УДК 530.1

Пополнение хронометрии Сигала мирами L и F

А. В. Левичев

Векторная группа пространства-времени Минковского ***M*** действует на нём просто транзитивно и сохраняет систему световых конусов. Спрашивается: какие ещё четырёхмерные группы Ли, действуя локально просто транзитивно, сохраняют такую систему конусов? Доказано, что (при условии би-инвариантности системы конусов) таких групп три. Вводятся соответствующие миры ***D, L, F*** - эти группы Ли, снабжённые биинвариантными лоренцевыми метриками: $d = u(2)$, $l = osc$, $f = u(1,1)$ как алгебры Ли. Они являются мирами общей теории относительности, причем наиболее симметричными (в том смысле, что среди всех четырёхмерных алгебр Ли лишь m, d, l, f соотвествуют группам с биинвариантной невырожденной метрикой лоренцевой сигнатуры).

Хронометрия (т.е. теория Сигала) основана на мире ***D***. Изложена программа ***LF**-развития* хронометрии и в её рамках осуществлено несколько новых математических построений. В частности, по аналогии с эрмитовой моделью $u(2)$ мира Минковского, введена *псевдо-эрмитова* модель $u(1,1)$ и действие расширенной группы Пуанкаре на ней. По аналогии с известным отображением Кэли C_D из $u(2)$ в ***D***, введено отображение C_F из $u(1,1)$ в ***F*** и исследованы его свойства. По аналогии с известным дробно-линейным действием конформной группы на ***D***, введено действие конформной группы на ***F***. Введены в рассмотрение те (конформные) соответствия между (конформно плоскими) ***D***, ***L***, ***F***, которые являются наиболее согласованными с Ли-групповыми структурами этих миров.

Ключевые слова: теория относительности, хронометрия Сигала, теорема Александрова, конформная группа, ковариантные волновые операторы, параллелизации векторных расслоений.

1 Введение и предварительные замечания

Одним из основных результатов данной работы является теорема 6. Рассматриваемая в ней задача связана с известной теоремой А.Д.Александрова ([AD-50]) о том, что преобразования, сохраняющие систему световых конусов в мире Минковского, являются линейными (и составляют группу Пуанкаре). Краткая формулировка нашей задачи такова: какие ещё четырёхмерные группы Ли (кроме очевидной совокупности всех параллельных переносов), действуя локально просто транзитивно, сохраняют такую систему конусов? Ответ: таких групп три. Возможная значимость этого результата в рамках теоретической физики вкратце обсуждается в параграфе 4. Первоначальный вариант теоремы 6 был заявлен (практически без доказательства и без обсуждения его возможной физической значимости) в [Le-03a].

Четырёхмерных неизоморфных (вещественных) алгебр Ли бесконечно много. Искомая группа Ли действует на некотором четырёхмерном многообразии. Понятно, что тогда речь идёт о конусах в касательных пространствах, нежели об обычной системе параллельных конусов. В такой (буквально) формулировке ответом было бы: любая четырёхмерная группа Ли. Ведь на ней можно ввести (односторонне-) инвариантную метрику, задав форму лоренцевой сигнатуры в единице группы. Поэтому необходимы дополнительные условия. Налагается условие двусторонней инвариантности данной системы конусов относительно искомой группы, что представляется довольно естественным (ведь оно выполняется, очевидным образом, для коммутативной группы переносов). Известно, что (отдельное) преобразование, сохраняющее систему световых конусов (или систему “множеств будущего” – если рассматриваемый мир допускает глобальную причинную структуру), является конформным (по отношению к любой метрике, задающей эту систему конусов). В статье рассматривается *SU(2,2)*-реализация конформной группы и её дробно-линейное действие на *U(2)* (см. ниже дальнейшие пояснения). Все четыре соответствующие алгебры Ли (абелева *m*, *u(2)*, *u(1,1)* и осцилляторная *l*) допускают (*согласованные* между собой – см. параграф 4) реализации подалгебрами Ли в *su(2,2)*, поэтому достаточно рассматривать систему световых конусов на *U(2)*.

Всё вышеизложенное (и приводимое ниже) укрепляет веру автора в перспективность *DLF*–подхода в математике и теоретической физике (ср., например, с [SmShSh-92], где группы *D* и *F* рассматриваются как единая система).

Вот несколько необходимых конструкций. Обозначим через ***M*** (линейное) пространство-время Минковского (в его *эрмитовой реализации*, см. параграф 5 ниже), через ***D*** – унитарную группу *U*(2). Известно (см. параграф 5), что образ C_D (***M***) отображения Кэли C_D является открытым плотным подмножеством ***D***. Обозначим через C_y множество $y + C$, где C – верхняя половина светового конуса в нуле (т.е., начале) мира Минковского. Другими словами, C_y есть образ конуса C под действием параллельного переноса (сдвига) на вектор y. Через K_y обозначаем соответствующие выпуклые замкнутые конусы, они нередко называются *множествами будущего*, а всё семейство $\{K_y\}$ называется *причинной структурой* мира ***M***. Дифференциал отображения Кэли переводит конусы C_y в соответствующие конусы в касательных пространствах мира ***D***. Затем канонически определяются световые конусы в касательных пространствах универсальной накрывающей ***D***˜. И, наконец, возникают множества будущего в ***D***˜. Их совокупность называется (глобальной) причинной структурой мира ***D***˜.

В ***M*** не было отличия между левыми и правыми сдвигами, имеющегося в ***D, D***˜. Оказывается, что в обоих последних пространствах системы множеств будущего инвариантны относительно и левых, и правых сдвигов (т.е., *биинвариантны*).

Через *G* обозначаем матричную группу *SU*(2,2), которую также называют *конформной* группой. Напомним о (*дробно-линейном*) *G*-действии на ***D***:

$$g(z) = (Az + B)(Cz + D)^{-1}. \qquad (1.1)$$

Здесь g (задаваемый 2 на 2 блоками *A*, *B*, *C*, *D*) является элементом группы *G*. Действие (1.1) канонически поднимается до *G*˜-действия на ***D***˜ (которое сохраняет причинную структуру). Доказательства всех упомянутых выше утверждений могут быть найдены в [Se-76, PaSe-82a].

Теорема 1 ([AD-76, Se-76]). *Если биекция f мира* ***D***˜ *сохраняет причинную структуру, то f определяется некоторым g из G*˜.

Известно ([PaSe-82a, PaSe-82b]), что ввиду т.н. “автоматической периодичности” *моделирование частиц* (в рамках *теории представлений* групп – см. также параграф 7 ниже) на ***D***˜ удобнее начать с (компактного) мира ***D***.

Универсальная накрывающая *P*˜ дважды накрывает (расширенную гомотетиями) группу Пуанкаре *P*. Действие группы *P*˜ на ***M*** приведено в параграфе 5.

Теорема 2 ([PaSe-82a]). *Стационарная подгруппа (события x из* ***D****) действия* (1.1) *изоморфна P*˜. *Действие P*˜ *на* ***D****, действие P*˜ *на* ***M*** *(если рассматривать* ***M*** *в эрмитовой форме) и отображение Кэли задают коммутативную диаграмму.*

Замечание. Для отображения Кэли в статье используется обозначение C_D (а не *c*, как во многих других текстах). Это объясняется введением ниже отображения C_F, играющего аналогичную роль в мире ***F***.

2 Алгебры Ли *d, f* и *l*

Билинейная форма в алгебре Ли ***n*** со скобкой [,], по отношению к которой все операторы ad_x кососимметричны, называется *инвариантной* (по определению, такой оператор переводит вектор y в $[x,y]$). Следующий результат хорошо известен [Mi-76]:

Теорема 3. *Метрика на группе Ли **N** биинвариантна тогда и только тогда, когда (соответствующая) форма в алгебре Ли **n** инвариантна.*

Замечание 1. Инвариантная невырожденная форма в простой алгебре Ли пропорциональна форме Киллинга.

Теорема 4 ([Le-85, GuLe-84]). *В размерности 4 существует ровно три некоммутативные алгебры Ли, допускающие невырожденную инвариантную форму лоренцевой сигнатуры: d = u(2), f = u(1,1), l = osc.*

Замечание 2. Первые два случая хорошо известны (не существует других некоммутативных четырехмерных редуктивных алгебр Ли). Несколько неожиданно было найти разрешимую алгебру в этом списке (известно, что форма Киллинга любой разрешимой алгебры Ли вырождена). Она называется *алгеброй осциллятора* и может быть формально определена следующими коммутационными соотношениями

$$[l_2, l_3] = l_1,\ [l_2, l_4] = l_3,\ [l_4, l_3] = l_2 \qquad (2.1)$$

Эти соотношения задают действие вектора l_4 на подалгебре Гейзенберга.

3 Конформно-ковариантные волновые операторы

В современной квантовой механике волновые функции являются сечениями (определенных) векторных расслоений над $\boldsymbol{D}^{\sim}$; “индуцированных расслоений”, так как они определяются представлениями группы $G^{\sim}$, индуцированными конечномерными представлениями подгруппы Пуанкаре. Если *спин* частицы равен нулю, то слой - одномерный комплексный (это т.н. *скалярное расслоение*). Для частиц спина 1/2, 1, ... размерность слоя выше.

В хронометрии Сигала список *элементарных частиц* получен математически, на основе теории представлений. Лишь одна из этих частиц, “эксон”, не была соотнесена Сигалом (вплоть до его ухода из жизни в 1998 году) с экспериментально наблюдаемыми частицами (см. [Se-91] или обзорные статьи [Le-93, Le-95]). В начале 2008 года автор данной статьи высказал гипотезу (и инициировал её обсуждение в научных кругах), что эксон – это хронометрическая модель протона. Детали соответствующей математической конструкции во многом схожи с тем, как Сигал хронометрически моделировал электрон.

“Архитектура” скалярного расслоения определяется некоторым конформно-ковариантным дифференциальным оператором второго порядка. Это так называемый “криво-волновой оператор” - по аналогии со стандартным “плоско-волновым оператором”, см. [PaSe-82a].

Скалярное расслоение (вместе с известными конечномерным представлениями группы $P^{\sim}$) определяет расслоения более высокого спина (см. [PaSeVo-87, Se-98, SeVoZh-98]).

Для явного описания соответствующих волновых операторов напомним другой известный результат.

Теорема 5 (см. [Ør-81]). *Пусть скалярная кривизна четырехмерного конформно-плоского псевдориманового многообразия равна S. Если T – оператор Лапласа-Бельтрами, то T+S/6 конформно-ковариантен.*

Чтобы представить три конформно-ковариантных волновых оператора в явной форме, используем базис $\{\mathbf{L}_{ij}\}$ (всегда $\mathbf{L}_{ij} = -\mathbf{L}_{ji}$) в $su(2,2)$ с коммутационными соотношениями:

$$[\mathbf{L}_{im}, \mathbf{L}_{mk}] = -e_m\mathbf{L}_{ik},$$

здесь набор (e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) равен (1, 1, -1, -1, -1, -1), см. [PaSe-82a].

Замечание. В нашей работе рассматриваются четырёхмерные группы N, соответствующие одной из вышеприведённых трёх алгебр Ли и абелевой (т.е., тривиальной алгебре Ли векторов плоского пространства-времени ***M***). На N выбирается левоинвариантный (или правоинвариантный) базис векторных полей. Кроме того, на N задана биинвариантная метрика лоренцевой сигнатуры. В терминах такого базиса, выражение для вышеупомянутого оператора Лапласа-Бельтрами формально совпадает с квадратичным оператором Казимира. Эти выражения приведены в параграфах 3.1 – 3.3.

3.1 Мир *D*

Воспроизведем еще несколько хронометрических конструкций. *G*-действие приводит к векторным полям L_{ij} (обычный шрифт) на ***D***. Их коммутаторы противоположны только что приведенным правым частям коммутационных соотношений между (абстрактными) генераторами $\mathbf{L}_{ij}$.

Векторные поля

$$X_0 = L_{-10},\ X_1 = L_{14} - L_{23},\ \ X_2 = L_{24} - L_{31},\ \ X_3 = L_{34} - L_{12} \qquad (3.1)$$

составляют левоинвариантный ортонормированный репер на ***D*** = *U*(2). Эти же обозначения оставляем для соответствующих векторных полей на $\boldsymbol{D}^{\sim}$. В космологической модели, основанной на $\boldsymbol{D}^{\sim}$, имеется конформный инвариант R, интерпретируемый как радиус (сферического) трёхмерного пространства. И. Сигал отмечает его роль как (искомой ещё Дираком) третьей фундаментальной постоянной (первые две – это скорость света и постоянная Планка). Если (для математического удобства) взять этот радиус за единицу, то скалярная кривизна равна 6. Отметим, что вычислить кривизну сравнительно нетрудно, так как метрика биинвариантна (см. [Mi-76] и параграф 8).

Конформно-ковариантный волновой оператор, соответствующий миру ***D***, равен

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + 1,$$

как показано в [PaSe-82a].

Глобально, мир $\boldsymbol{D}^{\sim}$ есть $R^1 \times S^3$, где S^3 представлена группой *SU*(2).

Замечание 1. В общей теории относительности (ОТО), $\boldsymbol{D}^{\sim}$ известен как *статическая вселенная Эйнштейна* (см., например, [Kr-80, p.122]). Такое решение (уравнений Эйнштейна ОТО) интерпретируется как *идеальная жидкость.* Если не полагать вышеуказанный параметр R равным единице, то скалярная кривизна равна $6/(\mathrm{R}^2)$. *Плотность энергии* равна $1/(\mathrm{R}^2)$. Выполняются *энергетические условия*. Необходимые определения и доказательства приведены в параграфах 7, 8.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что формулы (3.1) задают следующую подгруппу *N* в (введённой в параграфе 1) группе *SU(2,2)*:

$$N = \{n = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} : a^2 det\ w = 1\},$$

где два на два матрицы *w* берутся из *U(2).* Ядро дробно-линейного действия этой подгруппы совпадает с (четырёхэлементным) центром всей группы *SU(2,2)*. Отображение $n \rightarrow w$ задаёт двулистное накрытие группы *U(2).*

3.2 Мир *F*

Мир ***F*** есть универсальная накрывающая группы $U(1,1)$, топологически это R^4. Его относительно компактная форма, четырехмерная орбита в $U(2)$, определяется ортонормированным репером H_0, H_1, H_2, H_3 на $U(2)$. Здесь

$$H_0 = L_{-10} - L_{12},\ H_1 = - L_{-12} - L_{01},\ H_2 = L_{02} - L_{-11},\ H_3 = L_{34} \qquad (3.2)$$

Нетрудно проверить, что эти четыре векторных поля задают $u(1,1)$-подалгебру в $su(2,2)$. Скалярная кривизна теперь равна –6, следовательно

$$(H_0)^2 - (H_1)^2 - (H_2)^2 - (H_3)^2 - 1$$

является еще одним конформно-ковариантным волновым оператором.

Замечание 1. В параграфах 5, 6 (см. ниже) обсуждается взаимосвясь ***F*** с ***M***, аналогичная таковой ***D*** с ***M***.

Замечание 2. Данное решение уравнений Эйнштейна интерпретируется как *тахионная жидкость,* [Kr-80, p.57]. Соответствующая биинвариантная метрика допускает параметр a, связанный с выбором инвариантной формы на простой подалгебре Ли $su(1,1)$ в $u(1,1)$. Если не полагать a равным единице, то скалярная кривизна равна $-6/a^2$. *Плотность энергии* этого пространства-времени равна: $-1/(a^2)$.

Доказательства этих утверждений и необходимые определения приведены в параграфах 7, 8. Отрицательная плотность энергии (и, как следствие, *нарушение энергетических условий*) говорит об особой роли этого мира (в рамках ***DLF***–подхода). Отметим, что вычисление кривизны мира ***F***, приведенное в [Le-86a], содержит неточности. Правильные вычисления приводятся в параграфе 7. Кроме того, в данном 3.2 исправлена опечатка в выражении для H_1 из [Le-03a].

Замечание 3. Нетрудно проверить, что формулы (3.2) задают следующую подгруппу N в (вводимой в параграфе 6) группе *DG,* изоморфной *SU(2,2)*:

$$N = \{n = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} : a^2 det\ w = 1\},$$

где два на два матрицы w берутся из $U(1,1)$. Ядро дробно-линейного действия этой подгруппы совпадает с (четырёхэлементным) центром всей группы $SU(2,2)$. Отображение $n \rightarrow w$ задаёт двулистное накрытие группы $U(1,1)$.

3.3 Мир *L*

Третий мир, ***L***, топологически совпадает с R^4. Так же, как в предыдущем случае, его относительно компактная форма, четырехмерная орбита в $U(2)$, определяется четырьмя векторными полями l_1, l_2, l_3, l_4, где (3.3):

$$l_1 = -(L_{-10} + L_{04} + L_{-11} + L_{14}),$$

$$l_2 = (1/2)(L_{-12} + L_{24} + 2L_{03} + 2L_{31}),$$

$$l_3 = (1/2)(L_{-13} + L_{34} + 2L_{02} + 2L_{12}),$$

$$l_4 = (1/8)(-5L_{-10} - 3L_{-11} + 3L_{04} + 5L_{14} + 4L_{23}).$$

Можно проверить, что получающиеся коммутационные соотношения задают осцилляторную алгебру Ли. Выражение для инвариантной метрики восстанавливается по виду (приводимого ниже) волнового оператора.

В данном случае скалярная кривизна равна нулю (как показано в [Le-86b], где этот мир изучался отдельно; все три мира вместе обсуждались в [Le-86a]).

Соответствующий конформно-ковариантный волновой оператор равен

$$2l_1l_4 – (l_2)^2 - (l_3)^2.$$

Замечание 1. С точки зрения общей теории относительности это решение уравнений Эйнштейна соответствует *изотропному электромагнитному полю с ковариантно постоянным световым вектором* (см. [Le-86b, с.123]). В нем выполняются энергетические условия. Доказательство выполнения энергетических условий (и предъявление такого светового векторного поля) и необходимые определения приведены в параграфах 7, 8.

Замечание 2. В [NaWi-93] была рассмотрена модель конформной теории поля, основанная на $\boldsymbol{L}$. В [CaJa-92], [CaJa-93] осцилляторная алгебра l явилась основной составляющей «линейной гравитации как калибровочной теории». Отметим, что эти две публикации содержат ошибку. Именно, в левом верхнем углу матрицы **h** (см. формулу (36) в [CaJa-92] и формулу (3.41) в [CaJa-93]) должна стоять единичная матрица, а не диагональная матрица с элементами 1, -1 по главной диагонали. Неудивительно, что авторы не могут поверить одному из ими же полученных выводов (см. их с. 249 в [CaJa-93]). В [NaWi-93] инвариантная форма введена правильно: выражение (6) на с.3751.

Замечание 3. Под *группой осциллятора* в статье понимается (любая) группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна (2.1). Чаще всего, она имеет топологию произведения S^1 и R^3. Одна из реализаций совпадает (“геометрически” и топологически) с “$U(2)$ с вырезанной окружностью” – см. параграф 9.

4 Три мира

Каждый из трех миров является симметрическим пространством (в смысле равенства нулю ковариантной производной тензора кривизны). Это следует из биинвариантности метрики (см., например, [Gr-71, с.121]).

Формулы 3.1, 3.2, 3.3 задают реализацию трёх рассматриваемых алгебр Ли как подалгебр в матричной алгебре Ли $su(2,2)$. При всякой такой реализации однозначно определяется подгруппа, являющаяся, вообще говоря, лишь *виртуальной* (см., например, [OnVi-93, с. 38]) подгруппой Ли. Чисто теоретически, топология такой подгруппы может не совпадать с топологией, индуцируемой объемлющей группой Ли (простейший пример - плотная обёртка тора).

Так как рассматриваемые алгебры Ли состоят из матриц, а доказываемый ниже результат (Теорема 6) *локален*, то можно ограничиться рассмотрением некоторой открытой окрестности единичного элемента группы $SU(2,2)$ и достаточно малой окрестности S нуля алгебры $su(2,2)$. Нулевая четыре на четыре матрица является также нулём всех трёх вложенных подалгебр Ли. Сужение обычного (матричного) экспоненциального отображения алгебры *su(2,2)* на окрестность *S* (и на соответствующую вложенную подалгебру) задаёт три локальные подгруппы Ли, фигурирующие в Теореме 6.

В [Sv-95] осцилляторная алгебра Ли была реализована как определенная подалгебра в *su(2,2)*. Этот выбор, однако, не удовлетворял условию *согласованности*: для возникающей в результате такого выбора (локальной) группы осциллятора *L* с биинвариантной метрикой, получающееся поле световых конусов должно совпадать с уже имеющейся "*D*-системой" конусов (в некоторой окрестности *V* единицы группы *U(2)*, на которой все три подгруппы действуют локально просто транзитивно).

Как показывает следующая теорема, сейчас условие согласованности выполняется как для *L*-, так и для *F*-системы. Для краткости формулировки этой теоремы, мирами ***F, L*** называются (в данном контексте) соответствующие четырёхмерные (локальные) орбиты единичной матрицы в ***D***.

Теорема 6. Три мира имеют общее поле световых конусов над некоторой открытой областью в *U*(2).

Доказательство. В нейтральном элементе *U*(2) (который соответствует началу координат мира Минковского при вложении последнего в *U*(2) посредством отображения Кэли) векторные поля H_0, H_1, H_2, H_3 (см. формулы 3.2) совпадают со стандартным базисом векторов e_0, e_1, e_2, e_3 мира Минковского. Таким же свойством обладают и векторные поля X_0, X_1, X_2, X_3 (см. формулы 3.1). Из формул 3.3 следует, что векторные поля l_1, l_2, l_3, l_4 имеют значения $-2(e_0 + e_1)$, e_2, e_3, $(1/4)(e_1 – e_0)$ соответственно. Тем самым, в этом ("опорном") событии световой конус является общим для всех четырех миров. Эти утверждения следуют из таблицы I в [SeJa-81]. Этим также установлено, что выбранные четвёрки векторных полей порождают орбиты размерности четыре (а не меньшей размерности). Действие каждой из трёх локальных подгрупп Ли индуцировано дробно-линейным действием группы *SU(2,2)* на *U(2)* (ведь генераторы каждой из трёх подгрупп являются линейными комбинациями L_{ij} с *постоянными коэффициентами*). Понятно, что эти (локально просто транзитивные) действия подгрупп ***F, L*** задают локальные вложения групп *U(1,1), Osc* в группу *U(2)*. Именно, образом элемента *g* (близкого к единице в *U(1,1)* или в *Osc*, когда они рассматриваются в качестве локальных подгрупп в *SU(2,2)*) является тот элемент группы *U(2)*, который является результатом действия *g* (как элемента в *SU(2,2)*) на единицу группы *U(2)*. Из вышеизложенного следует, что поле конусов над некоторой открытой областью в *U(2)* одно и то же. Теорема 6 доказана.

Замечание 1. Как видно из доказательства, вместо трех миров можно было рассматривать и четыре, добавив векторную группу ***M*** пространства-времени Минковского (реализация ***M*** как глобальной подгруппы Ли в *SU(2,2)* приведена в [PaSe-82a] на с.112). Представляется в связи с этим, что Теорема 6 может иметь важное значение с точки зрения физики. Ведь система световых конусов задаёт причинную структуру рассматриваемого мира событий. Спрашивается: как ещё (кроме ***M***) могут «наблюдатели, живущие в данном мире», моделировать соответствующую совокупность событий (с возможностью обмена световыми сигналами между наблюдателями) ? Стандартной в современной физике является модель ***M***, но с тем, что группа движений (изометрий) мира ***M*** слишком велика (десятимерна), а сам он некомпактен, связаны и значительные теоретические трудности (отсутствие инвариантного вакуума, инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости и др.). Хронометрическая теория Сигала исходит из мира ***D***. В рамках предлагаемой автором *DLF-теории* миры ***D, L, F*** «сосуществуют» как нечто единое. Математика такого сосуществования основана на механизме параллелизации (векторных) расслоений, используемом в современной квантовой механике. Группы изометрий этих миров семимерны, а миру ***M*** отводится, в общем-то, лишь вспомогательная роль – касательного пространства в точке (любого из трёх миров).

Замечание 2. В первых двух случаях, рассматриваемых в данной статье (см. замечания в 3.1, 3.2), порождаемые подгруппы являются замкнутыми подмногообразиями в *SU(2,2)*, поэтому (согласно теореме Картана – см., например, [OnVi-93, с. 47]) они являются "настоящими" подгруппами Ли в *SU(2,2)*, а не просто виртуальными. Осцилляторная группа *Osc* допускает реализацию вещественными матрицами 4 на 4 (см., например, [St-67]). Соответствующая подгруппа в *SU(2,2)* задаётся формулами (3.3). В данном параграфе она рассматривается лишь как локальная подгруппа Ли. Понятно, что наличие автоморфизмов обеспечивает существование как других соответствий между мирами ***D***, ***L***, ***F***, так и других *D*-, *L*-, *F*-вложений в *SU(2,2)* (со столь же "хорошими" свойствами). Важной задачей представляется детальное изучение таких преобразований и выбор их "канонических представителей" (в то время как определённые наработки по упомянутым вложениям имеются в литературе). Несколько шагов в этом направлении предприняты автором при доработке первоначального варианта статьи – см. параграф 9, где, в частности, приводится глобальная реализация группы осциллятора как *SU(2,2)*-подгруппы, а задаваемые теоремой 6 *U(2)*-*U(1,1)* и *U(2)*-*Osc* соответствия рассматриваются более детально. Можно сказать, что эти (конформные) соответствия между (конформно плоскими) ***D***, ***L***, ***F*** являются наиболее согласованными с точки зрения Ли-группового устройства этих миров.

5 Псевдоэрмитова модель мира Минковского

Напомним сначала про известную эрмитову модель мира Минковского ***M*** (см. [PaSe–82a, с.81] или [Le-95]). Элементы ***M*** - это теперь эрмитовы два на два матрицы. Алгебра Ли *u(2)* состоит из всех косоэрмитовых матриц, т.е. из матриц *h*, удовлетворяющих условию

$$h^* + h = 0, \qquad \text{(SH)}$$

где h^* получена из *h* комплексным сопряжением и транспонированием.

Общий элемент *(t,L,j)* односвязной масштабно-расширенной (одиннадцатимерной) группы Пуанкаре $P^{\sim}$ переводит *h* в $e^t LhL^* + j$:

$$h \rightarrow e^t LhL^* + j. \qquad (5.1)$$

Здесь *t* – вещественное число, *L* – матрица из *SL(2,C)*, *j* – косоэрмитова матрица. Это действие группы $P^{\sim}$ на *u(2)* хорошо известно. Отображение Кэли C_D (оно фигурировало уже в параграфе 1) задаётся следующей формулой:

$$h \rightarrow (1 + h/2)(1 - h/2)^{-1}. \qquad (5.2)$$

Известно, что оно определено на всей *u(2)*, т.е. определитель матрицы $1 - h/2$ в (5.2) не равен нулю при всех *h* из *u(2)* - см., например, [Da-05a, с.19]. Отметим также

Утверждение 1 [Da-05a, сс.21, 22]. Матрица *z* из *U(2)* не содержится в образе отображения Кэли тогда и только тогда, когда $det\,(z + 1) = 0$, т.е.

$$det\, z + tr\, z + 1 = 0; \qquad (5.2a)$$

обратное отображение задаётся формулой

$$h = 2(z-1)(z+1)^{-1}. \qquad (5.2b)$$

Из уравнения (5.2a) следует, что образ отображения Кэли открыт и плотен в *U(2).*

В связи с формулами (5.1), (5.2) напомним, что группа $P^{\sim}$ действует и в ***D***=*U(2),* соответствующая диаграмма коммутативна (см. выше Теорему 2).

Оказывается, что построения, аналогичные вышеизложенным, можно осуществить и на основе алгебры Ли *u(1,1).* Приведём (в данном и следующем параграфах) некоторые элементы этой (по-видимому, новой) конструкции.

Зафиксируем следующую реализацию: принадлежность два на два матрицы *f* алгебре *u(1,1)* означает выполнение равенства

$$f^*s + sf = 0, \qquad (PSH)$$

здесь *s* – это матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Такие матрицы *f* называются псевдоэрмитовыми.

Теорема 7. Пусть выбрано действие (5.1) группы $P^{\sim}$ в *u(2).* Существует такая линейная биекция *q* алгебры *u(2)* на *u(1,1)* и такое действие группы Пуанкаре $P^{\sim}$ в *u(1,1)*, что соответствующая диаграмма коммутативна.

Доказательство. В качестве *q* выберем такую биекцию, которая переводит косоэрмитову матрицу $h = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ в псевдоэрмитову матрицу $f = \begin{bmatrix} a & -ic \\ -ib & -d \end{bmatrix}$. Нетрудно проверить, что условие (SH) для первой из этих матриц выполняется тогда и только тогда, когда условие (PSH) выполнено для второй матрицы. Очевидно также, что *q* является линейной биекцией одного вещественного четырехмерного подпространства в $\mathbf{C}^4$ на другое такое подпространство. Если матрица *L* принадлежит *SL(2,C),* то (по определению вводимого действия) она переводит псевдоэрмитову матрицу *f* в $A^*\overline{L}B^*fAL^TB$:

$$f \to A^*\overline{L}B^*fAL^TB, \qquad (5.3)$$

здесь $\overline{L}$ комплексно сопряжена *L* (без транспонирования), $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Действия гомотетии и переносов остаются формально теми же, что в предыдущем случае, см. (5.1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что получаются псевдоэрмитовы матрицы и выполняется закон (левого) действия. Рассмотренные преобразования порождают группу Пуанкаре $P^{\sim}$. Коммутативность диаграммы проверяется непосредственным подсчетом. Теорема 7 доказана.

Замечание 1. Такое действие группы Пуанкаре $P^{\sim}$ в *u(1,1)* однозначно определяется действием (5.1), отображением *q* и условием коммутативности соответствующей диаграммы.

Замечание 2. Обе рассматриваемые алгебры Ли редуктивны: *u(2)* является прямой суммой одномерного центра и простой алгебры Ли *su(2), u(1,1)* - это прямая сумма одномерного центра и простой алгебры Ли *su(1,1).* Обе алгебры Ли допускают инвариантную форму лоренцевой сигнатуры. Световые конусы этих форм задаются (в рамках выбранных моделей) уравнениями $det\ h = 0$, $det\ f = 0$. Введённая биекция q является изометрией соответствующих псевдоевклидовых пространств.

Замечание 3. Автор признателен Рецензенту, отметившему, что это отображение q является композицией внутреннего автоморфизма алгебры $u(2)$, транспонирования, и хорошо известного (см. [DNF, с.203]) умножения на введенную выше матрицу s. Такое умножение рассматривается в качестве основного соответствия между $u(2)$ и $u(1,1)$ в другой (подготовленной к печати) статье (её краткое содержание приведено в [LeSv-09]) и в параграфе 9, добавленном при доработке данной статьи. Заметим, однако, что в [DNF] ничего не говорится ни об их соответствии как псевдоевклидовых пространств, ни о каких-либо соответствиях между группами Ли.

Вводим аналог отображения Кэли, C_F, из $u(1,1)$ в $U(1,1)$:

$$C_F\,(f) = [1 - (sfs)/2][1 + (sfs)/2]^{-1}. \quad (5.4)$$

Как и стандартное отображение Кэли C_D, его аналог C_F определен *на всей* исходной алгебре Ли.

Утверждение 2. Определитель матрицы $[1 + (sfs)/2]$ не принимает нулевого значения на $u(1,1)$.

Доказательство. Для элементов косоэрмитовой матрицы h (см. доказательство теоремы 7) выполняются соотношения $a = ip$, $d = ir$, $c = -\bar{b}$, где на вещественные числа p, r и на комплексное число b нет дополнительных ограничений. Применяя формулы введённого выше отображения q, получаем

$$\det [1 + (sfs)/2] = 1 + i(p + r) + b\bar{b} - pr.$$

Мнимая часть этого числа равна нулю тогда и только тогда, когда $p + r = 0$. В таком случае вещественная часть равна $1 + b\bar{b} + r^2$, строго положительна. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Матрица z из $U(1,1)$ не содержится в образе отображения Кэли тогда и только тогда, когда $det\ (z + 1) = 0$, т.е.

$$det\ z + tr\ z + 1 = 0; \qquad (5.4a)$$

обратное отображение задаётся формулой

$$f = 2s(z + 1)^{-1}(1 - z)s = 2s(1 - z)(z + 1)^{-1}s. \qquad (5.4b)$$

Доказательство: непосредственные вычисления, исходя из (5.4).

Из уравнения (5.4a) следует, что образ отображения Кэли C_F открыт и плотен в $U(1,1)$.

В следующем параграфе устанавливаются дальнейшие свойства введённых моделей - псевдоэрмитовой и псевдоунитарной.

6 F–представленная SU(2,2)

В рамках *DLF*-подхода рассмотрим следующее матричное представление группы $G = SU(2,2)$. Оно сопряжено *D*–представлению этой группы (тому, которое было исходно введено в хронометрии; см. [PaSe-82a, с.82] или обзор [Le-95]). Осуществляющая сопряжение матрица W является прямой суммой минус единицы и три на три матрицы с единицами на побочной диагонали (остальные элементы – нули). Ясно, что W^2 равна единице.

D–представленная группа *G* (короче, *DG*) состояла из псевдоунитарных матриц, определяемых (фиксированной) матрицей $diag\{1,1,-1,-1\}$. Под действием сопряжения получается матрица $S=diag\{1,-1,-1,1\}$, задающая новую группу (обозначаемую *FG*) соответствующих ей псевдоунитарнных матриц. Понятно, что *DG* и *FG* изоморфны, этот изоморфизм осуществляет (сопряжением в группе $SL(4,C)$) матрица W.

Группа *FG* состоит из тех матриц g (с определителем единица), которые удовлетворяют соотношению

$$g^*Sg=S. \quad (6.1)$$

Как и в *D*–представлении, удобно считать g состоящей из четырех два на два блоков *A, B, C, D.* В Лемме 2.1.4 работы [PaSe-82a] установлено, что принадлежность такой матрицы группе *DG* эквивалентна выполнению условий

$$A^*A - C^*C = I, D^*D - B^*B = I, D^*C - B^*A = 0. \qquad (DG)$$

Максимальная компактная подгруппа K в *D*–представлении состояла из блочно-диагональных матриц, т.е. тех *g,* для которых $B=C=0$. Аналогом K в *F*-представлении является подгруппа H, формально задаваемая *тем же самым* условием блочной диагональности. Нетрудно убедиться, что H состоит из изометрий мира ***F*** (в данном параграфе под ***F*** понимается вводимая ниже группа $U(1,1)$ с заданной на ней метрикой лоренцевой сигнатуры; см. параграф 3.2, где эта метрика была введена). Именно, H состоит из правых и левых сдвигов группы $U(1,1)$ при её действии на себе самой. Так как метрика двусторонне инвариантна, то эти сдвиги являются изометриями.

Представим матрицу *S* как прямую сумму два на два матриц,

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix},$$

где $s = diag\{1,-1\}$. Введем группу $U(1,1)$ как совокупность всех два на два матриц z, удовлетворяющих условию

$$z^*sz=s. \quad (6.2)$$

Лемма (это аналог вышеупомянутой Леммы 2.1.4 работы [PaSe-82a]). Матрица *g* из $SL(4,C)$ принадлежит группе *FG* тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$A^*sA - C^*sC = s, D^*sD - B^*sB = s, D^*sC - B^*sA = 0. \qquad (6.3)$$

Доказательство (непосредственная проверка с учетом (6.1)) опускается.

Теперь вводим следующее действие группы *FG* на ***F***: матрица *z* под действием элемента *g* переходит в

$$gz = (Az + B)(Cz + D)^{-1}. \qquad (6.4)$$

Теорема 8. Формула (6.4) задает (формальное) левое действие группы *FG,* т.е. выполняется (формально) условие $(g'g)z = g'(gz)$. Если определитель матрицы Cz+D не равен нулю, то *gz* принадлежит ***F***.

Доказательство. Закон левого действия нетрудно проверить непосредственным подсчетом. Или можно воспользоваться тем (известным) фактом, что правило (6.4) задает (глобально определенное) левое действие группы *DG* на *U(2)*.

В предположении, что *gz* существует, докажем, что для $w = gz$ выполнено условие (6.2). Исходя из $w^*sw = s$, приведем это (предполагаемое) равенство к тождеству. Возможная цепочка переходов такова:

$$(z^*C^* + D^*)^{-1}(z^*A^* + B^*)s(Az + B) = s(Cz + D),$$

$$(z^*A^*s + B^*s)(Az + B) = (z^*C^* + D^*)(sCz + sD),$$

$$z^*A^*sAz + z^*A^*sB + B^*sAz + B^*sB = z^*C^*sCz + z^*C^*sD + D^*sCz + D^*sD.$$

Применяя соотношения (6.2) и (6.3), убеждаемся в том, что последнее равенство является тождеством. Теорема 8 доказана.

Замечание 1. Ниже будет показано, что для произвольно выбранного *z* из *U(1,1)* формула (6.4) определена по крайней мере в некоторой окрестности этого *z*, но, вообще говоря, лишь для элементов из некоторой окрестности единицы группы *FG*. Такое действие называется *локальным*.

Вот пример, когда формула (6.4) не определена. Выберем
$z = \begin{bmatrix} r & b \\ \bar{b} & r \end{bmatrix}$; *g*, задаваемый блоками $A = D = \begin{bmatrix} ch & 0 \\ 0 & ch \end{bmatrix}$, $B = C = \begin{bmatrix} -sh & 0 \\ 0 & -sh \end{bmatrix}$;
здесь $ch = ch\,(t/2)$, $sh = sh\,(t/2)$ – гиперболические косинус и синус вещественного аргумента, число *r* вещественно. Вырожденность матрицы $Cz + D$ эквивалентна равенству $e^{2t}(r - 1) = r + 1$. Если $t \neq 0$, то *r* однозначно определяется. Значение *b* подбирается условием (6.2) принадлежности такого элемента *z* группе *U(1,1)*. Именно, $r^2 = 1 + b\bar{b}$, т.е. такой выбор осуществим. В связи с этим примером, см. ниже Замечания 2, 3.

Теорема 9. Формула (6.4) задает локальное действие группы *FG* на $\boldsymbol{F} = U(1,1)$. Действие подгруппы H глобально. Орбита единицы (и любой другой точки из $\boldsymbol{F}$) есть вся *U(1,1)*.

Доказательство. Ясно, что когда *g* есть единица группы *FG*, то $Cz + D$ есть единичная матрица. Поэтому найдется такая окрестность V точки z и такая окрестность U единицы в *FG*, что матрица $Cv + D$ невырожденна при всех v из V и при всех g из U.

Для *g* из H выполнено $B = C = 0$, поэтому

$$gz = AzD^{-1} \qquad (6.5)$$

Так как $\det g = (\det A) \det D = 1$, то (6.5) всегда определено.

Применение формулы (6.4) к матрицам $g = p\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ с условиями $p^4 = (\det A)^{-1}$, *A* из *U(1,1)*, сводит (6.4) к (глобальному) действию, которое конечнолистно накрывает действие *U(1,1)* на себе левыми сдвигами (см. Замечания 2 в параграфах 3 и 4). Отсюда следует, что орбита любой точки есть вся *U(1,1)*. Теорема доказана.

Замечание 2. Совокупность N всех *g(t)* из вышеприведённого примера является однопараметрической подгруппой (как в *DG*, так и в *FG*), соответствующей гомотетиям в мире Минковского (элементу *g(t)* соответствует гомотетия с коэффициентом e^t). Важным обстоятельством в хронометрии Сигала является то, что N и подгруппа K всех блочно-диагональных матриц в *DG* порождают *DG*. В отдельной статье планируется дальнейшее рассмотрение псевдоунитарного моделирования, аналогичного хронометрическому моделированию мира событий. Необходимо, в частности, установить аналог теоремы 2 параграфа 1. Сейчас же лишь отметим, что N и подгруппа H всех блочно-диагональных матриц в *FG* порождают *FG*.

Замечание 3. Известно, что дробно-линейное действие (1.1) группы *DG* на *U(2)* всюду определено. Псевдоунитарная ситуация (как это нередко бывает при переходе от компактного случая к некомпактному) существенно сложнее. В [Le-08] установлено, что равенство нулю определителя матрицы $Cz + D$ возможно лишь если определитель матрицы z равен единице или минус единице и приводится конкретный пример. Наличие таких сингулярностей представляет определенный интерес (в том числе и при исследовании общего случая групп *U(p,q)*, см. [LeSv-09]). С математической точки зрения интересно, например, отыскать максимальную подгруппу, действующую без сингулярностей. Или исследовать пределы в *U(1,1)* в терминах её вложения в *U(2)*. С точки зрения физики, такое рассмотрение может оказаться интересным методом моделирования «рождения частиц из вакуума» (здесь автор использует стандартный термин теоретической физики).

7 D-, L-, F-интерпретации единого мира событий

Понятие *параллелизации* (расслоения над пространством-временем – см. [PaSe-82a] или обзор [Le-95]) является важной частью хронометрического подхода. В *DLF*-теории значение параллелизации еще более возрастает. Напомним в связи с этим несколько положений квантовой механики (в ее современном изложении).

Каждому “объекту” сопоставляется его *состояние* (часто называемое *волновой функцией,* но этот последний термин целесообразнее употреблять в более специализированной ситуации, а именно – ПОСЛЕ параллелизации). Если в качестве объекта рассматривается *элементарная частица* (“живущая” в некотором мире событий **W**), то совокупность ее возможных состояний является вполне определенным подпространством множества сечений (бесконечно дифференцирумых, суммируемых с квадратом и т.д. – в данном случае нет необходимости уточнять эти детали) некоторого векторного расслоения с базой **W**. На этой стадии состояния еще не принимают числовых (для *скалярной* частицы) или векторных (для частиц ненулевого *спина*) значений. Необходим переход от (абстрактных) сечений к параллелизованным сечениям (т.е., к волновым функциям). Затем вводится структура гильбертова пространства и т.д. (нет необходимости детализировать эти этапы в данной работе). Процедура параллелизации (см. [Le-01, Le-03b, Le-06], где уточняются некоторые математические детали хронометрических параллелизаций, введенных в [PaSe-82a]) во многом определяется выбором параллелизующей (четырехмерной) подгруппы N в группе G. Начиная с этого этапа, N как бы заменяет исходный мир событий **W** (типичная ситуация состоит в том, что группа N является конечнолистным накрытием мира **W**).

В рамках стандартной теоретической физики, G - это десятимерная группа Пуанкаре, а в качестве параллелизующей подгруппы практически всегда (зачастую – “по умолчанию”) выбиралась векторная группа мира Минковского ***M***. Проблемы выбора параллелизации не возникало еще и потому, что, фактически, рассмотрение начиналось с параллелизованных сечений (т.е., с волновых функций). Индуцирование проводилось по подгруппе Лоренца (такой подход был заявлен знаменитой статьей Ю.Вигнера [Wi-39]).

Важность параллелизации отмечается, например, в [PaSe-82a]. Именно, на сс. 98-116 этой статьи сформулирован и доказан ряд как общих, так и “хронометрических” теорем. В дальнейших работах группы Сигала использовалась лишь одна из параллелизаций, основанных на мире ***D*** (“left curved parallelization”). Иногда она сравнивалась с плоской параллелизацией (определяемой векторной группой мира ***M***). На с. 170 известной монографии [BaSeZh-92] роль выбора параллелизации обсуждается с точки зрения вопросов, возникающих в квантовой теории поля.

Понятно, что результаты нашей работы приводят к выводу о необходимости рассмотрения ещё двух классов параллелизаций: тех, которые определяются группами L и F. Отсюда и термин *LF-развитие хронометрии Сигала*, и название параграфа: *D-, L-, F-интерпретации (единого) мира событий*. На таком языке, *M-интерпретация* – это специальная теория относительности.

В целом, для миров $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{F}$ необходимо сформулировать и доказать аналоги утверждений, имеющихся для случая $\boldsymbol{D}$.

Наличие у мира событий всех трех типов свойств (D-, L- и F-) представляет интересную перспективу видоизменения *хронометрической космологии* (см. обзор [DS–01]). Даже в нашей простейшей модели удается объединить не только D-свойства, характерные для статической вселенной Эйнштейна, но таковые *плазменной вселенной* (L-свойства) и вселенной с постоянным "рождением" нового вещества (F-свойства). Эти три типа свойств признаются (разными специалистами и с разной степенью достоверности) наличествующими в наблюдаемой вселенной (см. обзор [Da-05]). Объединение их в одной модели помогло бы научному сообществу излечиться от "иррациональной веры в теорию Большого Взрыва" (выражение из [Da-05]).

Приведем теперь доказательства тех свойств пространств $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{F}$, которые были упомянуты в примечаниях параграфа 3. Напомним (см. [Kr-80, p.71]), что *доминантные энергетические условия* означают неположительность тензора Эйнштейна T (см. ниже параграф 8) на всех времениподобных векторах v (число $-T(v,v)$ называется *плотностью энергии*) и непространственноподобность вектора q, называемого *вектором потока энергии*. Здесь q получается из v под действием *оператора* $\boldsymbol{T}$, соответствующего тензору Эйнштейна. Так как другие условия в нашей работе не обсуждаются, то используем упрощенное название: *энергетические условия*. В рамках приводимого ниже доказательства, под g понимается метрический тензор соответствующего пространства-времени. В контексте данной (математической) статьи термины *идеальная жидкость, тахионная жидкость, изотропное электромагнитное поле* рекомендуется воспринимать как *названия* соответствующих математических объектов.

Замечание. В данной статье сигнатура метрики такова: +,–,–,–. Если используется противоположная сигнатура, то $T(v,v)$ является плотностью энергии (и должно быть неотрицательным).

Напомним, что параметры R, a, введены в параграфах 3.1, 3.2.

Теорема 10. 1) Мир $\boldsymbol{D}^{\sim}$ является *идеальной жидкостью*, определяемой векторным полем X_0. Скалярная кривизна равна $6/\mathrm{R}^2$. Плотность энергии равна $1/(\mathrm{R}^2)$. Вектор q потока энергии времениподобен. Выполняются энергетические условия.

2) $\boldsymbol{F}$ является *тахионной жидкостью*, определяемой векторным полем H_3. Скалярная кривизна равна $-6/a^2$. Плотность энергии равна $-1/a^2$. Вектор потока энергии не всегда времениподобен. Энергетические условия нарушаются.

3) В терминах общей теории относительности, мир $\boldsymbol{L}$ является *изотропным электромагнитным полем с ковариантно постоянным световым вектором* l_1 (см. [Le-86b, c.123]). Вектор потока энергии светоподобен. В $\boldsymbol{L}$ выполняются энергетические условия. Скалярная кривизна равна нулю.

Доказательство. Соответствие трёх рассматриваемых миров именно этим решениям уравнений Эйнштейна было установлено (по их метрике и свойствам кривизны) на основании [Kr-80] (таблица на с. 57). Для всех трёх случаев будем использовать результаты вычислений кривизны, приведенные в нашем параграфе 8. Все используемые термины общей теории относительности имеются, например, в [Kr-80]. Векторные поля, задающие идеальную (соответственно, тахионную) жидкость и светоподобное ковариантно-постоянное векторное поле (в случае $\boldsymbol{L}$) уже предъявлены в формулировке теоремы. Все три векторных поля порождены *центральным элементом* соответствующей алгебры Ли.

1) В случае $\boldsymbol{D}^{\sim}$, плотность энергии равна $g(v,v) + 2(v_0)^2$, откуда следует её положительность для времениподобных векторов v. Вектор потока энергии $q = -v-2\, v_0X_0$ времениподобен.

2) Для $\boldsymbol{F}$, плотность энергии равна $2(v_3)^2 - g(v,v)$, откуда следует возможность её отрицательности для времениподобных векторов v (если компонента v_3 не слишком велика). Если эта компонента достаточно велика, то вектор потока $q = v+2v_3\, X_3$ пространственноподобен.

3) В случае $\boldsymbol{L}$, вектор потока энергии $q = (-1/2)v_4\, l_1$ светоподобен. Плотность энергии - $T(v,v)$ равна $(1/2)(v_4)^2$. Напомним, что в случае $\boldsymbol{L}$ для координат используется индексация не от 0 до 3, а от 1 до 4.

8 Вычисления кривизны

В литературе по-разному выбираются сигнатура метрики и тензор кривизны псевдоримановых пространств. По кривизне будем использовать соглашения [Mi–76]. Сигнатуру метрики оставляем ту же, что в работах Сигала: +, –, –, –.

Для интересующего нас случая двусторонне-инвариантных метрик на группах Ли преобразование кривизны R_{xy} совпадает с $(1/4)\mathrm{ad}_{[x,y]}$, см. [Mi–76 с.105]; здесь x, y – элементы алебры Ли $\boldsymbol{n}$ (в зависимости от контекста под x, y могут также пониматься левоинвариантные векторные поля на соответствующей группе Ли). Пусть x_0, x_1, x_2, x_3 – ортонормированный базис в $\boldsymbol{n}$. Тогда компонента R^0_{kij} (тензора кривизны) равна $(1/4)([x_i,x_j],[x_0,x_k])$, здесь (. , .) – скалярное произведение. Если же отыскиваются компоненты тензора кривизны с верхними индексами 1, 2, 3, то добавляется знак минус. Напомним, что тензор Риччи является сверткой тензора кривизны по верхнему и второму нижнему индексам.

Эти формулы применим сначала к (хорошо изученному И. Сигалом) случаю алгебры Ли $u(2)$, см. параграф 3.1. При этом надо использовать следующую таблицу коммутационных соотношений: $[x_1,x_3] = 2x_2$, $[x_2,x_1] = 2x_3$, $[x_3,x_2] = 2x_1$. Получаем (дважды ковариантный) тензор Риччи:

$$Ric = diag\{0, -2, -2, -2\},$$

откуда следует значение $S = 6$ для скалярной кривизны. *Тензор Эйнштейна* T вводится как $Ric - Sg/2$, здесь g – метрический тензор. Ясно, что $T = diag\{-3,1,1,1\}$.

Мир $\boldsymbol{F}$ (см. параграф 3.2) соответствует следующей таблице коммутационных соотношений: $[H_0,H_1] = 2H_2$, $[H_2,H_1] = 2H_0$, $[H_2,H_0] = 2H_1$. Тензор Риччи равен $diag\{-2,2,2,0\}$, скалярная кривизна отрицательна: -6. Тензор $T = diag\{1,-1,-1,-3\}$.

Подсчет кривизны мира $\boldsymbol{L}$ приводит к следующим выводам (используется другая индексация, нежели в двух предыдущих случаях). В выбранном в параграфе 3.3 базисе левоинвариантных векторных полей тензор Риччи (и тензор Эйнштейна) равен $diag\{0,0,0,-1/2\}$, скалярная кривизна равна нулю.

Алгебраические значения величин, подсчитываемых без предположения R=1 (или a = 1), могут быть найдены или тем же методом, или учетом общих свойств преобразований масштаба ([Kr-80, p.55]). Эти значения уже были приведены (или были неявно использованы для подсчета других величин) в параграфах 3 и 7.

9 Дальнейшая Конкретика *D-F* и *D-L* соответствий

В данном параграфе исходным соответствием между алгебрами Ли d и f является известное (см. [DNF, с.203]) умножение (произвольного элемента первой алгебры Ли) на диагональную матрицу s с элементами 1, -1 (см. параграф 5). Метод, предложенный в [LeSv-09], приводит к следующему соответствию $\boldsymbol{h}$ между D и F (умножение на s является дифференциалом этого соответствия в единице группы D): образом матрицы $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}$

является матрица $\boldsymbol{u}$ с элементами

$$u_1 = d/z_4,\ u_2 = z_2/z_4,\ u_3 = -\,z_3/z_4,\ u_4 = 1/\,z_4;$$

здесь через d (модуль этого комплексного числа равен 1) обозначен определитель матрицы $\mathbf{z}$. Отметим, что определитель матрицы $\boldsymbol{u}$ равен z_1/z_4.

Теорема 11. (А) Отображение $\boldsymbol{h}$ определено на открытом (и плотном) в D множестве: из D “вырезан” тор J, задаваемый уравнением $z_4 = 0$; образом отображения $\boldsymbol{h}$ является вся группа $F = U(1,1)$.

(В) Вторая квадратичная форма подмногообразия J в $D = U(2)$ тождественно равна нулю (в частности, J является тривиальным примером минимальной поверхности в D).

Доказательство части **(А)** состоит в непосредственном применении формул (9.1) для проверки условий (приведённых в параграфе 5), задающих группы $D = U(2)$ и $F = U(1,1)$. Для лучшего геометрического понимания этих формул, уместно рассмотреть расслоения $D \rightarrow D/H$ и $F \rightarrow F/H$. Здесь H – это подгруппа (как в D, так и в F) всех диагональных матриц. Нетрудно проверить, что H является пересечением D и F. Она является картановской подгруппой как для D, так и для F. Объединение тора J и H является нормализатором H в D. Кроме того, J является H-орбитой матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, принадлежащей подгруппе $SU(2)$. Первое расслоение тесно связано с расслоением Хопфа $SU(2) \rightarrow S^2$. Именно, его слоем является тор, а базой - S^2. Отметим, в связи с этим, что (топологически) $D = U(2)$ есть произведение S^1 и S^3, где второй сомножитель представлен подгруппой $SU(2)$, а первый является подгруппой матриц вида $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Если d выбрать равным определителю матрицы $\mathbf{z}$ (см. выше), то получается представление группы $U(2)$ как (полупрямого) произведения этой (одномерной) подгруппы и $SU(2)$. Такое представление было введено в [Le-06]. Если же (согласно общепринятому подходу) выделять центральную подгруппу в $U(2)$, то её (прямое, групповое) произведение с $SU(2)$ необходимо факторизовать по Z_2, чтобы получить $U(2)$. Если из D вырезан тор J, то получается тривиализация (исходного) расслоения над двумерной сферой с выколотой точкой. Расслоение же $F \rightarrow F/H$ тривиально. Его базой является двумерная плоскость (что легко следует из разложения Ивасавы подгруппы $SU(1,1)$ в F). Нетрудно проверить, что отбражение $\boldsymbol{h}$ (между пространствами данных расслоений) действует послойно и (требованием коммутативности возникающей диаграммы) задаёт биекцию между базами. В рамках такого описания представляется интересным отыскать более явные формулы (чтобы, скажем, отображение между базами было бы стереографической проекцией), аналогичные таковым в случае расслоения Хопфа:

$$(a,b,c,d) \rightarrow (a^2+b^2-c^2-d^2, 2(ad+bc), 2(bd-ac)), \qquad (9.1)$$

где a,b,c,d – это евклидовы координаты точки на трёхмерной сфере, отображаемой в трёхмерное пространство. Нетрудно проверить, что сумма квадратов трёх координат в правой части (9.1), см. [To-90, с.28], равна $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, т.е. это 1.

Доказательство части **(B)** основано на применении следующей известной формулы (это формула (5.3) статьи[Mi-76])

$$\langle D_x y,z\rangle = ½(\langle[x,y],z\rangle - \langle[y,z],x\rangle + \langle[z,x],y\rangle)$$

для подсчёта второй квадратичной формы (когда одно псевдориманово многообразие вложено в другое) по *формуле Гаусса* (см., например, [Po-01, с. 39]).

Здесь x,y,z – левоинвариантные векторные поля на рассматриваемой группе Ли, $\langle,\rangle$ - левоинвариантное скалярное произведение на ней (не обязательно положительно определённое), $D_x y$ – левоинвариантное векторное поле, являющееся ковариантной производной поля y в направлени поля x (имеется в виду связность Леви-Чивиты, задаваемая метрикой $\langle,\rangle$). Миры DLF–теории представляются интересными (и новыми – ср. с исследовниями [BeTa-05] в трёхмерных группах Ли) “аренами” при рассмотрении задач, связанных с вложенными в группы Ли поверхностями (см., например, обзорную статью [Ta-06]). Несомненно, что утверждение (B) Теоремы 11 имеет место в значительно более общей ситуации (например, для максимального тора J в компактной группе Ли). Подобные обобщения целесообразнее представить в отдельной работе. Дальнейшие же детали доказательства части (B) опускаются (они легко могут быть восстановлены на основе статьи [Mi-76]).

Замечание 1. Понятно, что многие из рассматриваемых нами вопросов осмыслены (и интересны) в общем случае групп $U(p,q)$, $p+q=n$. Несколько первых результатов в этом направлении приведены в [LeSv-09].

Теперь рассмотрим возможность глобального вложения группы осциллятора в $SU(2,2)$. Следующее утверждение было заявлено в [Le-09].

Утверждение 1. Алгебра Ли осциллятора не может быть реализована матрицами два на два (пусть даже и с комплексными коэффициентами).

Доказательство. Исходим из следующих коммутационных соотношений, задающих осцилляторную алгебру Ли:

$$[l_2, l_3] = - l_1,\ [l_2, l_4] = l_3,\ [l_4, l_3] = l_2.$$

Предположим, что такая матричная реализация существует.

1) Если матрица, реализующая вектор l_4, может быть приведена (сопряжением) к диагональному виду,

$l_4 = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$, то его коммутатор с $l_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ равен $l_2 = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix}$. Непосредственным

вычислением проверяется, что соотношение $[l_2, l_4] = l_3$ влечёт $a = d = 0$. Далее, $[l_3, l_2] = l_1$

задаёт матрицу $l_1 = \begin{bmatrix} qb - pc & 0 \\ 0 & pc - qb \end{bmatrix}$. Так как $[l_2, l_1] = 0$, то выполняются уравнения $p(pc - qb) = 0$, $q(pc - qb) = 0$. Так как $[l_3, l_1] = 0$, то выполняются уравнения

$b(pc - qb) = 0$, $c(pc - qb) = 0$. Так как все четыре из коэффициентов b,c,p,q не могут равняться нулю, то $pc – qb = 0$. Но это противоречит тому, что матрица l_1 ненулевая.

2) Остаётся рассмотреть случай $l_4 = \begin{bmatrix} u & h \\ 0 & u \end{bmatrix}$, где h не равно нулю. Его коммутатор с $l_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ равен $h\begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix}$. Так как $[l_2, l_4] = l_3 = h\begin{bmatrix} 0 & -2hc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, то $a = c = d = 0$.

Тем самым, l_3 равен нулю, противоречие. Утверждение 1 доказано.

Введём матрицу

$$\begin{bmatrix} ix_1 & z & -ix_1 \\ -\bar{z} & ix_4 & \bar{z} \\ ix_1 & z & -ix_1 \end{bmatrix}, \qquad (9.2)$$

здесь $z = x_2 + ix_3$. Введём следующие алгебры Ли: $u(1,1)$ - это совокупность всех два на два матриц m, для которых выполняется соотношение

$$ms + sm^* = 0, \qquad (9.3)$$

где s – диагональная матрица с элементами $1, -1$; $u(2)$ - это совокупность всех два на два матриц m, для которых выполняется соотношение (9.3) с единичной матрицей s; $u(2,1)$ - это совокупность всех три на три матриц m, для которых выполняется соотношение (9.3), а диагональная матрица s задаётся элементами $1, 1, -1$.

Интересным (и важным - с точки зрения намечающихся DLF –применений) представляется следующее установленное в [Le-09]

Утверждение 2. Матрицы (9.2) принадлежат $u(2,1)$ и реализуют алгебру Ли осциллятора. В (9.2) - левый верхний блок задаёт алгебру $u(2)$, правый нижний блок задаёт $u(1,1)$.

Теперь реализация группы *Osc* как подгруппы в $SU(2,2)$ (а затем и вложение *Osc* в $U(2)$ на основе Теоремы 6) становится непосредственно осуществимой: ведь $SU(2,2)$ содержит $U(2,1)$ в качестве подгруппы. Основанные на (9.2) непосредственные вычисления приводят к следующему выводу:

Теорема 12. Совокупность всех матриц

$$U = \begin{bmatrix} 1-m+ix_1 & z & m-ix_1 \\ -e\bar{z} & e & e\bar{z} \\ -m+ix_1 & z & 1+m-ix_1 \end{bmatrix}, \qquad (9.4)$$

(используемые обозначения поясняются ниже) является (замкнутой) подгруппой осциллятора в $U(2,1)$. Совокупность всех матриц

$$U+e^{-1} \qquad (9.5)$$

(прямая сумма матрицы три на три и одномерной матрицы) является (замкнутой) подгруппой осциллятора в $SU(2,2)$. Орбита точки $\boldsymbol{-1}$ при дробно-линейном действии этой подгруппы равна “почти всей” $U(2)$: из $U(2)$ вырезана окружность. Ядро действия является дискретной подгруппой, задаваемой уравнениями $z = x_1 = 0, exp(2ix_4)=1$.

Доказательство первого утверждения теоремы основано на (9.2) и на стандартных разложениях в разрешимой группе Ли. Новыми (по сравнению с (9.2)) обозначениями в выражении (9.4) являются: m – это половина квадрата модуля числа $z = x_2 + ix_3$, $e = exp(i\, x_4)$. Отметим, что определитель матрицы (9.4) равен e. Поэтому матрица (9.5) является элементом группы $SU(2,2)$. Понятно, что множество всех матриц (9.4) замкнуто в $U(2,1)$, а множество всех матриц (9.5) замкнуто в $SU(2,2)$. Непосредственные вычисления приводят к следующему выражению для элемента $\boldsymbol{z}$ орбиты точки $\boldsymbol{-1}$:

$$\boldsymbol{z} = v\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

где $v = (2m+1-2ix_1)^{-1}$, $z_1 = 2m -1 -2ix_1$, $z_2 = -z_3 = -2ez$, $z_4 = (2m-1+2ix_1)e^2$. Если в (9.6) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{-1}$, то $z = x_1 = 0, exp(2ix_4)=1$ (эти уравнения задают ядро действия).

Если $z = 0$, то $vz_1 = (1+2ix_1)/(2ix_1 -1)$. Отсюда следует, что элементы множества

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : \text{модуль комплексного числа } d \text{ равен единице} \right\} \qquad (9.7)$$

в $U(2)$ не принадлежат рассматриваемой орбите. Это и есть та окружность, которая вырезана из $U(2)$. Для завершения доказательства Теоремы 12 осталось рассмотреть случай $z \neq 0$ (т.е. тот случай, когда элемент группы $U(2)$ не диагонален). Это рассмотрение хоть и элементарно, но довольно длинно; оно опускается.

Замечание 2. Всё вышеизложенное справедливо, очевидным образом, для орбиты точки $\boldsymbol{1}$ (нежели $\boldsymbol{-1}$) в $U(2)$: достаточно рассмотреть подходящую подгруппу, сопряжённую с (9.4).

Замечание 3. Введённая в процессе доказательства $SU(2,2)$-подгруппа осциллятора (9.4) имеет топологию произведения S^1 и R^3, где окружность соответствует параметру x_4 в (9.2). По-видимому (установленное уже в Теореме 6), вложение осцилляторной орбиты в $U(2)$ является (послойным) соответствием между двумя пространствами (тривиальных) расслоений со слоем S^1. Ведь когда из $U(2)$ вырезана вышеупомянутая окружность, то получается пространство расслоения над трёхмерной сферой с выколотой точкой (т.е. над R^3). Соответствующие детали предполагается изложить в другой работе.

10 Благодарности

Многие специалисты оказали помощь на различных этапах работы. Автор признателен им всем. Вот некоторые имена из этого списка: А. Дейно (Канада), А. А. Бондаренко, Ю. Е. Боровский, М. Букатин (США), Б. Костант (США), А. Радул (США), И. А. Шведов, И. Зингер (США), О. С. Свидерский, Д. Воган (США).

Л и т е р а т у р а

[AD-50] Александров, А.Д. О преобразованиях Лоренца, УМН, 1950, Т.5, вып.3, с.187.
[AD-76] Александров, А.Д. К основаниям теории относительности, Вестник ЛГУ 19(1976) (Сер. Мат., Мех., Астр., вып. 4), 5-28
[BaSeZh-92] J.C.Baez, I.E.Segal, Z. Zhou. *Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1992. – 291p.
[BeTa-05] Berdinsky, D.A., Taimanov, I.A.: Surfaces in three-dimensional Lie groups. Siberian Math. Journal **46**:6 (2005), 1005-1019.
[CaJa-92] D. Cangemi and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett., **69**(1992), n.2, 233-236
[CaJa-93] D. Cangemi and R. Jackiw, Ann. Phys. (N.Y.) **225**(1993), 229-263
[Da-05a] Daigneault A. Irving Segal's Axiomatization of Spacetime and its Cosmological Consequences, http://aexiv.org/abs/gr-qc/0512059
[Da-05b] Daigneault A. "Standard Cosmology and Other Possible Universes" /in: "Physics Before and After Einstein." M.M.Capria (Ed.), IOS Press, 2005, 285-324.
[DNF] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия. Москва, Наука, 1979.
[DS-01] Daigneault A. And Sangalli A., Einstein's static universe: An idea whose time has come back? Notices of the Amer.Math.Soc. 48(2001), 9-16.
[Gr-71] Громол Д. и др. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971. 368с.
[GuLe-84] Гуц А.К., Левичев А.В., К основам теории относительности, Доклады Академии Наук СССР 277(1984), 253-257
[Kr-80] Крамер, Д., Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум (под ред. Э. Шмутцера), "Точные решения уравнений Эйнштейна". Пер. с англ. М.: Энергоиздат 1982. 416 с.
[Le-85] Левичев, А.В. "Причинные конусы в алгебрах Ли малых размерностей", Сиб. Мат. Журн. 26(1985), n.5, 192-195
[Le-86a] Левичев, А.В., "Некоторые симметрические пространства общей теории относительности как решения уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса"/ Теоретико-групповые методы в физике/ Труды третьего медународного семинара (Юрмала, май 1985) том 1 (под ред. М. А. Маркова), Наука (1986), 145-150.
[Le-86b] Левичев, А.В. "Хроногеометрия электромагнитной волны, заданной биинвариантной метрикой на группе осциллятора", Сиб. Мат. Журн. **27**(1986), 117-126
[Le-93] Левичев, А.В. "Хронометрическая теория И.Сигала как завершение специальной теории относительности," Изв.ВУЗов. Физика (1993), n.8, 84-89.
[Le-95] Levichev A.V., On Mathematical Foundations and Physical Applications of Chronometry/In: Semigroups in Algebra, Geometry, and Analysi, Eds. J.Hilgert, K.Hofmann, and J.Lawson, de Gryuter Expositions in Mathematics, Berlin 1995, viii+368 pp., 77-103, http://math.bu.edu/people/levit.
[Le-01] Levichev A.V. On the notion of induced representation of a Lie algebra: geometric description and chronometric applications, Siberian Advances in Mathematics, **11**(2001), N.4, 1-12
[Le-03a] Левичев А.В. Three symmetric worlds instead of the Minkowski space-time, Известия РАЕН, серия МММИУ, **7**(2003), n.3-4, 87-93
[Le-03b] Levichev A.V. Certain chronometric bundles over compact worlds: triviality of scalar and spinor bundles, Siberian Advances in Mathematics, **13**(2003), N.4, 1-9
[Le-06] Левичев А.В. Параллелизация хронометрических расслоений, основанная на подгруппе *U(2)*, Известия РАЕН, серия МММИУ, **10**(2006), n.1-2, 51-61
[Le-08] Левичев А.В. Пример сингулярности действия подгруппы гомотетий при дробно-линейном действии конформной группы на некомпактной группе *U(1,1)*, In: "Science, Information, Spirit"/Proceedings of the XIIth International Congress on Bioelectrography, Saint Petersburg, Russia, 2008, pp.61-64
[Le-09] Левичев А.В. Алгебра Ли осциллятора и алгебры Ли u(2), u(1,1), как единая матричная система в u(2,1). В: "Алгебры Ли, алгебраические группы, и теория

инвариантов"/Труды Летней Школы-Конференции, Самара, 8-15 июня 2009, сс.32-34

[LeSv-09] Левичев А. В., Свидерский О.С. Группы Ли U(p,q) матриц размера p+q как единая система, основанная на дробно-линейных преобразованиях: I. Общее рассмотрение и случаи p+q = 2, 3. //Международная конференция *"Современные проблемы анализа и геометрии"*. Новосибирск: 14-20 сентября 2009 г., сс.68-69.

[Mi-76] Milnor J., Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Advances in math., **21**(1976), no.3, 293-329

[NaWi-93] Chiara R. Nappi and Edward Witten, Phys. Rev. Lett., **71**(1993), n.23, 3751-3753

[OnVi-93] Onishchik A. L., Vinberg E. B. Lie Groups and Lie Algebras. Springer-Verlag, 1993.

[Ør-81] Ørsted, Bent, "Conformally invariant differential equations and projective geometry", Journal of Functional Analysis **44**(1981), 1-23

[PaSe-82a] Paneitz, Stephen M., Irving E. Segal, "Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle", Journal of Functional Analysis **47**(1982), 78-142

[PaSe-82b] Paneitz, Stephen M., Irving E. Segal, "Analysis in space-time bundles II: The spinor and form bundles", Journal of Functional Analysis **49**(1982), 335-414

[PaSeVo-87] Paneitz, Stephen M., Irving E. Segal, and David A. Vogan, Jr., "Analysis in space-time bundles IV: Natural bundles deforming into and composed of the same invariant factors as the spin and form bundles", Journal of Functional Analysis **75**(1987), 1-57

[Po-01] Postnikov, M.M., Geometry VI. Riemannian Geometry. Springer, 2001.

[Se-76] Segal, Irving E., Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy, Academic Press, New York, 1976.

[Se-91] Segal, Irving E., Is the Cygnet the quintessential baryon? Proc. Natl. Acad. Sci., **88**(1991), 994-998.

[Se-98] Segal, Irving E., Real spinor fields and the electroweak interaction, Journal of Functional Analysis **154**(1998), 542-558

[SeJa-81] Segal, Irving E., Hans P. Jakobsen, Bent Ørsted, Stephen M. Paneitz, and Brigit Speh, "Covariant chronogeometry and extreme distances: Elementary Particles", PNAS, **78**(1981), 5261-5265

[SeVoZh-98] Segal, Irving E., David A. Vogan, Jr., and Zhengfang Zhou, "Spinor currents as vector particles", Journal of Functional Analysis **156**(1998), 252-262

[SmShSh-92] Я.А.Смородинский, А.Л.Шелепин, Л.А.Шелепин, Групповые и вероятностные основы квантовой теории, УФН (1992), Том 162, 12, 1-95

[St-67] Streater R. F. The Representations of the Oscillator Group, Commun. Math. Phys. **4**(1967), 217-236

[Sv-95] Свидерский О.С., Осцилляторная параллелизация индуцированного скалярного расслоения, Сиб. Мат. Журн. **36**(1995), N.5, 1122-1129

[To90-] Toth, G., Harmonic Maps and Minimal Immersions through Representation Theory, Perspectives in Mathematics, vol.12, Academic Press, Inc (1990)

[Ta-06] Taimanov, I.A., Two-dimensional Dirac operator and surface theory. math.DG/0512543 in http://arxiv.org

[Wi-39] Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. of Math.(2), **40**(1939), 149-204.

Левичев Александр Владимирович, Институт Математики им. С.Л.Соболева СО РАН

630090, Новосибирск-90, ул. Акад. Коптюга, 4; levit@math.nsc.ru, тел. 3634550

“Inclusion of space-times L and F into Segal’s chronometric theory”

Abstract:

Векторная группа пространства-времени Минковского ***M*** действует на нём просто транзитивно и сохраняет систему световых конусов. Спрашивается: какие ещё четырёхмерные группы Ли, действуя локально просто транзитивно, сохраняют такую систему конусов? Доказано, что (при условии би-инвариантности системы конусов) таких групп три. Вводятся соответствующие миры ***D, L, F*** - эти группы Ли, снабжённые биинвариантными лоренцевыми метриками: $d = u(2)$, $l = osc$, $f = u(1,1)$ как алгебры Ли. Они являются мирами общей теории относительности, причем наиболее симметричными (в том смысле, что среди всех четырёхмерных алгебр Ли лишь m, d, l, f соотвествуют группам с биинвариантной невырожденной метрикой лоренцевой сигнатуры).

Хронометрия (т.е. теория Сигала) основана на мире ***D***. Изложена программа ***LF***-*развития* хронометрии и в её рамках осуществлено несколько новых математических построений. В частности, по аналогии с эрмитовой моделью $u(2)$ мира Минковского, введена *псевдо-эрмитова* модель $u(1,1)$ и действие расширенной группы Пуанкаре на ней. По аналогии с известным отображением Кэли C_D из $u(2)$ в ***D***, введено отображение C_F из $u(1,1)$ в ***F*** и исследованы его свойства. По аналогии с известным дробно-линейным действием конформной группы на ***D***, введено действие конформной группы на ***F***. Введены в рассмотрение те (конформные) соответствия между (конформно плоскими) ***D***, ***L***, ***F***, которые являются наиболее согласованными с Ли-групповыми структурами этих миров.