mathcal{A} ,

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A},$$

est alors donnée par des morphismes

$$m_{i,j,k} : \mathcal{O}_{X_E}(d_i + d_j) = \mathcal{O}_{X_E}(d_i) \otimes \mathcal{O}_{X_E}(d_j) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(d_k), \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Supposons par l'absurde que $d_1 > 0$. Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$m_{1,1,k} : \mathcal{O}_{X_E}(2d_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(d_k)$$

c'est à dire

$$m_{1,1,k} \in H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d_k - 2d_1)) = 0$$

car $d_k - 2d_1 < 0$. Ainsi,

$$m|_{\mathcal{O}_{X_E}(d_1) \otimes \mathcal{O}_{X_E}(d_1)} = 0.$$

Cela est impossible car Y est un schéma intègre et donc le produit de deux sections non nulles de \mathcal{A} est non nul. On a donc $0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n$.

D'après la proposition 4.7 on a

$$\mathcal{A}^{\otimes 2} \simeq \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} \mathcal{O}_{X_E}(d_i + d_j) \simeq \mathcal{O}_{X_E}.$$

On en déduit que $d_1 = \dots = d_n = 0$, c'est à dire

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}_{X_E}^n.$$

Utilisant que $H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}) = E$, on constate que les morphismes définissant l'algèbre \mathcal{A} , la multiplication $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et l'unité de l'algèbre $\mathcal{O}_{X_E} \rightarrow \mathcal{A}$, sont donnés par des morphismes $E^n \otimes E^n \rightarrow E^n$ et $E \rightarrow E^n$. Ceux-ci définissent une E -algèbre A telle que $\mathcal{A} = A \otimes_E \mathcal{O}_{X_E}$. Puisque Y/X_E est étale, A est une E -algèbre étale qui est nécessairement triviale puisque Y est supposé géométriquement connexe. \square

Remarque 18.2. *La preuve précédente s'applique également à la droite projective sur un corps algébriquement clos. Elle fournit une preuve de sa simple connexité utilisant le théorème de classification des fibrés de Grothendieck. Cette preuve est plus élémentaire que la preuve usuelle utilisant la formule de Riemann-Hurwitz et la classification des courbes de genre 0, classification qui utilise le théorème de Riemann-Roch.*

RÉFÉRENCES

- [1] Yves André. Slope filtrations. *Confluentes Mathematici*, 1, 2009.
- [2] Arnaud Beauville and Yves Laszlo. Un lemme de descente. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(3) :335–340, 1995.
- [3] Laurent Berger. Presque \mathbb{C}_p -représentations et (ϕ, Γ) -modules. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(4) :653–668, 2009.
- [4] Vladimir Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [5] Spencer Bloch and Kazuya Kato. L -functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [6] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin.
- [7] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.
- [8] Christophe Breuil. Schémas en groupes et corps des normes. <http://www.ihes.fr/~breuil/publications>.
- [9] Pierre Colmez. Espaces de Banach de dimension finie. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(3) :331–439, 2002.
- [10] Pierre Colmez. Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham. *Astérisque*, (319) :117–186, 2008. Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ) -modules.
- [11] Aise Johan de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.
- [12] Vladimir G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94) :594–627, 1974.
- [13] Vladimir G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2) :29–40, 1976.
- [14] Gerd Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.
- [15] Laurent Fargues. Théorie de la réduction pour les groupes p -divisibles. *Prépublication*, <http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications>.
- [16] Laurent Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.
- [17] Laurent Fargues. La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. *J. Reine Angew. Math.*, 645 :1–39, 2010.
- [18] Jean-Marc Fontaine. *Groupes p -divisibles sur les corps locaux*. Société Mathématique de France, Paris, 1977. *Astérisque*, No. 47-48.
- [19] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p -adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [20] Jean-Marc Fontaine. Représentations p -adiques potentiellement semi-stables. In *Périodes p -adiques*, volume 294, pages 321–347. *Astérisque*, 1994.
- [21] Jean-Marc Fontaine. Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques. *Astérisque*, (295) :xi, 1–115, 2004. Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III.
- [22] Benedict Gross and Michael Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [23] Alexander Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.*, 79 :121–138, 1957.
- [24] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8) :222, 1961.
- [25] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1974/75.
- [26] Urs Hartl and Richard Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3) :689–716, 2004.
- [27] Michiel Hazewinkel. Une théorie de Cartier-Dieudonné pour les A -modules formels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 284(12) :A655–A657, 1977.
- [28] Michiel Hazewinkel. *Formal groups and applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [29] Michiel Hazewinkel. Constructing formal groups. VIII. Formal A -modules. *Compositio Math.*, 38(3) :277–291, 1979.
- [30] Michiel Hazewinkel. Twisted Lubin-Tate formal group laws, ramified Witt vectors and (ramified) Artin-Hasse exponentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259(1) :47–63, 1980.

- [31] Nicholas M. Katz. Slope filtration of F -crystals. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Vol. I, volume 63 of *Astérisque*, pages 113–163. Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [32] Kiran S. Kedlaya. Slope filtrations revisited. *Doc. Math.*, 10 :447–525 (electronic), 2005.
- [33] Mark Kisin. Crystalline representations and F -crystals. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.
- [34] Guy Laffaille. Construction de groupes p -divisibles. Le cas de dimension 1. 65 :103–123, 1979.
- [35] Guy Laffaille. Groupes p -divisibles et corps gauches. *Compositio Math.*, 56(2) :221–232, 1985.
- [36] Michel Lazard. Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (14) :47–75, 1962.
- [37] Bernadette Perrin-Riou. Représentations p -adiques ordinaires. *Astérisque*, (223) :185–220, 1994. With an appendix by Luc Illusie, *Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988)*.
- [38] Jérôme Plût. Espaces de banach analytiques p -adiques et espaces de banach-colmez. *Thèse de l’université Paris-Sud Orsay, septembre 2009*.
- [39] Bjorn Poonen. Maximally complete fields. *Enseign. Math. (2)*, 39(1-2) :87–106, 1993.
- [40] Michael Rapoport and Thomas Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [41] Shankar Sen. Continuous cohomology and p -adic Galois representations. *Invent. Math.*, 62(1) :89–116, 1980/81.
- [42] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux (troisième édition)*. Hermann.
- [43] J. T. Tate. p -divisible groups.. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.
- [44] Jean-Pierre Wintenberger. Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(1) :59–89, 1983.