ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία με θέμα:

Επέκταση της Ito formula σε συναρτήσεις με γενικευμένες παραγώγους

Κωνσταντίνος Σ. Σπηλιόπουλος

Τριμελής επιτροπή

1. Γεώργιος Κοκολάκης
2. Βασίλης Παπανικολάου
3. Ιωάννης Σπηλιώτης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 13 Ιουνίου 2004

....

Κωνσταντίνος Σ. Σπηλιόπουλος

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το περιεχόμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η επέκταση της Ito formula για συναρτήσεις με γενικευμένες παραγώγους $f \in W_p^{m,k}$. Το αποτέλεσμα οφείλεται στον N.V.Krylov και εκτίθεται στο [6]. Η απόδειξη βασίζεται στο Λήμμα 7 της σελίδας 56 του [6] και το οποίο κατ΄ ουσία έχει ως ακολούθως:

Αν έχουμε $R > 0, f \in \mathcal{L}^{n+1}(B(0,R) \times [0,+\infty)), f \geq 0$ και $f = 0$ στο $\partial B(0,R)$, τότε υπάρχει $z \in \mathbb{K}(B(0,R) \times (0,\infty)) \cap C(\overline{B}(0,R) \times [0,\infty])$ τέτοια ώστε:

$z(\cdot,t)$ είναι κυρτή στο $B(0,R)$ $\forall t \geq 0$

$z(x,\cdot)$ είναι αύξουσα στο $[0,+\infty)$ $\forall x \in B(0,R)$

$z \leq 0$ στο $B(0,R) \times [0,+\infty)$

$\|z\| \leq N \cdot \|f\|_{n+1}$

$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + b \frac{\partial z}{\partial t} \geq (n+1)f$, (με την έννοια των κατανομών)

για κάθε πραγματικό, μη-αρνητικό $n \times n$ συμμετρικό πίνακα $[a_{ij}]$ και κάθε πραγματικό θετικό αριθμό $b > 0$ τέτοιο ώστε $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$.

Η απόδειξη του λήμματος αυτού αναπτύσσεται στο [5] και είναι μάλλον σκοτεινή στο κρίσιμο σημείο της. Αν όμως εκμεταλλευθούμε μεταγενέστερα της απόδειξης του Krylov αποτελέσματα σχετικά με εξίσωση Monge-Ampere παραβολικού τύπου, όπως αυτά του [9], μπορούμε να εξασφαλίσουμε την συνάρτηση z του λήμματος με διαφανέστερο τρόπο και καταλληλότερες για τον σκοπό μας ιδιότητες. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε μια πληρέστερη και μάλλον κομψότερη απόδειξη του αποτελέσματος του Krylov. Να σημειώσουμε πάντως ότι δεν πρόκειται για διαφορετική μέθοδο και η βελτίωση του αποτελέσματος είναι οριακή.

Σε κάθε κεφάλαιο έχει ακολουθηθεί αύξουσα σειρά αρίθμησης ορισμών, προτάσεων, θεωρημάτων και πορισμάτων. Έτσι για παράδειγμα όταν αναφερόμαστε στην πρόταση 2.2.5 εννοούμε την πρόταση 5 της παραγράφου 2 του δευτέρου κεφαλαίου.

Θέλω να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή και δάσκαλο της Σχόλης Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου και επιβλέποντα της εργασίας Ιωάννη Σπηλιώτη για την βοήθειά του στην από μέρους μου καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και τις συμβουλές του στην σύνταξη της παρούσας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω για τις πολύτιμες υποδείξεις τους τα μέλη της επιτροπής Γεώργιο Κοκολάκη και Βασίλη Παπανικολάου. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω την φίλη μου Αναστασία Βουλγαράκη για την βοήθειά της, τους γονείς και το αδελφό μου Θανάση για την συμπαραστασή τους.

Αθήνα 13 Ιουνίου 2004
Κωνσταντίνος Σπηλιόπουλος

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to present the extension of Ito formula to functions with generalized derivatives $f \in W_p^{m,k}$. This result belongs to N.V.Krylov and it is being presented at [6]. The proof is based on the lemma 7, page 56 at [6], which in essence is the following:

Let $R > 0, f \in \mathcal{L}^{n+1}(B(0,R) \times [0,+\infty)), f \geq 0$ with $f = 0$ at $\partial B(0,R)$. Then there exists $z \in \mathbb{K}(B(0,R) \times (0,\infty)) \cap C(\overline{B}(0,R) \times [0,\infty])$ such that:

$z(\cdot,t)$ is convex at $B(0,R)$ $\forall t \geq 0$

$z(x,\cdot)$ is increasing at $[0,+\infty)$ $\forall x \in B(0,R)$

$z \leq 0$ at $B(0,R) \times [0,+\infty)$

$\|z\| \leq N \cdot \|f\|_{n+1}$

$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + b\frac{\partial z}{\partial t} \geq (n+1)f$, (in the sense of distributions)

for any real, non negative $n \times n$ symmetric matrix $[a_{ij}]$ and every real positive number $b > 0$ such that $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$.

The proof of the lemma is being presented at [5] and it is probably not so clear at the critical part of it. However, if we take advantage of results, newer of the Krylov's proof, regarding to Monge-Ampere parabolic type equations, such as the ones at [9], we can obtain the function z of the lemma with better properties for our purpose. Hence we can obtain a more complete and probably neater proof of the result of Krylov. We have however to state that it is not about a different method and that the improvement of the result is limited.

Athens 13 June 2004

Konstantinos Spiliopoulos

Κεφάλαιο 1

Συμβολισμοί

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται κάποιοι συμβολισμοί οι οποίοι και θα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην συνέχεια.

- $B(x,R) = \{y : \|y-x\| < R\}$.
- $\overline{D}$: το κλείσιμο του D.
- ∂D: το σύνορο του D.
- D^c: το συμπλήρωμα του D.
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\sigma.\pi.$ ή $\sigma.\beta.$: σχεδόν παντού ή σχεδόν βεβαίως αντίστοιχα.
- $|A|$: το μέτρο Lebesque του A.
- z^*: συζυγής συνάρτηση της u (δες ορισμό σελίδα 5).
- B^τ: ο ανάστροφος πίνακας του B.
- $\rightharpoonup$: ασθενής σύγκλιση.
- $f * g$: η συνέλιξη των f και g.
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: η μερική παράγωγος της f ως προς x_i.
- $f'(x)$: η παράγωγος της f στο x.
- $[x], x \in \mathbb{R}$, ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος του x.
- $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $\|f\| = \sup_{x\in A}|f(x)|$, όπου Α το εκάστοτε πεδίο ορισμού της f.
- $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_A |f(x)|^p dx}$, όπου Α το εκάστοτε πεδίο ορισμού της f.
- $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \sqrt[p]{\int_A |f(x)|^p dx}$, όπου Α το εκάστοτε πεδίο ορισμού της f.
- $V \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό.
- $C^k(V) = \{f : f$ συνεχής, με συνεχείς παραγώγους μέχρι κ-τάξης στο $V\}$.
- $C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}^n) = \{f : f$ συνεχής, με συνεχείς παραγώγους 1ης-τάξης ως προς t και 2ης τάξης ως προς x στο $(0,T)\times\mathbb{R}^n\}$.
- $C^\infty(V) = \cap_{k\geq 0} C^k(V)$.
- $C_c(V) = \{f : f$ συνεχής, με συμπαγή φορέα στο $V\}$.
- $C_c^k(V) = C^k(V) \cap C_c(V)$.
- $C_c^\infty(V) = C^\infty(V) \cap C_c(V)$.
- $\mathcal{L}^p(V) = \{f : f$ μετρήσιμη στο V και $\int_V |f|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.
- $\mathcal{L}^p_{loc}(V) = \{f : f \in \mathcal{L}^p(K), K$ συμπαγές στο V $\}$, $1 \leq p < \infty$.
- $\mathcal{L}^\infty(V) = \{f : f$ μετρήσιμη στο V και υπάρχει C τέτοιο ώστε $|f(x)| < C$ $\sigma.\pi.$ στο $V\}$.
- $W_p^m, W_p^{m,k}, W_\infty^{m,k}$: χώροι Sobolev.
- $W_{p,loc}^{m,k}(V) = \{f : f \in W_p^{m,k}(K), K$ συμπαγές στο V $\}$.

Κεφάλαιο 2

Μια παραβολική τύπου $Monge-Ampere$ *(M.A.) εξίσωση*

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε την έννοια της γενικευμένης εξίσωσης $Monge-Ampere$ παραβολικού τύπου:

$$\frac{\partial z}{\partial t} det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}] = f \tag{2.1}$$

Θα ορισθεί ο αντίστοιχος τελεστής, θα διατυπωθούν αλγεβρικές και τοπολογικές ιδιότητες του όπως και το κατάλληλο αποτέλεσμα αρχής μεγίστου. Εν συνεχεία θα παρατεθούν αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας της γενικευμένης λύσης.

Με την βοήθεια των παραπάνω αποδεικνύονται a priori φράγματα της γενικευμένης λύσης της (2.1) και από αυτά προκύπτει το Λήμμα 7, σελίδας 56 του [6] στο οποίο αναφερθήκαμε στον πρόλογο.

Για λεπτομερέστερη ανάπτυξη δες [9].

Ο χώρος συναρτήσεων που θεωρούμε, για $\tau > 0$ και D ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι ο κώνος $\mathbb{K}(D \times (0, \tau))$ των συναρτήσεων $z : D \times (0, \tau) \to \mathbb{R}$, όπου οι z ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $z \in C(D \times (0, \tau))$.
- για κάθε $t \in (0, \tau)$, η συνάρτηση $z(\cdot, t)$ είναι κυρτή στο D.
- για κάθε $x \in D$, η συνάρτηση $z(x, \cdot)$ είναι αύξουσα στο $(0, \tau)$.
- για κάθε συμπαγές $K \subset D$ και για κάθε κλειστό διάστημα $I \subset (0, \tau)$, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\sup_{x \in K} |z(x, s) - z(x, t)| \leq c|t - s| \; \forall s, t \in I$$

Η όλη ανάπτυξη αποσκοπεί στον ορισμό και τη μελέτη ενός τελεστή

$$T : \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \rightarrow m(D \times (0,\tau))$$

, όπου $m(D \times (0,\tau))$ το σύνολο των μέτρων Borel στο $D \times (0,\tau)$, και ο οποίος για $z \in C^{2,1}(D \times (0,\tau))$ γράφεται

$$Tz(A) = \int_A \frac{\partial z}{\partial t} det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}] dxdt$$

όπου το A είναι ένα Borel υποσύνολο του $D \times (0,\tau)$ (δηλαδή $A \in \mathcal{B}(D \times (0,\tau))$).

Με αυτό τον τρόπο προσδίδεται γενικευμένη έννοια στην (2.1).

2.2 Ένας τελεστής Monge-Ampere παραβολικού τύπου.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται σύντομα κάποιοι ορισμοί, συμβολισμοί και μέτρα που σχετίζονται με κυρτές συναρτήσεις με μεγάλη χρησιμότητα στη συνέχεια. Επίσης για ευκολία στον συμβολισμό θα συμβολίζουμε με V το μέτρο Lebesque στον $\mathbb{R}^n$ και με m το μέτρο Lebesque στον $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ορισμός 1

Δοθείσης μίας συνάρτησης $z : D \to \mathbb{R}$, με τον όρο κανονική εικόνα ενός υποσυνόλου $B \subset D$ εννοούμε το σύνολο $Pz(B) = \bigcup_{y\in B} \partial z(y)$ όπου βέβαια ως γνωστόν $\partial z(y) = \{p \in \mathbb{R} : z(x) \geq z(y) + p(x-y)\ \forall x \in D\}$, το υποδιαφορικό της z στο $y \in D$.

Όπως είναι γνωστό ([11]) όταν το B είναι ένα Borel υποσύνολο του D, τότε το $Pz(B)$ είναι Lebesque μετρήσιμο και η φόρμουλα $Mz(B) = V(Pz(B))$ ορίζει ένα Borel μέτρο στα Borel υποσύνολα του D, το γνωστό ως Monge- Ampere μέτρο της z. Στην περίπτωση όμως που $z \in C^2(D)$ και αφού $Pz(B) = (gradu)(B)$ έχουμε

$$Mz(B) = \int_B det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}]dx$$

Παρόμοια τώρα αν $z \in C(D \times (0,\tau))$ τέτοια ώστε η $z(\cdot, s)$, $s \in (0,\tau)$ να είναι κυρτή στο D, θα έχουμε τα εξής:

$$\partial z(y,s) = \{p \in \mathbb{R}^n : z(x,s) \geq z(y,s) + p(x-y)\ \forall x \in D\} \tag{2.2}$$

$$Pz(s)(B) = \bigcup_{y\in B} \partial z(y,s) \tag{2.3}$$

$$Mz(s)(B) = V(Pz(s)(B)),\ B \subset D\ Borel \tag{2.4}$$

Επίσης για κάθε $A \subset D \times (0,\tau)$, ορίζουμε

$$Qz(A) = \bigcup_s (Pz(s)(A_s) \times \{s\}) \tag{2.5}$$

όπου $A_s = \{x : (x,s) \in A\}$

Δοθέισης μιάς συνάρτησης $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$, όπου τ ένας θετικός αριθμός, θεωρούμε την συνάρτηση z^* ορισμένη στο $\mathbb{R}^n \times (0,\tau)$ που δίνεται από την

$$z^*(p,s) = \sup_{x\in D}(px - z(x,s))$$

Η συνάρτηση z^* ονομάζεται συζηγής συνάρτηση της z και εύκολα διαπιστώνεται ότι $z^* < +\infty$ τουλάχιστον στο $Qz(D \times (0,\tau))$. Επίσης ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$p \in \partial z(y,s)$ για κάποιο $(y,s) \in D \times (0,\tau) \Leftrightarrow z^*(p,s) = yp - z(y,s)$ (δες [7] και [13]).

Δοθείσης τώρα μιας $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$, θέτουμε

$$L(p,s) = (p, -z^*(p,s)), s \in (0,\tau), p \in \{z^*(\cdot,s) < +\infty\}$$

Πρόταση 1

Αν $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$, L ο πρό ολίγου ορισθείς μετασχηματισμός και A ένα Borel υποσύνολο του $D \times (0,\tau)$, τότε το $L(Qz(A))$ είναι Lebesque μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Επιπλέον η συνολοσυνάρτηση $Tz(A) = mL(Qz(A))$ ορίζει ένα κανονικό Borel μέτρο στα Borel υποσύνολα του $D \times (0,\tau)$. Τέλος στην περίπτωση κατά την οποία $z \in C^{2,1}(D \times (0,\tau))$, το μέτρο Tz παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$Tz(A) = \int_A \frac{\partial z}{\partial t} det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}] dxdt \tag{2.6}$$

Παρατήρηση

Για την τελευταία αναπαράσταση του μέτρου Tz παρατηρούμε ότι στην περίπτωση κατά την οποία $z \in C^{2,1}(D \times (0,\tau))$, θα έχουμε ότι $\partial z(y,s) = \{gradz(y,s)\}$ και άρα $L(Qz(A)) = \Phi z(A)$, όπου

$$\Phi z(x,t) = (gradz(x,t), z(x,t) - x \cdot gradz(x,t))$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν όμως ότι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού Φz ισούται με $\frac{\partial z}{\partial t} det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}]$ (όπως υποδεικνύεται από τον K.Tso στο [12]) έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 2

Έστω $z_n \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$ μία ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνουν με ομοιόμορφο τρόπο σε συμπαγή, σε μία συνάρτηση $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$. Έστω επίσης ότι για κάθε συμπαγές $K \subset D$ και για κάθε κλειστό διάστημα $I \subset (0,\tau)$ υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\sup_n \sup_{x \in K} |z_n(x,t) - z_n(x,s)| \leq c|t-s| \, \forall t,s \in I$$

τότε $Tz_n \rightharpoonup Tz$, δηλαδή:

$$\int f dTz_n \to \int f dTz \tag{2.7}$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση f με συμπαγή φορέα στο $D \times (0, \tau)$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις $det[A+B] \geq detA + detB$, $det[\lambda \cdot A] = \lambda^{n+1} \cdot det[A]$ όπου A,B μη αρνητικοί και συμμετρικοί $(n+1) \times (n+1)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τον τελεστή:

$$T : \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \rightarrow m^{+}(D \times (0,\tau))$$

Πρόταση 3

Έστω $z, v \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau))$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\begin{aligned} Tz + v &\geq Tz + Tv && (2.8) \\ T\lambda z &= \lambda^{n+1} Tz && (2.9) \end{aligned}$$

Πρόταση 4

Έστω τώρα $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \cap W^{2,1}_{\infty,loc}(D \times (0,\tau))$, τότε

$$Tz(A) = \int_A \frac{\partial z}{\partial t} det[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}] dx dt \tag{2.10}$$

για $A \subset D \times (0,\tau)$.

Αναφέρουμε τέλος την εξής πολύ σημαντική για τη συνέχεια πρόταση:

Πρόταση 5

Αν $dTz = h^{n+1} dm + dT^s z, h^{n+1} \in \mathcal{L}^1_{loc}(D \times (0,\tau))$ είναι η Lebesque-Radon-Nicodym ανάλυση του μέτρου Tz, τότε θα έχουμε στο $D \times (0,\tau)$ με την έννοια των κατανομών

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + b \frac{\partial z}{\partial t} \geq (n+1) h \tag{2.11}$$

για κάθε πραγματικό, συμμετρικό, μη-αρνητικό $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ και κάθε πραγματικό θετικό αριθμό b τέτοιο ώστε $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$.

2.3 Η γενικευμένη λύση της Monge-Ampere παραβολικής εξίσωσης

Δοθέντος ενός ανοικτού, κυρτού και φραγμένου συνόλου $D \subset \mathbb{R}^n$ και ενός αριθμού $\tau > 0$, με τον όρο παραβολικό σύνορο του $D \times (0, \tau)$, εννοούμε το σύνολο:

$$\Gamma = \partial(D \times (0, \tau)) - \{(x, 0) : x \in D\}$$

Θα εξετάσουμε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος: Να βρεθεί συνάρτηση $z \in \mathbb{K}(D \times (0, \tau))$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} Tz &= f \, \sigma\tau o \, D \times (0, \tau) \\ z &= g \, \sigma\tau o \, \Gamma \end{aligned} \tag{2.12}$$

όπου f, g δοθείσες συναρτήσεις στο $D \times (0, \tau)$ και Γ αντίστοιχα.

Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα, το οποίο δίνει απάντηση σε αυτό το πρόβλημα, παρουσιάζουμε δύο λήμματα, τα οποία και προσθέτουν δύο ακόμα ιδιότητες στον τελεστή μας.

Λήμμα 1

Δοθεισών δύο συναρτήσεων $z, v \in \mathbb{K}(D \times (0, \tau)) \cap C(\overline{D} \times [0, \tau])$ και ενός ανοικτού συνόλου $E \subset D \times (0, \tau)$, ας υποθέσουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} z &\leq v \;\; \sigma\tau o \, E \\ z &= v \;\; \sigma\tau o \, \partial E \cap \{t > 0\}, \{t > 0\} = \{(x, t) : t > 0\} \\ sup|z(x, t) - z(x, s)| &\leq c|t - s| \;\; \forall t, s \in (0, \tau) \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Τότε ισχύει ότι:

$$Tv(E) \leq Tz(E) \tag{2.13}$$

Λήμμα 2

Δοθεισών δύο συναρτήσεων $z, v \in \mathbb{K}(D \times (0, \tau)) \cap C(\overline{D} \times [0, \tau])$ ας υποθέσουμε ότι $Tz \leq Tv$ στο $D \times (0, \tau)$ και $z \geq v$ στο Γ. Τότε ισχύει ότι:

$$z \geq v \, \sigma\tau o \, D \times (0, \tau) \tag{2.14}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το κύριο θεώρημα, το οποίο μας δίνει τη λύση του προβλήματος μας:

Θεώρημα 3

Έστω D ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $D = \{x \in \mathbb{R}^n : w(x) < 0\}$ για κάποια συνάρτηση $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ με

$$[\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}] \geq a I_n$$

για $a > 0$, υπό την έννοια των πινάκων. Δοθείσης μιας μη αρνητικής συνάρτησης $f \in C(D \times [0, \tau])$ με $f = 0$ στο παραβολικό σύνορο Γ και

$$\sup_D |f(x,t) - f(x,s)| \leq c|t-s| \; \forall t, s \in (0, \tau)$$

υπάρχει μοναδική λύση $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \cap C(\overline{D} \times [0,\tau])$ του ακόλουθου προβλήματος :

$$\begin{aligned} Tz &= f^{n+1} \, \sigma\tau o \, D \times (0, \tau) \\ z &= 0 \, \sigma\tau o \, \Gamma \end{aligned} \tag{2.15}$$

Επιπλέον, για κάποια σταθερά $\lambda > 0$ ισχύει ότι:

$$\sup_D |z(x,t) - z(x,s)| \leq \lambda \cdot |t-s| \; \forall t, s \in (0, \tau)$$

2.4 A priori φράγματα και το Λήμμα του Krylov

2.4.1 A priori φράγματα

Ας θεωρήσουμε μία $z \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \cap C(\overline{D} \times [0,\tau])$ με $z = 0$ στο Γ και τέτοια ώστε να ικανοποιεί την

$$\sup_D |z(x,t) - z(x,s)| \leq c \cdot |t-s| \ \forall t, s \in (0,\tau)$$

για κάποια σταθερά $c > 0$.

Στην παρούσα παράγραφο θα βρούμε μία εκτίμηση του μεγίστου της συνάρτησης $|z|$.

Με τρόπο ανάλογο με αυτόν του λήμματος 3.5 στο [11] θεωρούμε μια $w : \overline{D} \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής: $\forall t \in [0,\tau], w(\cdot,t)$ αναπαρίσταται στο $\mathbb{R}^{n+1}$ από τον κυρτό κώνο βάσεως $D \times \{0\}$, βάθους $|z(0,t)|$ και με κόρυφη στο $(0, z(0,t))$. Προφανώς $w \in \mathbb{K}(D \times (0,\tau)) \cap C(\overline{D} \times [0,\tau])$ και παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του λήμματος 3.1 με $E = D \times (0,\tau)$ ικανοποιούνται. Συνεπώς θα ισχύει:

$$Tz(D \times (0,\tau)) \geq Tw(D \times (0,\tau)) \tag{2.16}$$

Θέτοντας τώρα $I = \{0\} \times (0,\tau)$, έχουμε:

$$Tw(D \times (0,\tau)) \geq Tw(I) = mL(G) \tag{2.17}$$

όπου εξ' ορισμού $G = Qw(I) = \bigcup_{s \in (0,\tau)} \partial w(0,s) \times \{s\}$ και $L(p,s) = (p, -w^*(p,s)) = (p, z(0,s))$.

Επειδή όμως

$$L(G) = \cup_{s \in (0,\tau)} \{(p, z(0,s)), p \in \partial w(0,s)\}$$

και αφού

$$mL(G) = \int_0^\tau (\int_G \frac{\partial z}{\partial t}(0,s) dp) ds = \int_0^\tau V(\partial w(0,s)) \frac{\partial z}{\partial t}(0,s) ds$$

έχουμε ότι:

$$mL(G) = \int_0^\tau Mw(s)(D) \frac{\partial z}{\partial t}(0,s) ds \tag{2.18}$$

επειδή $Pw(s)(D) = Pw(s)\{0\} = \partial w(0,s)$. Χρησιμοποιώντας τώρα τα ίδια επιχειρήματα όπως στο λήμμα 3.5 στο ([11]) για τον κώνο $w(\cdot,s)$, έχουμε ότι

$$Mw(s)(D) \geq \lambda \frac{|z(0,s)|^n}{dq^{n-1}}, s \in (0,\tau) \tag{2.19}$$

όπου $\lambda = \frac{2^{n-1}}{n!}$, $d = dist(0, \partial D) = \inf_{x \in \partial D}\{dist(0, x)\}$ και $q = diamD$.

Από τις παραπάνω ανισότητες (2.16-2.19) προκύπτει ότι:

$$Tz(D \times (0,\tau)) \geq \frac{\lambda}{q^n} \int_0^{\tau} |z(0,s)|^n \frac{\partial z}{\partial t}(0,s)ds \tag{2.20}$$

Όμως επειδή η $z(x,\cdot)$ είναι αύξουσα έχουμε:

$$\int_0^{\tau} |z(0,s)|^n \frac{\partial z}{\partial t}(0,s)ds = \frac{-1}{n+1}[||z(0,\tau)|^{n+1}| - |z(0,0)|^{n+1}|] \tag{2.21}$$

Επίσης αφού $z(0,\tau) = 0$, $z = 0$ στο παραβολικό σύνορο Γ και αφού η $z(\cdot,t)$ είναι κυρτή θα έχουμε ότι:

$$Tz(D \times (0,\tau)) \geq \frac{\lambda}{q^n \cdot (n+1)} \cdot |z(u)|^{n+1} \quad \forall u \in D \times (0,\tau) \tag{2.22}$$

και άρα καταλήξαμε στην ανισότητα:

$$N \cdot Tz(D \times (0,\tau)) \geq sup|z(u)|^{n+1} \tag{2.23}$$

όπου $N = \frac{q^n \cdot (n+1)}{\lambda}$.

Τέλος αν $(x,t) \in D \times (0,\tau)$ και $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ τέτοιο ώστε $x + h \in D$ με γεωμετρικά επιχειρήματα έχουμε ότι

$$|z(x+h,t) - z(x,t)| \leq |h| \cdot |z(x,t)| \cdot [dist(x,\partial D)]^{-1}$$

και λόγω της προηγούμενης ανισότητας θα έχουμε ότι:

$$\sup_{(0,\tau)} |z(x+h,t) - z(x,t)| \leq |h|N \cdot [dist(x,\partial D]^{-1} \cdot (Tz(D \times (0,\tau)))^{\frac{1}{n+1}} \tag{2.24}$$

2.4.2 Το Λήμμα του Krylov

Παρακάτω θα δούμε την χρησιμότητα της παραπάνω θεωρίας στην απόδειξη ενός λήμματος του *N.V.Krylov* στο ([6]).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε $R > 0, f \in \mathcal{L}^{n+1}(B(0,R) \times [0,+\infty)), f \geq 0$ και $f = 0$ στο $\partial B(0,R)$. Σύμφωνα με τα ([1]) και ([3]), μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων $\{f_k\}$ (η λεγόμενη ομαλοποιητική ακολουθία της f), όπου ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} f_k &\in C^\infty(B \times [0,+\infty)) \\ f_k &\leq f_{k+1} \\ \lim_k \int f_k^{n+1} dm &= \int f^{n+1} dm \end{aligned}$$

και $f_k = 0$ έξω από το $B(0,R_k) \times [0,\tau_k)$, για κάποια ακολουθία $\{R_k\}$ και κάποιο $\tau_k < +\infty$.

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα 2.3.3 για κάθε k υπάρχει $z_k \in \mathbb{K}(B(0,R) \times (0,\tau_k)) \cap C(\overline{B}(0,R) \times [0,\tau_k]))$ τέτοια ώστε:

$$Tz_k = f_k^{n+1} \; \sigma\tau o \; B(0,R) \times (0,\tau_k) \tag{2.25}$$

και $z_k = 0$ στο παραβολικό σύνορο του $B(0,R) \times (0,\tau)$.

Επιπλέον σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο (2.4.1), έχουμε ότι ισχύει:

$$|z_k(u)| \leq N \cdot \|f\|_{n+1} \forall u \in B(0,R) \times (0,\tau_k) \tag{2.26}$$

όπου το N εξαρτάται από το R και την διάμετρο n. Επίσης από το λήμμα 2.3.2 έχουμε ότι:

$$z_{k+1} \leq z_k \tag{2.27}$$

Ακόμα από την πρόταση 2.2.5 του παρόντος κεφαλαίου προκύπτει, με την έννοια των κατανομών πάντα, ότι

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} + b \frac{\partial z_k}{\partial t} \geq (n+1) f_k \tag{2.28}$$

για κάθε πραγματικό, μη-αρνητικό $n \times n$ συμμετρικό πίνακα $[a_{ij}]$ και κάθε πραγματικό θετικό αριθμό $b > 0$ τέτοιο ώστε $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$.

Οι προηγούμενες 3 ανισότητες (2.26-2.28) μας δίνουν για $z = \lim_k z_k$ τα εξής, που στην ουσία είναι το λήμμα του *Krylov*:

$z(\cdot,t)$ είναι κυρτή στο $B(0,R)$ $\forall t \geq 0$

$z(x,\cdot)$ είναι αύξουσα στο $[0,+\infty)$ $\forall x \in B(0,R)$

$z \leq 0$ στο $B(0,R) \times [0,+\infty)$

$\|z\| \leq N \cdot \|f\|_{n+1}$

$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + b \frac{\partial z}{\partial t} \geq (n+1) f$ (*)

για κάθε πραγματικό, μη-αρνητικό $n \times n$ συμμετρικό πίνακα $[a_{ij}]$ και κάθε πραγματικό θετικό αριθμό $b > 0$ τέτοιο ώστε $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$.

Παρατήρηση

Στην γενική περίπτωση τώρα κατά την οποία έχουμε έναν τυχαίο μη-αρνητικό και συμμετρικό $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ και έναν πραγματικό θετικό αριθμό $b > 0$ τέτοιο ώστε να μην ισχύει απαραίτητα $b \cdot det[a_{ij}] \geq 1$ (όπως και στην εκφώνηση του εν λόγω λήμματος), τότε με το μετασχηματισμό $a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{(b \cdot det(a_{ij}))^{\frac{1}{n}}}$ έχουμε ότι ο $[a'_{ij}]$ ικανοποιεί την παραπάνω απαίτηση και επομένως αντί για την (*) θα έχουμε, με την έννοια των κατανομών, την:

$$\sum a_{ij} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + b' \frac{\partial z}{\partial t} \geq (n+1) \cdot (b \cdot det(a_{ij}))^{\frac{1}{n}} f \tag{2.29}$$

όπου $b' = b \cdot (b \cdot det(a_{ij}))^{\frac{1}{n}}$

Πόρισμα 1

Για τη z που κατασκευάστηκε προηγουμένως ισχύει:

$$\sup_t |z(x+h,t) - z(x,t)| \leq |h| N \cdot \|f\|_{n+1} \tag{2.30}$$

$\forall x \in B(0,R), x+h \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $x+h \in B(0,R)$.

Απόδειξη

Είναι προφανής από την τελευταία σχέση (2.24) της προηγούμενης παραγράφου .

Q.E.D.

Παρατήρηση

Επειδή η z είναι κυρτή θα είναι και μία φορά σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Το προηγούμενο πόρισμα επομένως μας δίνει στην ουσία ένα φράγμα για την πρώτη παράγωγο της z ως προς x όπου αυτή υπάρχει.

Κεφάλαιο 3

Η Γενικευμένη Ito formula

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αποδεικνύεται η γενικευμένη *Ito formula*. Στην παράγραφο 3.2 μετά από κάποιους ορισμούς, παρατίθεται η *Ito formula* για συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες με την κλασική έννοια, χωρίς απόδειξη μιας και αυτή μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στο ([16]). Στην 3.3 αναφέρονται σύντομα κάποια στοιχεία από τους χώρους Sobolev, απαραίτητα για τη συνέχεια. Στην 3.4 αποδεικνύεται λεπτομερειακά η γενικευμένη *Ito formula*. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δει την ομοιότητα της γενικευμένης *Ito formula* με την κλασική *Ito formula*.

3.2 Η Ito formula για παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$ εφοδιασμένο με μία διύλιση $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ για την οποία ισχύει ότι $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$ όπου:

$\mathcal{N} = \{\Lambda\subset\Omega$: $\exists N \in \mathcal{F}$ με $\Lambda\subset N$ και $P(N)=0\}$. Επίσης $\{B_t,t \geq 0\}$είναι μία $\mathcal{F}_t$ μονοδιάστατη κίνηση *Brown* ορισμένη στον $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Ορισμός 1

Για αριθμούς $a < b$ στο $[0,\infty)$ λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $f : [a,b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $L(a,b)$ όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

1. Η f είναι $B_{[a,b]} \otimes \mathcal{F}$-μετρήσιμη
2. Για κάθε $t \in [a,b]$ η τυχαία μεταβλητή $f(t,\cdot)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη
3. $\int_a^b E[f^2(t,\cdot)]dt < \infty$

Ορισμός 2

Για αριθμό $T > 0$ λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $f : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $P(0,T)$ όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

1. Η f είναι $B_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}$-μετρήσιμη
2. Για κάθε $t \in [0,T]$ η τυχαία μεταβλητή $f(t,\cdot)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη
3. $P(\int_0^T [f^2(t)]dt < \infty) = 1$

Ορισμός 3

Λέμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $f : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση L ή P όταν και μόνο όταν $f \in L(0,T)$ ή $f \in P(0,T)$ αντίστοιχα $\forall T > 0$.

Από εδώ και στο εξής (εκτός και αν τονίζεται διαφορετικά) η $\{B_t,t \geq 0\}$ θα είναι μία m -διάστατη $(m \in \mathbb{N})$ $\mathcal{F}_t$-κίνηση *Brown* ορισμένη στον $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Ορισμός 4

Έστω $T > 0$. Με το σύμβολο $L^{n\times m}(0,T)$ (αντίστοιχα $P^{n\times m}(0,T)$) θα εννοούμε την κλάση των $n \times m$ πινάκων της μορφής $f = [f_{ij}]$ όπου για κάθε $i \in \{1,\cdots,n\}, j \in \{1,\cdots,m\}$ το στοιχείο $f_{ij} : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι στοχαστική ανέλιξη που ανήκει στην κλάση $L(0,T)$ (αντίστοιχα $P(0,T)$).

Ορισμός 5

Στοχαστική ανέλιξη *Ito* στο [0,T) με τιμές στο $\mathbb{R}^n$, ονομάζεται μία συνεχής στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in [0,T)\}$ για την οποία ισχύει: $\forall t \in [0,T)$

$$X_t = x + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s \quad P-\sigma.\pi. \tag{3.1}$$

όπου $x = (x_1, ..., x_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathcal{F}_0$ -μετρήσιμο , $b \in P^{n\times m}(0,T)$ και η στοχαστική ανέλιξη $a(s) = (a_1(s), ..., a_n(s))$, $s \geq 0$ είναι $\mathbf{B}_{[0,T)} \otimes \mathcal{F}$ -μετρήσιμη, $\mathcal{F}_s$ -προσαρμοσμένη και ικανοποιεί την απαίτηση:

$$P(\sum_{j=1}^n \int_0^r |a_j(s)|ds < \infty) = 1\, \forall r \leq T$$

Παρατήρηση :

Προφανώς μια m -διάστατη κίνηση *Brown* $\{B_t,\ t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη *Ito* με α=O και $b = I$. Επίσης όπου στη συνέχεια αναφερόμαστε στη στοχαστική ανέλιξη X_t, θα εννοούμε την προηγούμενη, εκτός βέβαια και αν τονίζεται διαφορετικά.

Παρουσιάζουμε τώρα, χωρίς απόδειξη (η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο ([16])) την *Ito formula* στην περίπτωση όπου η συνάρτηση $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ και η B_t είναι μονοδιάστατη.

Πρόταση 6: Έστω

$$X_t = x + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s \quad P-\sigma.\pi.$$

μια στοχαστική ανέλιξη *Ito* και $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Τότε για όλα τα $t > 0$ και για $m = n = 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0,x) + \int_0^t [\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + a(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \cdot b^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)]ds \\ &+ \int_0^t b(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dB_s \quad P-\sigma.\pi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η *Ito formula* ισχύει και για περισσότερες της μίας διάστασης και έχει ως εξής:

Πρόταση 7: Έστω

$$X_t = x + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s \quad P-\sigma.\pi.$$

μια στοχαστική ανέλιξη *Ito* με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ όπου $a(s) = (a_1(s), ..., a_n(s))$ και $b(s) = [b_{ij}(s)]$ με $i = 1, .., n, j = 1, ...m$ και $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Τότε για όλα τα $t > 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,x) + \int_0^t [\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \sum_{i=1}^n a_i(s)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s) \\ &+ \frac{1}{2}\cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n b_{ij}(s)b_{kj}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s,X_s)]ds \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_0^t \sum_{i=1}^n b_{ij}(s)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)dB_s^j \quad P-\sigma.\pi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

<u>Παρατήρηση :</u>

Με τις κατάλληλες συμπτύξεις η παραπάνω $formula$ γράφεται

$$f(t,X_t) = f(0,x) + \int_0^t L^s f(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s)\cdot b(s)dB_s \quad P-\sigma.\pi. \tag{3.4}$$

όπου

$$L^s f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(s)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^m\sum_{i,k=1}^n b_{ij}(s)b_{kj}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k} \tag{3.5}$$

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}). \tag{3.6}$$

Επίσης θέτουμε για ευκολία στο συμβολισμό:

$$L_1^s f = \sum_{i=1}^n a_i(s)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^m\sum_{i,k=1}^n b_{ij}(s)b_{kj}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k} \tag{3.7}$$

<u>Πρόταση 8:</u>

Έστω ότι έχουμε μια $f \in L^{n\times m}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $Y_t = \int_0^t f(s)dB_s$ είναι ένα $\mathcal{F}_t - martingale$ και επιπλέον ισχύει για $0 \le r \le t$ ότι (δες [16]):

$$E\{\int_r^t f(s)dB_s|\mathcal{F}_r\} = 0 \quad P-\sigma.\pi. \tag{3.8}$$

Τέλος η συμπεριφορά της Ito formula για χρόνους διακοπής δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 9:

Έστω ότι έχουμε τη στοχαστική ανέλιξη του ορισμού 5 (με $b \in P^{n\times m}$), υποθέτουμε ότι $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά υποσύνολα με $\overline{U} \subset V$ και θέτουμε $\tau = inf\{t \geq 0 : X_t \in U^c\}$ με $inf\emptyset = \infty$. Υποθέτουμε ακόμα ότι $x \in U, f \in C^2(V)$. Τότε ισχύει:

$$f(X_{t\wedge\tau}) = f(x) + \int_0^{t\wedge\tau} L_1^s f(s, X_s)ds + \int_0^t \nabla f(X_{s\wedge\tau}) \cdot b(s) I_{\tau\geq s} dB_s \quad P - \sigma.\pi. \tag{3.9}$$

Αν μάλιστα $b \in L^{n\times m}$ και η ∇f είναι φραγμένη στο $\overline{U}$ τότε ισχύει

$$Ef(X_{t\wedge\tau}) = f(x) + E\int_0^{t\wedge\tau} L_1^s f(s, X_s)ds \tag{3.10}$$

3.3 Στοιχεία χώρων *Sobolev*

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε σύντομα στοιχεία από τους χώρους *Sobolev* καθώς και ένα κεντρικό θεώρημα της όμορφης αυτής θεωρίας: το θεώρημα εγκλεισμού, του οποίου η χρησιμότητα είναι κεντρικής σημασίας για τη συνέχεια.

Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και έστω $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Ορισμός 1:Ο χώρος $Sobolev W_p^1(V)$

Ο χώρος *Sobolev* $W_p^1(V)$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} W_p^1(V) &= \{u \in \mathcal{L}^p(V) \mid \exists g_1, ..., g_n \in \mathcal{L}^p(V) : \\ &\int_V u \frac{\partial h}{\partial x_i} = -\int_V g_i h \; \forall h \in \mathbb{C}_c^\infty(V), i = 1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

Παρατήρηση :Για $u \in W_p^1(V)$ γράφουμε $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. Το σύνολο W_p^1 εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|u\|_{W_p^1} = \|u\|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{\mathcal{L}^p}$$

αποτελεί χώρο Banach.

Τέλος ορίζουμε τον $W_p^m(V)$. Προς τούτο έχουμε:

Ορισμός 2: Ο χώρος $Sobolev W_p^m(V)$

Ο χώρος *Sobolev* $W_p^m(V)$ ορίζεται ως εξής [1]:

$$\begin{aligned} W_p^m(V) &= \{u \in \mathcal{L}^p(V) \mid \forall a \; \mu\varepsilon \; |a| \leq m \exists g_a \in \mathcal{L}^p(V) : \\ &\int_V u D^a h = (-1)^{|a|} \int_V g_a h \; \forall h \in \mathbb{C}_c^\infty(V)\} \end{aligned}$$

Παρατήρηση :Για $u \in W_p^m(V)$ γράφουμε $D^a u = g_a$. Ο χώρος W_p^m εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W_p^m} = \sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a u\|_{\mathcal{L}^p}$$

αποτελεί χώρο Banach.

[1]ένας πολυδείκτης α είναι μία ακολουθία $a = (a_1, ..., a_n)$ όπου $a_i \in \mathbb{N}$ και και $D^a u = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$

Παρουσιάζουμε τώρα ένα από τα θεωρήματα εγκλεισμού των χώρων *Sobolev* μεγίστης σημασίας για τη συνέχεια. Η απόδειξη του μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε καλό βιβλίο συναρτησιακής ανάλυσης (ενδεικτικά αναφέρουμε το [1]).

<u>ΘΕΏΡΗΜΑ 3 (Θεώρημα Εγκλεισμού)</u>
Έστω $m \geq 1$ ένας ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$. Αν $m - n/p > 0$ τότε ισχύει:

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$$

όπου $k = [m - n/p]$, με συνεχείς ενσφηνώσεις.

Δηλαδή στην ουσία αν μια συνάρτηση u ανήκει στον χώρο $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ τότε υπό κατάλληλες συνθήκες έχει ένα συνεχή αντιπρόσωπο με συνεχείς παραγώγους μέχρι κ-τάξης, δηλαδή υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους μέχρι κ-τάξης v που ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας της u για τη σχέση $u \sim v$ αν $u = v$ σχεδόν παντού. Από εδώ και πέρα όταν θα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα εγκλεισμού, θα αντικαθιστούμε συστηματικά την u με το συνεχή αντιπρόσωπο της. Για να μην βαρύνουμε το συμβολισμό, θα σημειώνουμε επίσης με u το συνεχή αντιπρόσωπο της u.

3.4 Η γενικευμένη Ito formula

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα με στόχο την απόδειξη της γενικευμένης *Ito formula*, όταν δηλαδή οι συναρτήσεις μας ανήκουν σε κάποιο χώρο Sobolev. Για να γίνει όμως αυτό χρειαζόμαστε μια ανισότητα , η οποία οφείλεται στον Krylov ([4]) και ([6]) και ονομάζεται ανισότητα Krylov.

Σε όλη την παράγραφο θα θεωρούμε δύο ακεραίους m, n, $(\Omega,\mathcal{F},P,B_t,\mathcal{F}_t)$ μια m-διάστατη κίνηση Brown, $b_t(\omega)$ έναν $n \times m$ πίνακα και $a_t(\omega)$ ένα n-διάστασης διάνυσμα. Υποθέτουμε επίσης ότι οι a_t, b_t είναι προοδευτικά μετρήσιμες για τη διύλιση $\mathcal{F}_t$, ότι έχουμε $\lambda > 0, p \geq n$ δύο αριθμούς και μια n-διάστατη στοχαστική ανέλιξη *Ito*

$$X_t = x + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s \quad P - \sigma.\pi. \tag{3.11}$$

τέτοια ώστε αν $h_t = \frac{1}{2} b_t b_t^\tau$ να υπάρχουν αριθμοί $K_1, K_2 < \infty, d > 0$ έτσι ώστε $\forall t \geq 0, \omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n$ να ισχύουν:

- $|a_t| \leq K_1$.
- $\sum_{i=1}^n h_t^{ii}(\omega) \leq K_2$.
- $(h_t y, y) \geq d|y|^2$.

Λήμμα 1

Με τους άνω συμβολισμούς και υποθέσεις και για κάποιον αριθμό $0 \leq r \leq t$ υπάρχει σταθερά N εξαρτώμενη μόνο από τα K_1, λ τέτοια ώστε να ισχύει P-σχεδόν βεβαίως:

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |a_u| du | \mathcal{F}_r\} \leq N \tag{3.12}$$

Απόδειξη

Έχουμε τα εξής

$$I \equiv E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |a_u| du | \mathcal{F}_r\} \leq K_1 \cdot E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} du | \mathcal{F}_r\}$$

Όμως αφού

$$\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} du = [-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda(u-r)}]_r^t = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda(t-r)} + \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$$

προφανώς θα ισχύει ότι

$$I \leq K_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \equiv N$$

κάτι που αποδεικνύει και το λήμμα μας.

Q.E.D.

Θεώρημα 2

Με τους άνω συμβολισμούς και υποθέσεις και για κάποιον αριθμό $0 \leq r \leq t$ υπάρχει σταθερά N εξαρτώμενη μόνο από τα K_1, λ, d, n τέτοια ώστε για κάθε Borel ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(t,x)$ στο $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ να ισχύει P-σχεδόν βεβαίως:

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)}|f(u-r, X_u)|du|\mathcal{F}_r\} \quad \leq \quad N\|f\|_{n+1} \tag{3.13}$$

Απόδειξη

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι αρκεί να το αποδείξουμε για φραγμένες, συνεχείς και μη αρνητικές συναρτήσεις $f(t,x)$. Θεωρούμε τυχαία ένα φραγμένο $A = [r,t] \subset [0,\infty)$ και ένα τυχαίο θετικό αριθμό $R > 0$.

Χρησιμοποιούμε τώρα την παράγραφο 2.4.2 για την g, όπου $g(y,x) = f(y,x), y \in A, x \in B(0,R)$ και $g = 0$ οπουδήποτε αλλού και βρίσκουμε μία κατάλληλη συνάρτηση $z \in \mathbb{K}(B(0,R) \times [0,\infty))$.

Θεωρούμε επίσης μια μη-αρνητική, διαφορίσιμη, φθίνουσα συνάρτηση q, ορισμένη στο $[0,+\infty)$, ίση με κάποια σταθερά κοντά στο μηδέν, μηδέν εκτός του $[0,1]$, τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} q(|x|)dx = 1$ και ορίζουμε μια ακολουθία ομαλοποιητικών πυρήνων (για περισσότερα δες [1] και [9])

$$w_m(x,t) = m^{n+1}q(m|x|)q(m|t|), (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Σύμφωνα τώρα με γνωστά αποτελέσματα (δες [1] και [9]) η ακολουθία $\{z_m\}$ όπου $z_m = z * w_m$ είναι επαρκώς συνεχώς διαφορίσιμη και διατηρεί όλες τις καλές ιδιότητες της z, αφού $z * w_m \to z$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset B(0,R)$ και $I \subset [0,+\infty)$.

Εφαρμόζουμε επομένως την κλασική Ito formula στη συνάρτηση $e^{-\lambda(t-r)}z_m(t-r, X_t)$ και με στοχαστική ανέλιξη την $\{t-r, X_t\}$ θα έχουμε μετά από απλές πράξεις P-σβ.:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(t-r)}z_m(t-r, X_t) &= z_m(0, X_r) + \int_r^t [\frac{\partial z_m(u-r, X_u)}{\partial u} \\ &- \lambda \cdot z_m(u-r, X_u) + L_1 z_m(u-r, X_u)]e^{-\lambda(u-r)}du \\ &+ \int_r^t e^{-\lambda(u-r)}[\nabla z_m(u-r, X_u) \cdot b_u dB_u \end{aligned}$$

Όμως από 2.4.2 οι πρώτες παράγωγοι της z_m είναι φραγμένες και αφού $\sum_{i=1}^n h_t^{ii}(\omega) \leq K_2$ έπεται από την πρόταση 3.2.8 και μετά από απλές πράξεις ότι P-σχεδόν βεβαίως ισχύει:

$$-z_m(0, X_r) \;=\; E\{\int_r^t [\frac{\partial z_m(u-r, X_u)}{\partial u}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \lambda \cdot z_m(u-r, X_u) + L_1 z_m(u-r, X_u)]e^{-\lambda(u-r)}du \\
&- \quad e^{-\lambda(t-r)} z_m(t-r, X_t)|\mathcal{F}_r\}
\end{aligned}
$$

Πάλι τώρα λόγω της 2.4.2 και γνωστών ιδιοτήτων του διαφορικού συναρτήσεων θα έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z_m}{\partial u} + L_1 z_m &= [\frac{\partial z_m}{\partial u} + \sum_{i,j=1}^{n} h_u^{ij} \frac{\partial^2 z_m}{\partial x_i \partial x_j}] + \sum_{i=1}^{n} a_u^i \cdot \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \\
&\geq (n+1) \cdot (\det h_u)^{\frac{1}{n}} \cdot g_m - N|a_u| \|g_m\|_{n+1} \\
&\geq (n+1) \cdot d^{\frac{n}{n}} \cdot g_m - N|a_u| \|g_m\|_{n+1}
\end{aligned}
$$

όπου $g_m = g * w_m$. Λαμβάνοντας τώρα υπ΄ όψιν ότι $z_m \leq 0$, έχουμε P-σβ.:

$$
\begin{aligned}
-z_m(0, X_r) &\geq E\{\int_r^t [(n+1) \cdot d \cdot g_m(u-r, X_u) \\
&- \quad N|a_u| \|g_m\|_{n+1}]e^{-\lambda(u-r)}du|\mathcal{F}_r\}
\end{aligned}
$$

Ξανά τώρα λόγω της 2.4.2 θα έχουμε ότι $|z_m| \leq \sup_{t,x} z_m \leq N\|g_m\|_{n+1}$ και συνεπώς προκύπτει ότι:

$$
N\|g_m\|_{n+1}(1+E\{\int_r^t |a_u|e^{-\lambda(u-r)}du|\mathcal{F}_r\}) \geq E\{\int_r^t (n+1) \cdot d \cdot g_m(u-r, X_u)e^{-\lambda(u-r)}du|\mathcal{F}_r\} \tag{3.14}
$$

Όμως $g \in \mathcal{L}^{n+1}$ και άρα σύμφωνα με γνωστά αποτελέσματα της συναρτησιακής ανάλυσης $\|g - g_m\|_{n+1} \to 0$ καθώς $m \to \infty$. Συνεπώς αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque θα έχουμε

$$
N\|g\|_{n+1}(1+E\{\int_r^t |a_u|e^{-\lambda(u-r)}du|\mathcal{F}_r\}) \geq E\{\int_r^t (n+1) \cdot d \cdot g(u-r, X_u)e^{-\lambda(u-r)}du|\mathcal{F}_r\} \tag{3.15}
$$

όπου $(u-r) \in [r, t]$ και $X_u \in B(0, R)$. Επομένως η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(u-r, X_u)$, $g(u-r, X_u) = f(u-r, X_u)$ και φυσικά $\|g\|_{n+1} \leq \|f\|_{n+1}$.

Επίσης από το λήμμα 1 (σχέση 3.12) προκύπτει ότι P-σβ.:

$$
E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |a_u|du|\mathcal{F}_r\} \leq N_1
$$

και άρα έχουμε P-σβ. ότι:

$$
N_2\|f\|_{n+1} \geq E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot f(u-r, X_u) \cdot d(n+1)du|\mathcal{F}_r\} \tag{3.16}
$$

κάτι που βέβαια αποδεικνύει το θεωρημά μας αν θεωρήσουμε
$N = N_2 \cdot \frac{1}{(n+1)d}$.

Q.E.D.

Θεώρημα 3 (ανισότητες Krylov)

Με τους άνω συμβολισμούς και υποθέσεις και για κάποιον αριθμό $0 \le r \le t$ υπάρχουν σταθερές N_1, N_2 εξαρτώμενες μόνο από τα $K_1, K_2, \lambda, d, n, p$ τέτοιες ώστε για κάθε Borel ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f(t,x), g(x)$ στα $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα, να ισχύει P-σχεδόν βεβαίως:

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} |f(u-r, X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \le N_1 \|f\|_{p+1} \tag{3.17}$$

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} |g(X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \le N_2 \|g\|_p \tag{3.18}$$

όπου βέβαια οι νόρμες $\|g\|_p$ και $\|f\|_{p+1}$ είναι ορισμένες στα $\mathbb{R}^n$ και $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι αρκεί να το αποδείξουμε μόνο στην περίπτωση όπου $p = n$, αφού για $p > n$ η ανισότητα Holder [2] μας δίνει:

$$\begin{aligned} E & \{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |g(X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \\ \le & (E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |g(X_u)|^{p/n} du | \mathcal{F}_r\})^{n/p} \cdot (E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} du | \mathcal{F}_r\})^{1-n/p} \end{aligned}$$

Τότε όμως $\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} du = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-r)} \le \frac{1}{\lambda}$ και αν αποδείξουμε την ανισότητα για $p = n$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E & \{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |g(X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \\ \le & (\frac{1}{\lambda})^{1-n/p} [N \|g^{p/n}\|_n]^{n/p} = (\frac{1}{\lambda})^{1-n/p} N^{n/p} \|g\|_p \le \frac{N+1}{\lambda^{1-n/p}} \|g\|_p \end{aligned}$$

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για την $f(t,x)$ όπου βέβαια η αντίστοιχη ανισότητα έχει αποδειχθεί για $p = n$ στο θεώρημα 2. Συνεπώς μένει να αποδείξουμε ότι $P - \sigma.\pi.$ ισχύει:

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |g(X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \le N \|g\|_n \tag{3.19}$$

[2] δηλαδή αν για $1 \le p \le \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ τότε $\int |fg| \le \|f\|_p \|g\|_q$

Μπορούμε όπως και στην προηγούμενη απόδειξη να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η g είναι μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση και αφού επιπλέον ισχύει ([7]):

$$\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} g(X_u) du \leq N \int_r^t e^{-\lambda(u-r)} du \leq \frac{N}{\lambda} \tag{3.20}$$

μπορούμε να πούμε ότι έχει νόημα ο ορισμός:

$$v_1 = \sup_{r \geq 0} ess \sup_{\omega} E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} g(X_u) du | \mathcal{F}_r\}$$

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση $v_1 > 0$ διότι αν $v_1 = 0$, η απόδειξη είναι προφανής. Τότε προφανώς υπάρχει κάποια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει $v_1 > c > 0$.

Χρησιμοποιώντας τώρα παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε για οποιουσδήποτε αριθμούς t_1, t_2 και οποιεσδήποτε μη αρνητικές συναρτήσεις $w(t), r(t)$ οτι,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} w(t) exp\{-\int_{t_1}^{t} r(u) du\} dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} exp\{-\int_{t_1}^{t} r(u) du\} r(t) (\int_t^{t_2} w(u) du) dt \end{aligned}$$

Έτσι για $u \geq r, A \in \mathcal{F}_r$, $w_t = g(X_t)$ και $r_t = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E &\{I_A \int_r^t e^{-\lambda(u-r)} w_u du\} \\ = & E\{I_A \int_r^t w_u exp\{-\lambda(u-r) - \int_r^u r_v dv\} du\} \\ + & E\{I_A \int_r^t exp\{-\int_r^u r_v dv - \lambda(u-r)\} r_u (\int_u^t e^{-\lambda(v-u)} w_v dv) du\} \end{aligned}$$

Όμως για τον τελευταίο όρο έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} & E\{I_A \int_r^t exp\{-\int_r^u r_v dv - \lambda(u-r)\} r_u (\int_u^t e^{-\lambda(v-u)} w_v dv) du\} \\ = & \int_r^t [E\{I_A \exp\{-\int_r^u r_v dv - \lambda(u-r)\} r_u (\int_u^t e^{-\lambda(v-u)} w_v dv)\}] du \\ = & \int_r^t [E\{I_A \exp\{-\int_r^u r_v dv - \lambda(u-r)\} r_u E(\int_u^t e^{-\lambda(v-u)} w_v dv | \mathcal{F}_u)\}] du \\ \leq & \int_r^t [E\{I_A \exp\{-\int_r^u r_v dv - \lambda(u-r)\} r_u v_1\}] du \end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} J &= E\{I_A \int_r^t exp\{-\lambda(u-r)\}w_u du\} \\ &\leq E\{I_A \int_r^t g(X_u) exp\{-\lambda(u-r)-u+r\}du\} \\ &+ \int_r^t [E\{I_A \exp\{-(\lambda+1)(u-r)\}v_1\}]du \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος, για το J_2 δηλαδή, παρατηρούμε ότι:

$$\int_r^t e^{-(\lambda+1)(u-r)}du = [-\frac{1}{(\lambda+1)} \cdot e^{-(\lambda+1)(u-r)}]_r^t = -\frac{1}{(\lambda+1)} \cdot e^{-\lambda(t-r)} + \frac{1}{(\lambda+1)} \leq \frac{1}{\lambda+1}$$

και συνεπώς καταλήγουμε στο ότι:

$$J_2 \leq v_1 \cdot \frac{P(A)}{\lambda+1} \leq v_1 \cdot \frac{1}{\lambda+1}$$

Για τον πρώτο παράγοντα τώρα J_1 έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} J_1 &= E\{I_A \int_r^t g(X_u) exp\{-\lambda(u-r)-u+r\}du\} \\ &\leq E\{I_A \int_r^t exp\{-\lambda(u-r)\} exp\{-(u-r)\} g(X_u)^{\frac{n}{n+1}} g(X_u)^{\frac{1}{n+1}} du\} \\ &= E\{I_A \int_r^t exp\{-\lambda(u-r)\} f(u-r, X_u) g(X_u)^{\frac{1}{n+1}} du\} \\ &= v_1^{\frac{1}{n+1}} E\{I_A \int_r^t exp\{-\lambda(u-r)\} f(u-r, X_u) g(X_u)^{\frac{1}{n+1}} v_1^{\frac{-1}{n+1}} du\} \\ &\leq v_1^{\frac{1}{n+1}} K_5 E\{I_A \int_r^t exp\{-\lambda(u-r)\} f(u-r, X_u) du\} \end{aligned}$$

όπου βέβαια $f(u,x) = e^{-u} g^{\frac{n}{n+1}}(x)$ και αφού $g^{\frac{1}{n+1}} \leq K_3$ ως φραγμένη και $(\frac{1}{v_1})^{\frac{1}{n+1}} \leq (\frac{1}{c})^{\frac{1}{n+1}} = K_4$ θέτοντας $K_5 = K_3 K_4$, έχουμε το παραπάνω.

Συνεπώς από το πρώτο μέρος του θεωρήματος (σχέση 3.17) έχουμε σχεδόν βεβαίως

$$\begin{aligned} J_1 &\leq v_1^{\frac{1}{n+1}} K_5 E\{I_A \int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot f(u-r, X_u) du\} \\ &\leq v_1^{\frac{1}{n+1}} K_5 N_1 \|g\|_n^{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

Όμως αφού $v_1 \leq K_5 N_1 \|g\|_n^{\frac{n}{n+1}} v_1^{\frac{1}{n+1}} + v_1 \cdot \frac{1}{\lambda+1}$ θα έχουμε ότι $v_1 \leq K_6 \|g\|_n$, όπου βέβαια $K_6 = (K_5 N_1 \frac{\lambda+1}{\lambda})^{\frac{n+1}{n}}$

και συνεπώς αποδεικνύοντας το θεώρημα θα έχουμε P-σχεδόν βεβαίως:

$$E\{\int_r^t e^{-\lambda(u-r)} \cdot |g(X_u)| du | \mathcal{F}_r\} \leq N_2 \|g\|_n \tag{3.21}$$

όπου βέβαια η $N_2 = K_6$ εξαρτάται μόνο από τα n, λ, d, K_1, K_2 και οι σταθερές K_i προκύπτουν ανάλογα κάθε φορά.

Q.E.D.

Πόρισμα 4

Με τις άνωθεν υποθέσεις και για τυχόν $T > 0$ έχουμε ότι για κάθε $t \in [0, T], \omega \in \Omega$ υπάρχουν σταθερές N_1, N_2 εξαρτώμενες μόνο από τα $K_1, K_2, d, \lambda, n, p, T$ έτσι ώστε για κάθε Borel ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f(t, x), g(x)$ στα $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα, να ισχύει P-σχεδόν βεβαίως:

$$E\{\int_0^t |f(r, X_r)| dr\} \leq N_1 \|f\|_{p+1} \tag{3.22}$$

$$E\{\int_0^t |g(X_r)| dr\} \leq N_2 \|g\|_p \tag{3.23}$$

όπου βέβαια οι νόρμες $\|g\|_p$ και $\|f\|_{p+1}$ είναι ορισμένες στα $\mathbb{R}^n$ και $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα και βέβαια $p \geq n$.

Απόδειξη

Παίρνοντας μέσες τιμές στο προηγούμενο θεώρημα, θέτοντας $r = 0$ και αφού για κάθε $t \in [0, T]$ ισχύει $e^{-T} \leq e^{-t}$ παίρνουμε ότι θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} E\{\int_0^t |f(r, X_r)| dr\} &\leq N_1 e^T \|f\|_{p+1} \\ E\{\int_0^t |g(X_r)| dr\} &\leq N_2 e^T \|g\|_p \end{aligned}$$

και άρα αν πάρουμε τώρα ως N_i τα $N_i e^T$ έχουμε το ζητούμενο για κάθε $t \in [0, T]$.

Q.E.D.

Στη συνέχεια αναφέρουμε και αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα, το οποίο στην ουσία είναι η Ito formula για μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις με την κλασική έννοια και πιο συγκεκριμένα για συναρτήσεις που ανήκουν σε κάποιο χώρο Sobolev.

Θεώρημα 5

Έστω ότι υπάρχουν σταθερές $K, d > 0$ τέτοιες ώστε

1. $|a_t(\omega)| + \|b_t(\omega)\| \le K$
2. $(h_t y, y) \ge d|y|^2 \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Τότε για κάθε $g \in W_p^2(\mathbb{R}^n), f \in W_{p+1}^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n), t \ge 0, p \ge n, \lambda > 0$ θα ισχύουν τα ακόλουθα σχεδόν βεβαίως:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} f(t, X_t) &= f(0,x) + \int_0^t e^{-\lambda r}[L^r - \lambda] f(r, X_r) dr \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla f(r, X_r) \cdot b_r dB_r \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} g(X_t) &= g(x) + \int_0^t e^{-\lambda r}[L_1^r - \lambda] g(X_r) dr \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla g(X_r) \cdot b_r dB_r \end{aligned} \tag{3.25}$$

όπου

$$\begin{aligned} L^r f &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(r) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n b_{ij}(r) b_{kj}(r) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \\ L_1^r g &= \sum_{i=1}^n a_i(r) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n b_{ij}(r) b_{kj}(r) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \end{aligned}$$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε αρχικά την πρώτη και ύστερα την δεύτερη σχέση. Αφού $f \in W_{p+1}^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ έπεται από το θεώρημα εγκλεισμού των χώρων Sobolev (θεώρημα 3.3.3), ότι $W_{p+1}^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \subset C^{i,j}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ όπου $i = [1 - n/p], j = [2 - n/p]$, πράγμα που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής (ή σωστότερα η f έχει συνεχή αντιπρόσωπο και τον οποίο χωρίς βλάβη της γενικότητας συμβολίζουμε πάλι με f), με γενικευμένες παραγώγους μέχρι και 1ης τάξης ως προς t και μέχρι και 2ης τάξης ως προς x. Επίσης πάλι λόγω εγκλεισμού και λόγω πυκνότητας θα υπάρχει ακολουθία $f_m \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$\|f - f_m\| \to 0, \|f - f_m\|_{W_{p+1}^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \to 0, \|\nabla f - \nabla f_m\|_{\mathcal{L}^{p+1}} \to 0.$

Να σημειώσουμε εδώ, ότι χρησιμοποιούμε το m για να δηλώσουμε την ακολουθία $\{f_m\}$ και αργότερα την $\{g_m\}$ χωρίς όμως να γίνεται σύγχυση με το m της διάστασης της κίνησης Brown.

Θεωρούμε έναν αριθμό $T > 0$ και για $t \in [0,T]$ αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι τα ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος της 1ης προς απόδειξη σχέσης έχουν νόημα. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
|[L^r - \lambda]f(r,X_r)| &= |(\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{n} a_i(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ij}(r)b_{kj}(r)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \\
&- \lambda)f(r,X_r)| \\
&\leq |\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial r}| + |\sum_{i=1}^{n} a_i(r)\cdot\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial x_i}| \\
&+ |\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ij}(r)b_{kj}(r)\frac{\partial^2 f(r,X_r)}{\partial x_i \partial x_k}| + |\lambda\cdot f(r,X_r)| \\
&\leq |\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial r}| + \sum_{i=1}^{n} |a_i(r)|\cdot|\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial x_i}| \\
&+ \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{i,k=1}^{n} |b_{ij}(r)b_{kj}(r)||\frac{\partial^2 f(r,X_r)}{\partial x_i \partial x_k}| + \lambda\cdot|f(r,X_r)| \\
&\leq N[|\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial r}| + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f(r,X_r)}{\partial x_i}| \\
&+ \cdot\sum_{i,k=1}^{n} |\frac{\partial^2 f(r,X_r)}{\partial x_i \partial x_k}| + |f(r,X_r)|]
\end{aligned}$$

όπου η σταθερά N εξαρτάται από τα K_1, K_2, n, λ. Επομένως από το πόρισμα 4 (σχέση 3.22) θα έχουμε

$$E\int_0^t |[L^r - \lambda]f(r,X_r)|dr \leq N\|f\|_{W^{1,2}_{p+1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \tag{3.26}$$

όμοια έχουμε επίσης:

$$\begin{aligned}
E|\int_0^t \nabla f(r,X_r)\cdot b_r dB_r|^2 &= E\int_0^t |\nabla f(r,X_r)\cdot b_r|^2 dr \\
&\leq M\cdot E\int_0^t |\nabla f(r,X_r)|^2 dr \\
&\leq M\cdot\||\nabla f|^2\|_{p+1} \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την κλασική Ito formula στην $f_m(t,X_t)\cdot e^{-\lambda t}$ με στοχαστική ανέλιξη την $\{t, X_t\}$ και έχουμε σχεδόν βεβαίως

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda t} f_m(t, X_t) &= f_m(0,x) + \int_0^t e^{-\lambda r}[L^r - \lambda] f_m(r, X_r) dr \\
&+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla f_m(r, X_r) \cdot b_r dB_r
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Επειδή όμως καθώς $m \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\|e^{-\lambda t} f(t, X_t) - e^{-\lambda t} f_m(t, X_t)\| &\to 0 \\
E\left|\int_0^t e^{-\lambda t}(\nabla f(r, X_r) - \nabla f_m(r, X_r)) \cdot b_r dB_r\right|^2 \leq M \| |\nabla(f - f_m)|^2 \|_{p+1} &\to 0 \\
E \int_0^t |[L^r - \lambda](f(r, X_r) - f_m(r, X_r))| dr \leq N \|f - f_m\|_{W^{1,2}_{p+1}} &\to 0
\end{aligned}
$$

έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι:

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda t} f(t, X_t) &= f(0,x) + \int_0^t e^{-\lambda r}[L^r - \lambda] f(r, X_r) dr \\
&+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla f(r, X_r) \cdot b_r dB_r
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Η πορεία τώρα για την απόδειξη της δεύτερης σχέσης ακολουθεί αυτήν της πρώτης με τις ακόλουθες αλλαγές:

Όπως και πριν υπάρχει μια ακολουθία $g_m \in C^2(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε να ισχύουν : $\|g - g_m\| \to 0, \|g - g_m\|_{W^2_p(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla g - \nabla g_m\|_{\mathcal{L}^p} \to 0$.

Για εντελώς παρόμοιους λόγους με την 1η εξίσωση τα ολοκληρώματα στο 2ο μέλος της 2ης εξίσωσης έχουν νόημα. Εφαρμόζουμε τώρα την Ito formula στην $g_m(X_t) \cdot e^{-\lambda t}$ με στοχαστική ανέλιξη την $\{X_t\}$ και έχουμε σχεδόν βεβαίως:

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda t} g_m(X_t) &= g_m(x) + \int_t^t e^{-\lambda r}[L_1^r - \lambda] g_m(X_r) dr \\
&+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla g_m(X_r) \cdot b_r dB_r
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

και εντελώς όμοια με πριν για $m \to \infty$ έχουμε τελικά:

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda t} g(X_t) &= g(x) + \int_0^t e^{-\lambda r}[L_1^r - \lambda] g(X_r) dr \\
&+ \int_0^t e^{-\lambda r} \nabla g(X_r) \cdot b_r dB_r
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Παρατηρούμε ότι οι αποδειχθείσες σχέσεις ισχύουν $\forall t > 0$ και όχι μόνο για $t \in [0, T]$ αφού αφενός το T επιλέχθηκε τυχαία και αφού αφετέρου οι 3.29 και 3.31 δεν εξαρτώνται από το T.

$Q.E.D.$

Σημειώνεται ότι η ομοιότητα της παραπάνω φόρμουλας με την αντίστοιχη για παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με την κλασική έννοια, είναι εμφανής.

Κεφάλαιο 4

ΜΔΕ με γενικευμένες παραγώγους και ΣΔΕ.

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επεκτείνουμε τα γνωστά αποτελέσματα στοχαστικής αναπαράστασης (δες [16]) της λύσης συνοριακών προβλημάτων ώστε να καλυφθεί η περίπτωση που η λύση αυτή είναι γενικευμένη με την έννοια των χώρων Sobolev. Είναι η γενικευμένη Ito formula που μας παρέχει τη δυνατότητα της επέκτασης αυτής. Πιο συγκεκριμένα μετά από κάποιους ορισμούς και συμβάσεις της παραγράφου 4.2 ακολουθεί η στοχαστική αναπαράσταση της γενικευμένης λύσης των προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων Dirichlet και Cauchy, στις παραγράφους 4.3 και 4.4 αντίστοιχα. Η στοχαστική αναπαράσταση της λύσης του δεύτερου προβλήματος, του Cauchy δηλαδή, είναι στην ουσία η Feynmann-Kac formula.

Η Feynmann-Kac formula προκύπτει από ένα πρόβλημα Cauchy, πράγμα το οποίο καθιστά περίτρανη απόδειξη για το πως προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων αλλά και πολλά άλλα μη γραμμικά προβλήματα, όπως οι δύσκολες Hamilton-Jacobi-Bellman εξισώσεις, μπορούν να αντιμετωπισθούν με στοχαστικές μεθόδους. Η ανάπτυξη ακολουθεί στην ουσία αυτή του ([16]) και ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερα προβλήματα τέτοιου είδους στο ([2]).

4.2 Ορισμοί και συμβάσεις

Με τον όρο στοχαστική διαφορική εξίσώση (ΣΔΕ) εννοούμε την αναζήτηση μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t, t \in [0,T]\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}^n$ η οποία μεταξύ άλλων ικανοποιεί μια σχέση της μορφής:

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, 0 \leq t \leq T \tag{4.1}$$

όπου $a = (a_1, \cdots, a_n)$ και $b = [b_{ij}], i = 1, ..., n, j = 1, ...m$ έχουν $a_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $b_{ij} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις, $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια m-διάστατη κίνηση Brown και το x είναι τυχαία μεταβλητή της μορφής $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Ορισμός 1

Έστω συναρτήσεις a, b όπως προηγουμένως. Δοθείσης μιας m-διάστατης κίνησης Brown $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, \mathcal{B}_t)$ και μιας τυχαίας μεταβλητής της μορφής $x = (x_1, \cdots, x_n)$ που είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη, ονομάζεται ισχυρή λύση της ΣΔΕ με αρχική συνθήκη x μια στοχαστική ανέλιξη $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

- Η X είναι συνεχής.
- Η X είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη (δηλαδή για κάθε t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη).
- $P(X_0 = x) = 1$.
- $P(\int_0^t (|a_i(s, X_s)| + |b_{ij}^2(s, X_s)|)ds < \infty) = 1 \; \forall t \in [0,T]$ για όλα τα $i = 1, ..., n$ και $j = 1, ..., m$.
- Ισχύει

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, 0 \leq t \leq T, \quad P - \sigma.\pi.$$

Ορισμός 2

Έστω συναρτήσεις a, b όπως προηγουμένως. Λέμε ότι ισχύει ισχυρή μοναδικότητα όταν δύο ισχυρές λύσεις X και Υ με αρχική συνθήκη x της ΣΔΕ είναι μη διακρινόμενες για οποιαδήποτε κίνηση Brown $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, \mathcal{B}_t)$ και για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $x = (x_1, \cdots, x_n)$ που είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη.

Ορισμός 3

Δύο στοχαστικές ανελίξεις $\{X_t, t \in [0,T]\}$ και $\{Y_t, t \in [0,T]\}$ λέγονται μη διακρινόμενες όταν υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$ τέτοιο ώστε $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \backslash N$ και για κάθε $t \in T$.

Η απόδειξη της επόμενης, χρήσιμης για τη συνέχεια, πρότασης μπορεί να βρεθεί στο ([16]).

Πρόταση 4

Έστω a, b Borel μετρήσιμες συναρτήσεις όπου $a = (a_1, \cdots, a_n)$ και $b = [b_{ij}], i = 1, ..., n, j = 1, ...m$ με $a_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $b_{ij} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Έστω επίσης ότι ικανοποιούν και τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $K_n > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_n |x - y|$$

,για όλα τα $t \geq 0, |x| \leq n, |y| \leq n$.

2. Υπάρχει σταθερά $R > 0$ τέτοια ώστε

$$|a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq R(1 + |x|^2)$$

, για όλα τα $t \geq 0, |x| \leq n, |y| \leq n$.

Αν επιπλέον $E|x|^{2r} < \infty$ για κάποιο $r > 1$ τότε υπάρχει λύση της Σ.Δ.Ε. 4.1 και για κάθε $T > 0$ υπάρχει σταθερά $N > 0$ εξαρτώμενη από τα R, T, r τέτοια ώστε να ισχύει

$$E\{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^{2r}\} \leq N(1 + E|x|^{2r})e^{Nt}, 0 \leq t \leq T \tag{4.2}$$

Κλείνουμε τέλος την εισαγωγική αυτή παράγραφο με την ακόλουθη σύμβαση:
Για να υποδείξουμε την εξάρτηση της λύσης μιας ΣΔΕ της μορφής

$$X_t = x + \int_r^t a(s, X_s)ds + \int_r^t b(s, X_s)dB_s, \ r \leq t$$

από την αρχική συνθήκη $X_r = x$, θα την γράφουμε $X^r(x,t), t \geq r$, δηλαδή

$$X^r(x,t) = x + \int_r^t a(s, X^r(x,s))ds + \int_r^t b(s, X^r(x,s))dB_s, \ r \leq t \tag{4.3}$$

4.3 Στοχαστική αναπαράσταση της γενικευμένης λύσης του συνοριακού προβλήματος Dirichlet

1.Το πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet είναι το πρόβλημα κατά το οποίο:

δίνονται D ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$,$p \geq n$ ένας αριθμός και συναρτήσεις $f, q, a_i, h_{i,j} \in C(\overline{D}), \phi \in C(\partial D), i,j = 1, \cdots, n$ με $q \geq 0$ και **ζητείται** συνάρτηση $v(x), x \in \overline{D}$ τέτοια ώστε

- $v \in C(\overline{D}) \cap W_p^2(D)$.
- $L_1 v - qv = -f$ στο D. [1]
- $v = \phi$ στο ∂D.

όπου L_1 είναι ο τελεστής:

$$L_1 v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι για τα δεδομένα $a_i, h_{ij}, i,j = 1, \cdots, n$ του παραπάνω προβλήματος ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

Συνθήκη A:

Οι συναρτήσεις $a_i, h_{ij}, i,j = 1, \cdots, n$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n$ και ικανοποιούν τις ακόλουθες απαιτήσεις

- για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $K_m > 0$ ώστε να ισχύει

  $$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x) - a_i(y)| \leq K_m |x - y|, \sum_{i,j=1}^{n} |h_{ij}(x) - h_{ij}(y)| \leq K_m |x - y|$$

  για όλα τα $|x|, |y| \leq m$.

- Υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) y_i y_j \geq d|y|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$.
- Υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |h_{ij}(x)|^2 \leq R(1 + |x|^2)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Για την απόδειξη του επόμενου λήμματος ο ενδιαφερόμενος μπορεί να αποταθεί στο ([3]).

Λήμμα 1 (Philips-Sarason,Freidlin)

Έστω Ε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $h(x) = [h_{ij}(x)], x \in E, n \times n$ -πινακοσυνάρτηση, θετικά ορισμένη $\forall x \in E$. Υποθέτουμε ακόμα ότι οι συναρτήσεις $h_{ij}(x), x \in E$ είναι *Lipshitz* στα συμπαγή υποσύνολα του Ε. Τότε υπάρχει $n \times n$-πινακοσυνάρτηση $b(x) = [b_{ij}(x)], x \in E$ με τις συναρτήσεις $b_{ij}(x), x \in E$ να είναι *Lipshitz* στα συμπαγή υποσύνολα του Ε και $bb^{\tau} = h$ στο Ε,$i, j = 1, \cdots, n$.

Πρόταση 2

Αν ισχύει η συνθήκη Α για τα a_i, h_{ij} τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = x + \int_0^t a(X_u)du + \int_0^t b(X_u)dB_u, \ \ t \geq 0 \tag{4.4}$$

με b τέτοια ώστε $b(x)b^{\tau}(x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$, έχει μοναδική ισχυρή λύση για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Αφού ισχύει η συνθήκη Α έπεται ότι το λήμμα 1 είναι ισχυρό για την $n \times n$-πινακοσυνάρτηση $[h_{ij}(x)]$ και συνεπώς οι συναρτήσεις $b_{ij}(x)$ είναι *Lipschitz* στα συμπαγή του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x) - b_{ij}(y)| \leq K_m^{'}|x-y| \tag{4.5}$$

για όλα τα $|x|, |y| \leq m$ με $K_m^{'} > 0$.

Επίσης από την $b(x)b^{\tau}(x) = [h_{ij}(x)], \forall x \in \mathbb{R}^n$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |h_{ii}(x)| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |h_{ii}^2(x)|} \leq \sqrt{n}R(1+|x|)$$

και συνεπώς

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x)|^2 \leq \sqrt{n}R(1+|x|^2), \forall |x| > 1$$

. Επίσης λόγω συνέχειας είναι $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x)|^2 \leq M, \forall |x| \leq 1$ με $M > 0$ και άρα $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x)|^2 \leq M(1+|x|^2), \forall |x| \leq 1$

Τελικά αν θέσουμε $R^{'} \geq max\{M, \sqrt{n}R\}$ έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(x)|^2 \leq R^{'}(1+|x|^2) \tag{4.6}$$

και άρα από το τελευταίο και από τις υποθέσεις για το a έχουμε ότι η εν λόγω ΣΔΕ έχει μοναδική ισχυρή λύση για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Q.E.D.

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τώρα το αποτέλεσμα της στοχαστικής αναπαράστασης της γενικευμένης λύσης v του προβλήματος [1].

Πρόταση 3

Έστω ότι για τα δεδομένα a_i, h_{ij} του προβλήματός μας ισχύει η συνθήκη A και D ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ακόμα ότι για τη μοναδική ισχυρή λύση $X_t = X(x,t), t \geq 0$ της παραπάνω ΣΔΕ με $|a_t(\omega)| + \|b_t(\omega)\| \leq K$ και $b \cdot b^\tau = [h_{ij}]$ για κάποιο $K > 0$ ισχύουν οι παρακάτω απαιτήσεις:

1. Για $\tau(x) = inf\{t \geq 0 : X_t \in D^c\}$ είναι $E(\tau(x)) < \infty \; \forall x \in D$.

2. $|q(x)| \leq N \; \forall x \in D$ με $N > 0$.

Τότε αν $v \in C(\overline{D}) \cap W_p^2(D)$ είναι λύση του προβλήματος [1], ισχύει:

$$v(x) = E\{\int_0^\tau f(X_r)exp\{-\int_0^r q(X_u)du\}dr + \phi(X_\tau)exp\{-\int_0^\tau q(X_u)du\}\}, \; x \in \overline{D} \tag{4.7}$$

Απόδειξη

Έστω τυχόν $x \in D$. Θέτουμε $D_n = \{x \in D : dist(x, \partial D) > \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$. Τότε τα D_n είναι ανοικτά υποσύνολα του D και είναι φανερό ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να έχουμε $x \in D_n$ για κάθε $n \geq n_o$. Έστω η λύση $X_t = X(x,t), t \geq 0$ της παραπάνω ΣΔΕ και θέτουμε:

$$\begin{aligned} \tau_n &= inf\{t \geq 0 : X_t \in D_n^c\}, n \geq n_o \\ Y_t &= \int_0^t q(X_r)dr \\ Z_t &= e^{-Y_t}, \; t \geq 0 \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_r q(X_r)dr$$

και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε για $t \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -Z_r q(X_r) \\ a(X_r) \end{bmatrix} dr + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ b(X_r) \end{bmatrix} dBr \tag{4.8}$$

Ας θέσουμε τώρα για ευκολία στο συμβολισμό:

$$\begin{aligned}\overline{a}(X_r) &= \begin{bmatrix} -Z_r q(X_r) \\ a(X_r) \end{bmatrix} \\ \overline{b}(X_r) &= \begin{bmatrix} 0 \\ b(X_r) \end{bmatrix} \\ \overline{h}(X_r) &= \overline{b}(X_r) \cdot \overline{b}^{\tau}(X_r)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned}|\overline{b_r}| &= |b_r| \leq K \\ |\overline{a_r}|^2 &= |a_r|^2 + |Z_r q(r, X_r)|^2 \leq K^2 + N^2 \\ |\overline{h_r}| &= |h_r|\end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γενικευμένη Ito formula (3.25) στην

$$w(z, x) = z \cdot v(x) \in W_p^2(D)$$

με στοχαστική ανέλιξη την

$$[Z_t, X_t]'$$

. Συνεπώς κάνοντας και διακοπή στον χρόνο $T \wedge \tau_n$, για κάθε $\lambda > 0$ και $n \geq n_o$, έχουμε P-σχεδόν βεβαίως:

$$\begin{aligned}e^{-\lambda \cdot t\wedge\tau_n} \cdot Z_{t\wedge\tau_n} \cdot v(X_{t\wedge\tau_m}) &= v(x) + \int_0^{t\wedge\tau_n} e^{-\lambda r} Z_r [L_1 v - \lambda v - qv](X_r) dr \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda r\wedge\tau_n} Z_{r\wedge\tau_n} (\nabla v \cdot b)(X_{r\wedge\tau_n}) I_{\{\tau_n \geq r\}} dB_r\end{aligned}$$

Όμως από υπόθεση

$$|b(X_{r\wedge\tau_n})|^2 \leq R'(1 + |X_{r\wedge\tau_n}|^2) \leq R'(1 + |\sup_{0\leq r\leq t} X_r|^2), \forall r \in [0, t]$$

και από πρόταση 4.2.4 (σχέση 4.2) έχουμε ότι:

$$E\{\sup_{0\leq r\leq t} |X_r^2|\} \leq N(1 + |x|^2)e^{Nt}$$

Συνεπώς η στοχαστική ανέλιξη $b(X_{r\wedge\tau_n}), r \geq 0$ ανήκει στην κλάση $L^{n\times n}$ και επειδή η ∇v είναι φραγμένη στο $\overline{D_n}$ (λόγω θεωρήματος εγκλεισμού 3.3.3), συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη που ορίζεται από το τελευταίο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι ένα $\mathcal{F}_t - martingale$, με μέση τιμή μηδέν. Παίρνοντας μέσες τιμές στην παραπάνω Ito formula και λαμβάνοντας υπόψη ότι $L_1 v - qv = -f$ έχουμε για $n \geq n_o$:

$$
\begin{aligned}
v(x) &= E\{\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{-\lambda r} Z_r f(X_r)dr\} + E\{\int_0^{t\wedge\tau_n} \lambda\cdot e^{-\lambda r} Z_r\cdot v(X_r)dr\} \\
&+ E\{e^{-\lambda\cdot t\wedge\tau_n} Z_{t\wedge\tau_n} v(X_{t\wedge\tau_n})\}
\end{aligned}
$$

Λόγω τώρα συνέχειας των τροχιών ισχύει $\tau_n \uparrow \tau$ όταν $n \to \infty$. Συνδυάζοντας τώρα το ότι οι v, f είναι φραγμένες λόγω συνέχειας στο $\overline{D}$ και το ότι $E(\tau(x)) < \infty \ \forall x \in D$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque και έτσι να συμπεράνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
v(x) &= E\{\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\lambda r} Z_r f(X_r)dr\} + E\{\int_0^{t\wedge\tau} \lambda\cdot e^{-\lambda r} Z_r\cdot v(X_r)dr\} \\
&+ E\{e^{-\lambda\cdot t\wedge\tau} Z_{t\wedge\tau} v(X_{t\wedge\tau})\} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Για τούς ίδιους λόγους τώρα παίρνοντας $t \to \infty$ μπορούμε πάλι να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque και σε συνδυασμό με το γεγονός $v(X_\tau) = \phi(X_\tau)$ έχουμε το ακόλουθο

$$
\begin{aligned}
v(x) &= E\{\int_0^{\tau} e^{-\lambda r} Z_r f(X_r)dr\} + E\{\int_0^{\tau} \lambda\cdot e^{-\lambda r} Z_r\cdot v(X_r)dr\} \\
&+ E\{e^{-\lambda\cdot\tau} Z_\tau \phi(X_\tau)\} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Τέλος παίρνοντας $\lambda \to 0$ και εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque, έχουμε την επιθυμητή μορφή της λύσης:

$$
v(x) = E\{\int_0^{\tau} Z_r f(X_r)dr\} + E\{Z_\tau \phi(X_\tau)\} \qquad (4.11)
$$

$Q.E.D.$

Παρατήρηση

Μπορούμε χωρίς καμία αλλαγή στην παραπάνω απόδειξη να χαλαρώσουμε τις απαιτήσεις μας για τη συνάρτηση f θεωρώντας απλά ότι $f \in \mathcal{L}^p(\overline{D})$. Αυτό μπορεί να γίνει μιας και η σχετική ανισότητα Krylov (3.18) μας εξασφαλίζει ότι οι μέσες τιμές των ολοκληρωμάτων, στα οποία εμφανίζεται η f, είναι φραγμένες.

4.4 Στοχαστική αναπαράσταση της γενικευμένης λύσης του προβλήματος Cauchy-(Feynmann-Kac formula)

2. Το πρόβλημα αρχικών τιμών Cauchy είναι το πρόβλημα κατά το οποίο :

δίνονται $T > 0, p \geq n$ δύο αριθμοί και συναρτήσεις $f, q, a_i, h_{i,j} \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n), \phi \in C(\mathbb{R}^n), i,j = 1, \cdots, n$ με $q \geq 0$ και **ζητείται** συνάρτηση $v(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

- $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}_{p+1}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$.
- $\frac{\partial v}{\partial t} + L_1^t v - qv = -f$ στο $[0,T) \times \mathbb{R}^n$. [2]
- $v(T,x) = \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

όπου L_1^t είναι ο τελεστής:

$$L_1^t v(t,x) = \sum_{i=1}^n a_i(t,x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t,x)$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι για τα δεδομένα $a_i, h_{ij}, i,j = 1, \cdots, n$ του παραπάνω προβλήματος ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

Συνθήκη Β :

Οι συναρτήσεις $a_i, h_{ij}, i,j = 1, \cdots, n$ έχουν πεδίο ορισμού το $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ και ικανοποιούν τις ακόλουθες απαιτήσεις

- Οι συναρτήσεις h_{ij} είναι *Lipshitz* στα συμπαγή του $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.
- για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $K_m > 0$ ώστε να ισχύει

  $$\sum_{i=1}^n |a_i(x) - a_i(y)| \leq K_m |x - y|,$$

  για όλα τα $t \in [0,T], |x|, |y| \leq m$.
- Υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(t,x) y_i y_j \geq d|y|^2$ για κάθε $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$.
- Υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^n |a_i(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^n |h_{ij}(x)|^2 \leq R(1 + |x|^2)\ \forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n$.

Κατά αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 1

Αν ισχύει η συνθήκη B για τα a_i, h_{ij} τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = x + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u, \ \ t \geq s \tag{4.12}$$

με b τέτοια ώστε $b(t,x)b^\tau(t,x) = h(t,x), \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, έχει μοναδική ισχυρή λύση για κάθε $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Αφού ισχύει η συνθήκη B έπεται ότι το λήμμα 3.1 είναι ισχυρό για την $n \times n$-πινακοσυνάρτηση $[h_{ij}(t,x)]$ και συνεπώς ακολουθώντας την ίδια ακριβώς επιχειρηματολογία με την πρόταση 3.2 έχουμε ότι η παραπάνω ΣΔΕ έχει μοναδική ισχυρή λύση για κάθε $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Q.E.D.

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τώρα το αποτέλεσμα της στοχαστικής αναπαράστασης της γενικευμένης λύσης v του προβλήματος [2].

Πρόταση 2

Έστω ότι για τα δεδομένα a_i, h_{ij} του προβλήματός μας ισχύει η συνθήκη B, $T > 0$ ένας αριθμός και f, ϕ, q τα υπόλοιπα δεδομένα του προβλήματός μας για τα οποία ισχύουν και τα εξής

1. $|f(t,x)| \leq M(1 + |x|^{2l})$ ή $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ με $M > 0, l \geq 1$.
2. $|\phi(x)| \leq M(1 + |x|^{2l})$ ή $\phi(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ με $M > 0, l \geq 1$.
3. $|q(t,x)| \leq N \forall x \in \mathbb{R}^n$ με $N > 0$.

Αν τώρα $v \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}_{p+1}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ είναι μια λύση του προβλήματος [2] που ικανοποιεί την απαίτηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t,x)| \leq N(1 + |x|^{2\mu}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \mu\epsilon \ N > 0, \mu \geq 1$$

τότε για κάθε $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$v(s,x) = E\{\int_s^T f(r, X_r) exp\{-\int_s^r q(u, X_u)du\}dr + \phi(X_T) exp\{-\int_s^T q(u, X_u)du\}\} \tag{4.13}$$

όπου $X_t = X^s(x,t), t \geq s$ η μοναδική ισχυρή λύση της παραπάνω ΣΔΕ με $|a_t(\omega)| + \|b_t(\omega)\| \leq K$ για κάποιο $K > 0$ και $b \cdot b^\tau = h$.

Απόδειξη
Για τυχόν $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_s^t q(r,X_r)dr \\ Z_t &= e^{-Y_t}, \ \ t \geq s \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι

$$Z_t = 1 - \int_s^t Z_r q(r,X_r)dr$$

και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε για $t \geq s$:

$$\begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + \int_s^t \begin{bmatrix} -Z_r q(r,X_r) \\ a(r,X_r) \end{bmatrix} dr + \int_s^t \begin{bmatrix} 0 \\ b(r,X_r) \end{bmatrix} dBr \tag{4.14}$$

Ας θέσουμε τώρα για ευκολία στο συμβολισμό:

$$\begin{aligned} \overline{a}(r,X_r) &= \begin{bmatrix} -Z_r q(r,X_r) \\ a(r,X_r) \end{bmatrix} \\ \overline{b}(r,X_r) &= \begin{bmatrix} 0 \\ b(r,X_r) \end{bmatrix} \\ \overline{h}(r,X_r) &= \overline{b}(r,X_r) \cdot \overline{b}^{\tau}(r,X_r) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} |\overline{b_r}| &= |b_r| \leq K \\ |\overline{a_r}|^2 &= |a_r|^2 + |Z_r q(r,X_r)|^2 \leq K^2 + N^2 \\ |\overline{h_r}| &= |h_r| \end{aligned}$$

Επομένως αν θεωρήσουμε την ακολουθία χρόνων διακοπής $\{\tau_m\}$ όπου

$$\tau_m = inf\{t \geq s : |X_t| \geq m\}, m \in \mathbb{N}$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γενικευμένη Ito formula (3.24) στην

$$w(t,z,x) = z \cdot v(t,x) \in W^{1,2}_{p+1}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$$

με στοχαστική ανέλιξη την

$$[Z_t, X_t]'$$

Συνεπώς κάνοντας και διακοπή στον χρόνο $T \wedge \tau_m$, για κάθε $\lambda > 0$, έχουμε ότι ισχύει P-σχεδόν βεβαίως:

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda\cdot T\wedge\tau_m}\cdot Z_{T\wedge\tau_m}\cdot v(T\wedge\tau_m, X_{T\wedge\tau_m}) &= e^{-\lambda s}v(s,x) \\
&+ \int_s^{T\wedge\tau_m} e^{-\lambda r}Z_r[\frac{\partial v}{\partial r}+L_1^r v-\lambda v-qv](r,X_r)dr \\
&+ \int_s^{T} e^{-\lambda r\wedge\tau_m}Z_{r\wedge\tau_m}(\nabla v\cdot b)(r\wedge\tau_m, X_{r\wedge\tau_m})I_{\{\tau_m\geq r\}}dB_r
\end{aligned}
$$

Επειδή τώρα $|X_{r\wedge\tau_m}|\leq m$ και $\nabla v, b$ φραγμένες λόγω συνέχειας (το οποίο και προκύπτει από το θεώρημα εγκλεισμού) στο $[0,T]\times\{x:|x|\leq m\}$, συμπεραίνουμε ότι το τελευταίο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι *martingale* με μέση τιμή μηδέν. Παίρνοντας λοιπόν μέσες τιμές στην παραπάνω σχέση και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial v}{\partial t}+L_1^t v-qv=-f$, καταλήγουμε ότι για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$
\begin{aligned}
v(s,x) &= e^{\lambda s}E\{\int_s^{T\wedge\tau_m} e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)dr\}+e^{\lambda s}E\{\int_s^{T\wedge\tau_m} e^{-\lambda r}Z_r\cdot\lambda v(r,X_r)dr\} \\
&+ e^{\lambda s}E\{e^{-\lambda\cdot T\wedge\tau_m}Z_{T\wedge\tau_m}v(T\wedge\tau_m, X_{T\wedge\tau_m})\} = \\
&= e^{\lambda s}E\{\int_s^{T\wedge\tau_m} e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)dr\}+e^{\lambda s}E\{\int_s^{T\wedge\tau_m} \lambda\cdot e^{-\lambda r}Z_r\cdot v(r,X_r)dr\} \\
&+ e^{\lambda s}E\{e^{-\lambda\cdot\tau_m}Z_{\tau_m}v(\tau_m, X_{\tau_m})I_{\{\tau_m\leq T\}}\}+e^{\lambda s}E\{e^{-\lambda\cdot T}Z_T\phi(X_T)I_{\{\tau_m>T\}}\}
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε τώρα έναν ακέραιο ν με $\nu>l,\mu$ και λόγω της πρότασης 4.2.4 (σχέση 4.2) έχουμε

$$E\{\max_{s\leq r\leq t}|X_r^{2\nu}|\}\leq C(1+|x|^{2\nu})e^{C(t-s)}, s\leq t\leq T$$

όπου η σταθερά $C>0$ εξαρτάται από τα ν, T, R.

Για τον πρώτο όρο του παραπάνω αθροίσματος έχουμε

$$e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)I_{\{\tau_m\geq r\}}\rightarrow e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)$$

στο $[s,T]\times\Omega$ για $\tau_m\rightarrow\infty$

Επίσης λόγω της υποθέσεως 1 για την f έχουμε

$$|e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)I_{\{\tau_m\geq r\}}|\leq M(1+|X_r|^{2l})$$

και επειδή για κάθε $r\in[s,T]$ ισχύει

$$E(1+|X_r|^{2l})\leq 2+E|X_r|^{2\nu}\leq 2+E(\max_{s\leq r\leq t}|X_r|^{2\nu})\leq 2+C(1+|x|^{2\nu})e^{C(t-s)}$$

το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque μας δίνει

$$E\{\int_s^{T\wedge\tau_m} e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)dr\}\rightarrow E\{\int_s^{T} e^{-\lambda r}Z_r f(r,X_r)dr\}$$

καθώς $m \to \infty$.

Με όμοια επιχειρηματολογία τώρα και λόγω της 2ης υπόθεσης της πρότασης έπεται ότι

$$e^{\lambda s} E\{e^{-\lambda \cdot T} Z_T \phi(X_T) I_{\{\tau_m > T\}}\} \to e^{\lambda s} E\{e^{-\lambda \cdot T} Z_T \phi(X_T)\}$$

καθώς $m \to \infty$.

Για τον τρίτο όρο τώρα του αθροίσματος έχουμε ότι

$$J_m = |E\{e^{-\lambda \cdot \tau_m} Z_{\tau_m} v(\tau_m, X_{\tau_m}) I_{\{\tau_m \leq T\}}\}| \leq E\{|v(\tau_m, X_{\tau_m})| I_{\{\tau_m \leq T\}}\}$$

και οπότε λόγω της υπόθεσης και αφού $|X_{\tau_m}| = m$ προκύπτει ότι

$$J_m \leq N(1 + m^{2\mu}) P(\tau_m \leq T) \, \forall m \in \mathbb{N} \tag{4.15}$$

Όμως $P(\tau_m \leq T) = P(\max_{s \leq r \leq t} |X_r| \geq m)$ και εφαρμόζοντας διαδοχικά την ανισότητα Chebyshev [1] και την πρόταση 2.4 έχουμε

$$P(\max_{s \leq r \leq t} |X_r| \geq m) \leq \frac{E(\max_{s \leq r \leq t} |X_r|^{2\nu})}{m^{2\nu}} \leq \frac{C(1 + |x|^{2\nu}) e^{C(t-s)}}{m^{2\nu}}$$

Οπότε έχουμε ότι

$$J_m \leq \frac{1 + m^{2\mu}}{m^{2\nu}} NC(1 + |x|^{2\nu}) e^{C(t-s)} \tag{4.16}$$

Όμως $\nu > \mu$ και συνεπώς $\frac{1+m^{2\mu}}{m^{2\nu}} \to 0$ όταν $m \to \infty$.

Πράγμα που σημαίνει πως ο τρίτος όρος συγκλίνει στο μηδέν.

Για το δεύτερο όρο τέλος έχουμε

$$\lambda e^{-\lambda r} Z_r v(r, X_r) I_{\{\tau_m \geq r\}} \to \lambda e^{-\lambda r} Z_r v(r, X_r)$$

στο $[s, T] \times \Omega$ για $\tau_m \to \infty$

Επίσης λόγω της υποθέσεως για την v έχουμε

$$|\lambda e^{-\lambda r} Z_r v(r, X_r) I_{\{\tau_m \geq r\}}| \leq \lambda \cdot N(1 + |X_r|^{2\mu})$$

και επειδή για κάθε $r \in [s, T]$ ισχύει

$$E(1 + |X_r|^{2\mu}) \leq 2 + E|X_r|^{2\nu} \leq 2 + E(\max_{s \leq r \leq t} |X_r|^{2\nu}) \leq 2 + C(1 + |x|^{2\nu}) e^{C(t-s)}$$

το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque μας δίνει

$$E\{\int_s^{T \wedge \tau_m} \lambda e^{-\lambda r} Z_r v(r, X_r) dr\} \to E\{\int_s^T \lambda e^{-\lambda r} Z_r v(r, X_r) dr\}$$

[1] δηλαδή $P(\max_{s \leq r \leq t} |X_r| \geq m) \leq \frac{E(\max_{s \leq r \leq t} |X_r|^{2\nu})}{m^{2\nu}}$

καθώς $m \to \infty$.

Οπότε με βάση τα παραπάνω έχουμε καταλήξει στην ακόλουθη μορφή της λύσης

$$\begin{aligned} v(s,x) &= e^{\lambda s} E\{\int_s^T e^{-\lambda r} Z_r f(r, X_r) dr\} + e^{\lambda s} E\{\int_s^T \lambda \cdot e^{-\lambda r} Z_r \cdot v(r, X_r) dr\} \\ &+ e^{\lambda s} E\{e^{-\lambda \cdot T} Z_T \phi(X_T)\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Από τα παραπάνω όμως μπορούμε παίρνοντας $\lambda \to 0$ να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesque, πράγμα που μας δίνει την επιθυμητή μορφή της λύσης:

$$v(s,x) = E\{\int_s^T f(r, X_r) exp\{-\int_s^r q(u, X_u) du\} dr + \phi(X_T) exp\{-\int_s^T q(u, X_u) du\}\} \tag{4.18}$$

Q.E.D.

Παρατήρηση

Μπορούμε χωρίς καμία αλλαγή στην παραπάνω απόδειξη να χαλαρώσουμε τις απαιτήσεις μας για τη συνάρτηση f θεωρώντας απλά ότι $f \in \mathcal{L}^{p+1}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Αυτό μπορεί να γίνει μιας και η σχετική ανισότητα Krylov (3.17) μας εξασφαλίζει ότι οι μέσες τιμές των ολοκληρωμάτων, στα οποία εμφανίζεται η f, είναι φραγμένες.

Βιβλιογραφία

[1] *Brezis*, Συναρτησιακή Ανάλυση, Μετάφραση Επιμέλεια: Δημήτρης Κραββαρίτης, Ίων Χρυσοβέργης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα (1997) .

[2] *Freidlin*, Functional Integration and Partial Differential Equations, Princeton University Press (1985).

[3] *Friedman*, Stochastic Differential Equations and Applications,Volume 1, Academic Press (1975).

[4] *N.V.Krylov*, On Ito's stochastic integral equations,Theory of Probability and its Applications 14, (English transalation), (1969).

[5] *N.V.Krylov*, Sequences of convex functions and estimations of the maximum of the solutions of a parabolic equation,Sibirskii Mat. Zhurnal (English transalation), (1976).

[6] *N.V.Krylov*, Controlled Diffusion Processes,Springer-Verlang (1980).

[7] *Rockafellar,R.T*, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1970).

[8] *Spiliotis John*, Uniqueness of the generalized solution of a parabolic type Monge-Ampere Equation, Stochastic and Stochastics Reports, (1994).

[9] *Spiliotis John*, On a Monge-Ampere operator, Nonlinear Studies 4, (1997).

[10] *S.J. Taylor*, Introduction to Measure and Intergration, Cambridge University Press,(1966).

[11] *Taylor B.A., Rauch J.*, The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampere equation, Rocky Mountain J. of Math 7:2, (1977).

[12] *Tso, K*, On the Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second order parabolic equations, Comm. in PDE 10:5, (1985).

[13] *Παπαγεωργίου Νίκος*, Σημειώσεις κυρτής ανάλυσης 5ου εξάμηνου ΣΕΜΦΕ, Αθήνα (2001).

[14] *Σαραντόπουλος*, Σημειώσεις θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης 7ου εξάμηνου ΣΕΜΦΕ, Αθήνα (2003).

[15] *Σπηλιώτης Ιωάννης*, Σημειώσεις θεωρίας πιθανοτήτων 6ου εξάμηνου ΣΕΜΦΕ, Αθήνα (2002).

[16] *Σπηλιώτης Ιωάννης*, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (2004).

Ευρετήριο